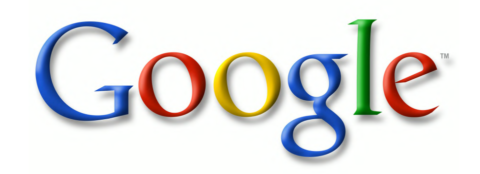
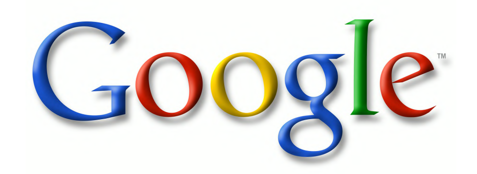
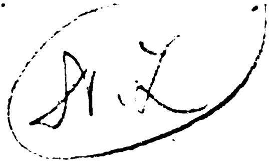
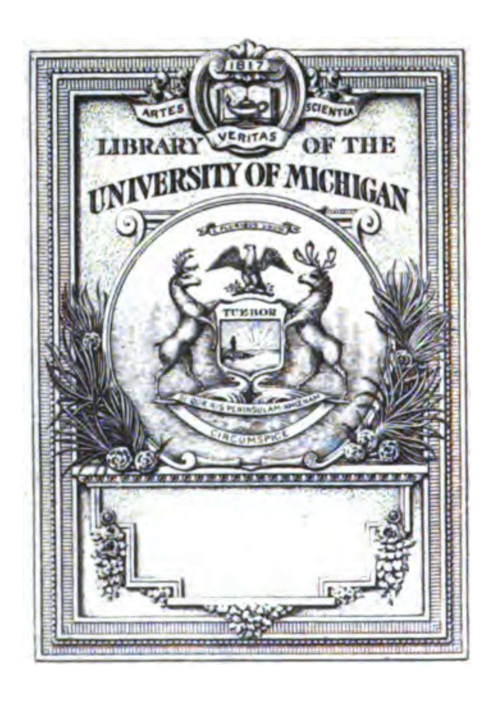







1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

G. Hauber.

Vorlesungen

über die

höhere Mathematik.

Vom Professor

Andreas von Ettingshausen.

Zweiter Band.

Vorlesungen über die analytische Geometrie und Mechanik.



Wien.
Gedruckt und im Verlage bei Carl Gerold.
1827.

Inhalt des zweiten Bandes.

Vorlesungen über die analytische Geometrie.

Seite

Erste Vorlesung. Über die in der analytischen Geometrie gebräuchlichen Coordinatensysteme und über die Transformation derselben 3

Zweite Vorlesung. Über einige Folgerungen aus den Formeln der vorhergehenden Vorlesung 11

Dritte Vorlesung. Über die analytische Darstellung der Flächen und Linien im Allgemeinen, und über jene einer Kugel und einer Ebene insbesondere 20

Vierte Vorlesung. Über die Gleichungen einer geraden Linie . 28

Fünfte Vorlesung. Über die Auflösung einiger die gerade Linie und die Ebene betreffender Aufgaben 35

Sechste und siebente Vorlesung. Über die geometrische Bedeutung einer Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen 42, 49

Achte Vorlesung. Über einige Eigenschaften der Linien der zweiten Ordnung 57

Neunte, zehnte, eilfte und zwölfte Vorlesung. Über die geometrische Bedeutung einer Gleichung des zweiten Grades zwischen drei veränderlichen Größen 65, 72, 79, 86

Dreizehnte Vorlesung. Über die Bestimmung der Berührungslinien und Normalebenen der Curven, und der Berührungsebenen und Normallinien der krummen Flächen 94

Vierzehnte Vorlesung. Über die verschiedenen Ordnungen der Berührung der Linien und Flächen 102

Fünfzehnte Vorlesung. Über die Bestimmung des Krümmungskreises einer Curve 110

Seite
Sechzehnte Vorlesung. Über die zwischen einer krummen Fläche und einer Kugel Statt findende Berührung 119
Siebzehnte Vorlesung. Über die verschiedenen Krümmungen der Flächen 127
Achtzehnte Vorlesung. Über die Rectification der krummen Linien 134
Neunzehnte Vorlesung. Über die Quadratur der ebenen Curven, und über die Complanation und Kubirung der krummen Flächen . 142
Zwanzigste Vorlesung. Über die Übertragung einiger in den vorhergehenden Vorlesungen gefundenen Formeln auf ein Polarcoordinatensystem 150
Ein und zwanzigste Vorlesung. Über einige besondere Puncte ebener Curven 158
Zwei und zwanzigste Vorlesung. Über die Abwickelung ebener Curven 167
Drei und zwanzigste Vorlesung. Über die Trajectorien und Einhüllungslinien ebener Curven 176
Vier und zwanzigste Vorlesung. Über die cylindrischen, konischen und Rotations-Flächen 185
Fünf und zwanzigste Vorlesung. Über die Einhüllungsflächen 194
Sechs und zwanzigste Vorlesung. Über die developpablen Flächen 202
Sieben und zwanzigste Vorlesung. Über die Auflösung einiger, die in den vorhergehenden Vorlesungen betrachteten Flächen betreffender Aufgaben 209
Acht und zwanzigste Vorlesung. Über die Evolution wie immer beschaffener krummer Linien 217
Neun und zwanzigste Vorlesung. Über den Gebrauch der Variationsrechnung bei der Bestimmung der mit einer Eigenschaft des Größten oder Kleinsten begabten Linien und Flächen . . . 225
Dreißigste Vorlesung. Über den Gebrauch der Differenzenrechnung bei der Auflösung geometrischer Probleme 234

Vorlesungen über die analytische Mechanik.

Seite

Erste Vorlesung. Über die Kräfte im Allgemeinen, und über die Zusammensetzung zweier auf einen materiellen Punct unter einem rechten Winkel wirkenden Kräfte insbesondere 243
Zweite Vorlesung. Über die Zusammensetzung beliebiger auf einen materiellen Punct wirkender Kräfte 250
Dritte Vorlesung. Über die Bestimmung der Anziehung eines Körpers gegen einen Punct, wenn die zwischen jeden zwei Puncten bestehende Anziehung dem Quadrate ihrer Entfernung verkehrt proportionirt ist 257
Vierte Vorlesung. Über die Anziehung einer Kugel gegen einen gegebenen Punct 265
Fünfte Vorlesung. Über die Einwirkung eines gleichförmig dichten elliptischen Sphäroids auf einen gegebenen Punct bei dem in der Natur Statt findenden Anziehungsgesetze 274
Sechste Vorlesung. Über das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten 282
Siebente Vorlesung. Über die Bedingungen des Gleichgewichtes gegebener, auf einen einzelnen Punct, oder auch auf ein System mehrerer Puncte wirkenden Kräfte 290
Achte Vorlesung. Über einige Folgerungen aus den Resultaten der vorhergehenden Vorlesung 298
Neunte Vorlesung. Über das Gleichgewicht und die Zusammensetzung paralleler Kräfte 307
Zehnte Vorlesung. Über den Gebrauch des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten bei der Auflösung der Probleme der Statik 315
Eilfte Vorlesung. Über das Gleichgewicht eines vollkommen biegsamen Fadens 323
Zwölfte Vorlesung. Über die Kettenlinie 331
Dreizehnte und vierzehnte Vorlesung. Über das Gleichgewicht eines flüssigen Körpers 339, 348
Fünfzehnte Vorlesung. Über die Grundformeln der Bewegungslehre 357
Sechzehnte Vorlesung. Über die Auflösung einiger, die geradlinige Bewegung eines Punctes betreffenden, Aufgaben . . . 365

Seite

Siebzehnte Vorlesung. Über die Reduction der Probleme der Dynamik auf jene der Statik im Allgemeinen, und über die Bewegung eines Punctes insbesondere 373

Achtzehnte Vorlesung. Über die Anwendung der in der vorhergehenden Vorlesung entwickelten Formeln auf einige specielle Fälle 382

Neunzehnte Vorlesung. Über die Bewegung eines schweren Punctes auf dem Kreise und auf der Cykloide 391

Zwanzigste Vorlesung. Über die Bewegung eines Systems materieller Puncte 400

Ein und zwanzigste Vorlesung. Über die drehende Bewegung eines unveränderlichen Systems materieller Puncte um eine fixe Axe, und über die Momente der Trägheit 410

Zwei und zwanzigste Vorlesung. Über die drehende Bewegung eines unveränderlichen Systems materieller Puncte um einen fixen Punct 419

Drei und zwanzigste Vorlesung. Über die Hauptaxen der Drehung eines Systems materieller Puncte 428

Vier und zwanzigste Vorlesung. Über einige andere allgemeine Eigenschaften der Bewegung eines Systems materieller Puncte . 437

Fünf- und sechs und zwanzigste Vorlesung. Über das Verhalten eines materiellen Systems in der Nähe einer seiner Positionen des Gleichgewichtes 445, 454

Sieben und zwanzigste Vorlesung. Über die Schwingungen eines linearen Systems gegebenen Kräften unterworfener und auf einander wechselweise einwirkender Massen in der Nähe der Position des Gleichgewichtes 463

Acht und zwanzigste Vorlesung. Über die Schwingungen gespannter Saiten 472

Neun und zwanzigste und dreißigste Vorlesung. Über die Bewegung eines flüssigen Körpers 481, 490

Vorlesungen

über die

analytische Geometrie.

Erste Vorlesung.

Über die in der analytischen Geometrie gebräuchlichen Coordinatensysteme und über die Transformation derselben.

Da bei der Untersuchung der Eigenschaften ausgedehnter Größen, solcher nämlich, zu deren Kenntniß wir durch Betrachtung einzelner Theile des Raumes und ihrer Grenzen gelangen, nebst der Quantität, hinsichtlich welcher dieselben den auf alle Größen überhaupt anwendbaren Gesetzen unterliegen, auch noch auf Gestalt und gegenseitige Lage, wie es die eigenthümliche Beschaffenheit der genannten Größen mit sich bringt, Rücksicht zu nehmen ist: so fordert die analytische Behandlung der Geometrie, daß auch die letzteren, auf die Natur des Raumes sich gründenden Beziehungen durch Zahlen ausgedrückt werden, und somit Operationen des Calculs an die Stelle wirklicher Constructionen im Raume treten.

Eine ausgedehnte Größe ist vollständig bekannt, wenn man die Position jedes einzelnen ihrer Puncte anzugeben vermag. Es handelt sich also nur um die analytische Bestimmung der Lage eines Punctes im Raume. Diese wird dadurch bewerkstelliget, daß man Größen, welche zur unzweideutigen Angabe des fraglichen Punctes nöthig sind und hinreichen, durch Zahlen darstellt. Solche Größen nennt man Coordinaten dieses Punctes; ihren Inbegriff aber ein Coordinatensystem.

Obschon so viele Coordinatensysteme erdacht werden können, als uns Mittel zur geometrischen Bestimmung eines Punctes zu Gebote stehen, so sind doch fast durchgehends nur zwei im Gebrauche, nämlich das sogenannte rechtwinkelige und das Polar-Coordinatensystem, weil sie der Rechnung eine einfachere Form ertheilen, als die übrigen. Welches der beiden genannten Systeme aber vortheilhafter ist, hängt von der Beschaffenheit des vorliegenden besonderen Falles ab. Wir wollen vor Allem zur Erklärung derselben schreiten.

Bei dem rechtwinkligen Coordinatensysteme denkt man sich durch einen beliebigen fixen Punct, den Anfangspunct der Coordinaten, drei wechselweise auf einander senkrecht stehende fixe Ebenen, die coordinirten Ebenen, gelegt, welche, da jede einzelne Ebene den Raum in zwei Parthien abtheilt, wovon eine diesseits, die andere jenseits der Ebene liegt, durch ihr Zusammenseyn $2.2.2=8$ Parthien des Raumes, nämlich 8 um den Anfangspunct der Coordinaten herum liegende dreiflächige körperliche Winkel oder Ecken bestimmen. Jeder im Raume denkbare Punct befindet sich entweder innerhalb einer dieser Ecken, oder in einer der coordinirten Ebenen selbst. Der zweite Fall läßt sich auf den ersten zurückführen; was aber diesen betrifft, so ist die Position eines Punctes in Bezug auf die coordinirten Ebenen völlig bestimmt, wenn man weiß, innerhalb welcher der acht Ecken er liegt, und wie groß seine Abstände von den drei coordinirten Ebenen sind. Denn setzen wir erstlich voraus, über die Lage eines Punctes sey nichts weiter bekannt, als daß die aus ihm auf eine bestimmte der coordinirten Ebenen gefällte Senkrechte die Länge a habe, so kann jeder Punct der beiden Ebenen, welche sich diesseits und jenseits der genannten coordinirten Ebene in dem Abstande a zu dieser letzteren parallel führen lassen, für den in der Frage stehenden Punct gehalten werden. Ist überdieß noch der Abstand b desselben von einer zweiten coordinirten Ebene gegeben, so wird er dadurch auch noch in eine der beiden Ebenen versetzt, welche der letztgenannten coordinirten Ebene, diesseits und jenseits derselben, in der Entfernung b parallel laufen. Aber das zweite Paar paralleler Ebenen begegnet dem ersten Paare nur in vier parallelen Geraden; daher kann der erwähnte Punct nur mehr in einer dieser Geraden vorhanden seyn, welche, wie leicht zu zeigen ist, auf der dritten coordinirten Ebene senkrecht stehen. Wird endlich die Entfernung dieses Punctes von der dritten coordinirten Ebene durch c ausgedrückt, so kann derselbe nur mehr einer der acht Puncte seyn, welche auf den so eben erhaltenen vier parallelen Geraden, diesseits und jenseits der dritten coordinirten Ebene, in dem Abstande c von derselben sich vorfinden. Allein jeder dieser acht Puncte liegt innerhalb einer anderen Ecke; wird also zu den angeführten Bestimmungen noch die Angabe der Ecke hinzugefügt, in deren Gebiet ein Punct gehört, so wird derselbe dadurch von allen anderen Puncten des Raumes hinreichend unterschieden, und es bleibt über die Lage desselben kein Zweifel mehr übrig. Die letzterwähnte Angabe wird höchst einfach

durch die Zeichen zu Stande gebracht, welche man den Coordinaten a, b, c vorsetzt. Wenn nämlich von mehreren diesseits und jenseits einer Ebene liegenden Puncten Perpendikel auf dieselbe fallen, und eine zwischen diesen Perpendikeln Statt findende Beziehung durch eine Gleichung dargestellt werden soll, so verhalten sich die von entgegengesetzten Parthien des Raumes herkommenden Perpendikel wie entgegengesetzte Größen, d. h. sie müssen, wenn sie in erwähnter Gleichung gegen einander umgetauscht werden, aus demselben Grunde entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, aus welchem man, wie wir in der vierzehnten Vorlesung über die Analysis gesehen haben, die auf entgegengesetzten Seiten des ersten Hauptdurchmessers liegenden Sinusse mit entgegengesetzten Zeichen versieht. Man wird also auch die auf eine und dieselbe Ebene senkrechten Coordinaten, wenn die Puncte, von welchen sie ausgehen, auf entgegengesetzten Seiten dieser Ebene liegen, mit entgegengesetzten Zeichen belegen. So lange man innerhalb einer bestimmten der von den coordinirten Ebenen gebildeten Ecken verweilt, trifft man bloß auf Puncte, die hinsichtlich jeder coordinirten Ebene auf derselben Seite sich befinden; deren gleichnamige, das ist auf einerlei Ebene senkrechte Coordinaten demnach übereinstimmende Zeichen besitzen: sobald man aber die genannte Ecke verläßt, ändert wenigstens eine Coordinate ihr Zeichen. Da nun die Zeichen + und — auf drei Coordinaten bezogen, acht Gruppen, nämlich

$$\begin{matrix} + & + & + \\ + & + & - \\ + & - & + \\ + & - & - \\ - & + & + \\ - & + & - \\ - & - & + \\ - & - & - \end{matrix}$$

darbieten, so sind, wenn man die Coordinaten der innerhalb einer Ecke liegenden Puncte positiv annimmt, die zu den übrigen Ecken gehörenden Puncte hinreichend charakterisirt.

Je zwei coordinirte Ebenen schneiden sich in einer geraden Linie, welche auf der dritten Ebene senkrecht steht, folglich den dieser letzteren Ebene zugehörigen Coordinaten parallel ist. Die drei Durchschnittslinien der coordinirten Ebenen heißen die Axen der Coordinaten. Sie sind gleichfalls wechselweise aufeinander senkrecht. Man braucht nur

die nach der Gegend der positiven Coordinaten gerichteten Theile dieser Axen anzugeben, um die Ecke, welche die mit positiven Coordinaten versehenen Puncte enthält, zu bezeichnen, denn die erwähnten Theile der Axen sind die Seitenkanten dieser Ecke. Zur Bildung der übrigen Ecken ist es nothwendig von einer oder mehreren Axen die nach der entgegengesetzten Gegend gerichteten Theile zu nehmen, und die diesen parallele Coordinaten sind negativ, welche Bemerkung die Bestimmung der Zeichen der Coordinaten ungemein erleichtert.

Wenn von einem Puncte die Rede ist, so wollen wir ihn stets bloß dadurch bemerklich machen, daß wir seine Coordinaten nennen. Hiezu ist aber erforderlich, daß wir jedesmal unter den Axen der Coordinaten, wenigstens stillschweigend, eine gewisse Ordnung festsetzen, und die Coordinaten genau in der Folge anführen, in welcher sie den so betrachteten Axen parallel sind. Man pflegt die Coordinaten eines Punctes, zumal, wenn derselbe seiner Lage nach als veränderlich angesehen wird, fast ausschließend mit den Buchstaben x, y, z zu bezeichnen; daher erhalten auch die Axen, welchen diese Coordinaten parallel laufen, die Namen: Axen der x, der y, der z, so wie die Ebenen, auf welchen diese Coordinaten senkrecht stehen, die Ebenen yz, xz, xy heißen.

Befindet sich ein Punct in der Ebene yz selbst, so ist seine der Axe der x parallele Coordinate $= 0$. Liegt der Punct in der Axe der z, also in den Ebenen yz und xz zugleich, so sind die den Axen der x und y parallelen Coordinaten $= 0$. Ein Gleiches gilt für Puncte, die in den übrigen coordinirten Ebenen oder Axen enthalten sind. Für den Anfangspunct selbst verschwinden alle drei Coordinaten.

In dem Polarcoordinatensysteme wird die Position eines Punctes auf eine fixe Ebene (die Basis), auf eine in derselben gezogene fixe Gerade (die Axe), und auf einen in letzterer angenommenen fixen Punct (den Pol) bezogen, und dadurch bestimmt, daß man die Entfernung des in der Frage stehenden Punctes vom Pole, d. h. die Länge der vom Pole zu diesem Puncte gezogenen Geraden (den Radiusvector), ferner die Neigung des Radiusvectors gegen die Axe, und endlich die Neigung der Ebene, in welcher der Radiusvector und die Axe liegen, gegen die Basis, mit Rücksicht auf die Zeichen dieser Größen, angibt. Man kann, wie man leicht sieht, sämmtliche Coordinaten auch als positive Größen betrachten, wenn man nur in bestimmten

Richtungen dem einen der beiden Winkel aller Werthe von o bis π, und den anderen aller Werthe von o bis 2π fähig seyn läßt.

Wir wollen nun das Polarcoordinatensystem mit einem rechtwinkligen vergleichen, dessen Anfangspunct mit dem Pole, dessen Axe der x mit der Polaraxe, und dessen Ebene xy mit der Basis übereinstimmt.

Es sey (Fig. 1) O der Anfangspunct, und Ox, Oy, Oz seyen die Axen des rechtwinkligen Systems; ferner M ein Punct, dessen Coordinaten durch x, y, z vorgestellt werden, und von welchem auf die Ebene xy das Perpendikel MP ausgeht, so ist $MP = z$. Da MP mit den Ebenen xOz und yOz parallel läuft, so ist jeder Punct dieser Geraden, also auch P, eben so weit von den genannten Ebenen entfernt, als M; zieht man demnach PQ auf Ox senkrecht, so ist $PQ = y$ und $OQ = x$. Da sich die Ebenen MPQ und xOy in der Geraden PQ senkrecht durchschneiden, und OQ in der letzteren Ebene auf PQ senkrecht erscheint, so steht OQ auf der Ebene MPQ senkrecht, und daher bildet die Gerade MQ mit OQ einen rechten Winkel. Es ist also MQP der Neigungswinkel der Ebene MOQ gegen die Ebene xOy. Dieß vorausgesetzt, sey für das Polarcoordinatensystem, dessen Pol in O, dessen Axe Ox, und dessen Basis die Ebene xOy ist, der Radiusvector $OM = r$, der Winkel $MOQ = \alpha$, und der Winkel $MQP = \lambda$.

Das rechtwinklige Dreieck MOQ gibt uns $OQ = OM \cos.\alpha$ und $MQ = OM \sin.\alpha$; ferner das Dreieck MPQ, $PQ = MQ \cos.\lambda$ und $MP = MQ \sin.\lambda$. Wir erhalten hiedurch

$$(1)\quad x = r \cos.\alpha,\quad y = r \sin.\alpha \cos.\lambda,\quad z = r \sin.\alpha \sin.\lambda.$$

Diese Gleichungen dienen dazu, rechtwinklige Coordinaten durch Polarcoordinaten auszudrücken.

Aus den Gleichungen (1) folgt

$$(2)\quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\quad \cos.\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\quad tg.\lambda = \frac{z}{y},$$

wodurch man sich im Stande befindet, rechtwinkelige Coordinaten in Polarcoordinaten zu übersetzen.

Nennen wir die Winkel MOy und MOz, β und γ, so haben wir aus demselben Grunde, aus welchem $x = r \cos.\alpha$ ist, die Gleichungen $y = r \cos.\beta$ und $z = r \cos.\gamma$; folglich, wenn wir diese Resultate in die erste der Gleichungen (2) einführen:

$$(3)\qquad \cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = 1.$$

Eines der wirksamsten Hülfsmittel bei der Anwendung der Analysis auf die Geometrie besteht in der Umtauschung des vorhandenen Coordinatensystems gegen ein anderes, den Zwecken der vorzunehmenden Untersuchung mehr entsprechendes. Wir werden hier unser Augenmerk nur noch auf die Transformation eines rechtwinkligen Coordinatensystems in ein anderes gleichfalls rechtwinkliges richten.

Es sey (Fig. 2) der Anfangspunct eines rechtwinkligen Coordinatensystems von O nach O′ zu verlegen, so jedoch, daß die neuen Axen der Coordinaten O′x′, O′y′, O′z′ den früheren Ox, Oy, Oz parallel bleiben, so ist, wenn x, y, z die Coordinaten eines Punctes M im vorigen, und x′, y′, z′ die Coordinaten desselben Punctes im neuen Systeme; ferner ξ, v, ζ die Coordinaten des Anfangspunctes O′ in Bezug auf das vorige System andeuten:

(4) $$x = x' + \xi, \quad y = y' + v, \quad z = z' + \zeta.$$

Denn ist MP senkrecht auf die Ebene xOy, und trifft dieses Perpendikel die Ebene x′Oy′ in P′, so haben wir MP = z, MP′ = z′, also

$$z = z' + P'P.$$

Es ist aber P′P dem aus O′ auf die Ebene xOy gezogenen Perpendikel O′H = ζ gleich, daher besteht die Gleichung $z = z' + \zeta$. Eben so werden auch die beiden anderen Gleichungen gerechtfertiget.

Denken wir uns nun, der Anfangspunct O (Fig. 3) wie auch die Axe der z werde ungeändert beibehalten, und nur die Lage der Axen der x und y in der Ebene xy verrückt, welche von Ox und Oy nach Ox′ und Oy′ kommen mögen, so bleibt auch die auf die Ebene xy senkrechte Ordinate jedes Punctes M, z. B. MP = z, dieselbe, und nur die beiden übrigen Coordinaten dieses Punctes erhalten andere Werthe. Aber die den Axen Ox, Oy, wie auch die den Axen Ox′ und Oy′ parallelen Coordinaten des Punctes M stimmen offenbar mit den gleichnamigen Coordinaten des Punctes P überein; wir haben demnach, wenn wir den Radiusvector dieses letzteren, nämlich OP = ρ, und die Winkel POx = α, POx′ = α', xOx′ = ψ setzen:

$$x = \rho \cos.\alpha, \quad y = \rho \cos.\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \rho \sin.\alpha,$$

$$x' = \rho \cos.\alpha', \quad y' = \rho \sin.\alpha'.$$

Aber es ist $\alpha = \alpha' + \psi$, folglich

$$\cos.\alpha = \cos.\alpha' . \cos.\psi - \sin.\alpha' . \sin.\psi,$$

$$\sin.\alpha = \cos.\alpha' . \sin.\psi + \sin.\alpha' . \cos.\psi;$$

und wenn man diese Gleichungen mit ρ multiplicirt, und die obigen Ausdrücke für x, y, x', y' beachtet:

(5) $x = x' \cos.\psi - y' \sin.\psi$, $y = x' \sin.\psi + y' \cos.\psi$.

Wir haben hier Ox' zwischen Ox und Oy liegend angenommen; läge Ox' außerhalb des Winkels xOy, so würde $\alpha = \alpha' - \psi$, und deßhalb müßte das Zeichen von ψ in (5) geändert werden.

Lassen wir jetzt, mit Beibehaltung des Anfangspunctes O, das rechtwinkelige System, dessen Axen Ox, Oy, Oz sind (Fig. 4), in ein anderes, gleichfalls rechtwinkeliges, mit den Axen Ox', Oy', Oz' versehenes sich verwandeln. Die Position des neuen Systems gegen das vorige ist, wie man leicht sieht, gegeben, wenn man die Lage der Geraden OH, in welcher sich die Ebenen xy und x'y' durchschneiden, gegen die Axe der x, ferner die Neigung der Ebene x'y' gegen die Ebene xy, und endlich die Lage der Axe der x' gegen die Durchschnittslinie OH kennt.

Es sey der Winkel HOx $= \psi$, HOx' $= \varphi$, und der Neigungswinkel der Ebenen xy und x'y', welcher dem Winkel der auf diese Ebenen senkrechten Axen der z und z' gleich kommt, $= \theta$.

Um die Coordinaten x, y, z eines Punctes M im vorigen Systeme durch die Coordinaten desselben x', y', z' im neuen Systeme darzustellen, wollen wir die Transformation der ersteren in letztere stufenweise vornehmen.

Da die OH in der Ebene xy liegt, also Oz auf OH senkrecht steht, so können Oz und OH zwei Axen eines neuen rechtwinkligen Systemes werden, dessen dritte Axe OK nothwendig in die Ebene xy fallen wird, da alle Geraden, welche die Oz im Puncte O unter einem rechten Winkel treffen, in einer und derselben Ebene enthalten seyn müssen. Man bezeichne die den Axen OH, OK, Oz parallelen Coordinaten des Punctes M durch x'', y'', z'', so bestehen, dem oben Gesagten gemäß, offenbar die Gleichungen

(6) $z = z''$, $x = x'' \cos.\psi - y'' \sin.\psi$, $y = x'' \sin.\psi + y'' \cos.\psi$.

Die OH liegt aber auch in der Ebene x'y', weßwegen Oz' auf ihr senkrecht steht; man kann daher OH und Oz' für die Axen eines rechtwinkligen Systemes wählen, dessen dritte Axe OL nothwendig mit Oz, Oz', OK in einerlei Ebene enthalten ist, da die letzteren vier Geraden sämmtlich auf OH perpendikulär sind. Nennen wir nun die den Axen OH, OL, Oz' parallelen Coordinaten des Punctes

M, x''', y''', z''', so haben wir zur Transformation der Coordinaten x'', y'', z'' in die letztgenannten die Gleichungen

(7) $x'' = x'''$, $y'' = z''' \sin.\theta + y''' \cos.\theta$, $z'' = z''' \cos.\theta - y''' \sin.\theta$.

Man transformire endlich mit Beibehaltung der Axe Oz' die den Axen OH und OL parallelen Coordinaten in die auf Ox' und Oy' sich beziehenden, so ergeben sich die Gleichungen

(8) $z''' = z'$, $x''' = x' \cos.\varphi + y' \sin.\varphi$, $y''' = - x' \sin.\varphi + y' \cos.\varphi$.

Schafft man durch Verbindung der Gleichungen (6), (7), (8) x'', y'', z'' und x''', y''', z''' weg, so gelangt man zu den geforderten Formeln, nämlich

(9)
$$x = (\cos.\varphi \cos.\psi + \sin.\varphi \sin.\psi \cos.\theta)\, x' + (\sin.\varphi \cos.\psi - \cos.\varphi \sin.\psi \cos.\theta)\, y' - \sin.\psi \sin.\theta \,.\, z',$$
$$y = (\cos.\varphi \sin.\psi - \sin.\varphi \cos.\psi \cos.\theta)\, x' + (\sin.\varphi \sin.\psi + \cos.\varphi \cos.\psi \cos.\theta)\, y' + \cos.\psi \sin.\theta \,.\, z',$$
$$z = \sin.\varphi \sin.\theta \,.\, x' - \cos.\varphi \sin.\theta \,.\, y' + \cos.\theta \,.\, z'.$$

Soll sowohl der Anfangspunct als auch die Lage der Axen eines rechtwinkligen Systems geändert werden, so gehe man zuerst mittelst der Formeln (4) auf den neuen Anfangspunct, und sodann mittelst der Formeln (9) auf die neuen Axen der Coordinaten über.

Zweite Vorlesung.

Über einige Folgerungen aus den Formeln der vorhergehenden Vorlesung.

Die in der vorhergehenden Vorlesung für die Transformation eines rechtwinkligen Coordinatensystems in ein anderes, mit Beibehaltung des Anfangspunctes, abgeleiteten Formeln bieten uns Gelegenheit dar, zu den Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie, wie auch zu anderen interessanten Resultaten auf eine leichte Art zu gelangen, was wir in gegenwärtiger Vorlesung zeigen wollen.

Wenden wir die erwähnten Formeln auf einen in der Axe Ox' (Fig. 4) selbst liegenden Punct an, so finden wir, weil für einen solchen Punct y' und z' verschwinden:

$$x = (\cos.\varphi \cos.\psi + \sin.\varphi \sin.\psi \cos.\theta)\, x',$$
$$y = (\cos.\varphi \sin.\psi - \sin.\varphi \cos.\psi \cos.\theta)\, x',$$
$$z = \sin.\varphi \sin.\theta \,.\, x'.$$

Aber x' ist zugleich der Radiusvector des hier betrachteten Punctes; setzen wir also den Winkel $xOx' = \alpha$ und den Neigungswinkel der Ebenen xOx' und $xOy = \lambda$, so haben wir den Formeln (1) zufolge

$$x = x' . \cos.\alpha, \quad y = x' . \sin.\alpha \cos.\lambda, \quad z = x' . \sin.\alpha \sin.\lambda,$$

und deßhalb ist

$$(10) \qquad \begin{aligned} \cos.\alpha &= \cos.\varphi \cos.\psi + \sin.\varphi \sin.\psi \cos.\theta \\ \sin.\alpha \cos.\lambda &= \cos.\varphi \sin.\psi - \sin.\varphi \cos.\psi \cos.\theta \\ \sin.\alpha \sin.\lambda &= \sin.\varphi \sin.\theta. \end{aligned}$$

Da die Geraden Ox, Ox', OH jeder Lage fähig sind, so passen diese Gleichungen auf jede durch das Zusammentreffen dreier Ebenen gebildeten Ecke, und drücken die Relationen aus, in welchen die Winkel der Seitenkanten dieser Ecke zu den Neigungswinkeln ihrer Seitenflächen stehen. Diese Relationen sind mit jenen einerlei, welche zwischen den Seiten und den Winkeln eines sphärischen Dreieckes Statt finden. Denken wir uns nämlich (Fig. 5) aus dem Mittelpuncte O mit dem Halbmesser 1 eine Kugel beschrieben, welche den Geraden OH, Ox, Ox' in den Puncten A, B, C, und den Ebenen xOH, x'OH,

xOx' in den zu größten Kreisen gehörenden Bogen AB, AC, BC begegne, so erhalten wir ein sphärisches Dreieck ABC, dessen Seiten AB, AC, BC durch dieselben Zahlen vorzustellen sind, welche die Winkel xOH, $x'OH$, xOx' bezeichnen, und dessen Winkel A, B, C, d. h. die Neigungen der in diesen Puncten zusammenstoßenden Bogen, den Neigungswinkeln der in den Geraden OH, Ox, Ox' sich schneidenden Ebenen gleich kommen, da man sich unter dem Winkel zweier Bogen wohl nichts anderes, als den Winkel ihrer zu dem Durchschnittspuncte gehöriger Tangenten vorstellen kann. Bezeichnen wir der leichteren Übersicht wegen, die den Winkeln A, B, C gegenüber liegenden Seiten des sphärischen Dreieckes ABC durch α, β, γ, so sind in den Gleichungen (10) die Buchstaben φ, ψ, θ, λ mit β, γ, A, B zu verwechseln.

Es bestehen demnach die Gleichungen

(11) $\cos.\alpha = \cos.\beta \cos.\gamma + \sin.\beta \sin.\gamma \cos.A.$

(12) $\sin.\alpha \cos.B = \cos.\beta \sin.\gamma - \sin.\beta \cos.\gamma \cos.A.$

(13) $\sin.\alpha \sin.B = \sin.\beta \sin.A.$

Die letzte derselben, welcher man auch die Form

$$\frac{\sin.\alpha}{\sin.A} = \frac{\sin.\beta}{\sin.B}$$

geben kann, drückt den Satz aus, daß sich in einem sphärischen Dreiecke die Sinusse der Seiten wie die Sinusse der denselben gegenüber liegenden Winkel verhalten.

Das Problem, dessen Auflösung die sphärische Trigonometrie zum Gegenstande hat, besteht darin, aus dreien der sechs Stücke eines sphärischen Dreieckes die übrigen zu berechnen. Hiezu werden, wie man leicht sieht, bloß vier Fundamentalgleichungen erfordert, indem es nämlich, um alle hiebei vorkommenden Fragen beantworten zu können, hinreicht, 1) die drei Seiten und einen Winkel, 2) zwei Seiten und die zwei einer derselben anliegenden Winkel, 3) zwei Seiten und ihre Gegenwinkel, 4) eine Seite und die drei Winkel in eine Gleichung zusammen zu stellen.

Der ersten Anforderung genügt die Gleichung

$$\cos.\alpha = \cos.\beta \cos.\gamma + \sin.\beta \sin.\gamma \cos.A.$$

Um der zweiten zu entsprechen, schaffen wir aus (12) und (13) $\sin.\alpha$ weg, so ergibt sich

(14) $\sin.A \cot.B = \cot.\beta \sin.\gamma - \cos.\gamma \cos.A.$

Die dritte Forderung wird durch die Gleichung

$$\sin.\alpha \sin.B = \sin.\beta \sin.A$$

realisirt. Es fehlt uns also noch die Gleichung zwischen einer Seite und den drei Winkeln des sphärischen Dreieckes. Um zu dieser zu gelangen, verwechseln wir in (12) B mit C, folglich auch β mit γ, und multipliciren eben dieselbe Gleichung (12) mit $\cos.A$, so erhalten wir die zwei Gleichungen

$$\sin.\alpha \cos.C = \cos.\gamma \sin.\beta - \sin.\gamma \cos.\beta \cos.A,$$
$$\sin.\alpha \cos.A \cos.B = \cos.\beta \sin.\gamma \cos.A - \sin.\beta \cos.\gamma \cos.A^2,$$

durch deren Addition sich

$$\sin.\alpha (\cos.C + \cos.A \cos.B) = \sin.\beta \cos.\gamma . \sin.A^2$$

ergibt. Eliminiren wir aus derselben $\sin.\alpha$ mittelst (13), so wird

(15) $$\cos.C + \cos.A \cos.B = \cos.\gamma . \sin.A \sin.B,$$

welches die verlangte Gleichung ist. Verwechseln wir in derselben C mit A, und geben wir ihr sodann die Gestalt

$$-\cos.A = \cos.B \cos.C - \sin.B \sin.C \cos.\alpha,$$

so sehen wir, daß sie aus der Gleichung

$$\cos.\alpha = \cos.\beta \cos.\gamma + \sin.\beta \sin \gamma \cos.A$$

abgeleitet werden kann, wenn man α, β, γ, A mit $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - \alpha$ vertauscht. Es läßt sich also zu jedem sphärischen Dreiecke ein anderes, das sogenannte Polardreieck, finden, dessen Seiten mit den Winkeln des ersteren, und dessen Winkel mit den Seiten des ersteren stückweise zusammengenommen π geben; ein Satz, der auch unmittelbar durch Betrachtung der Figur gerechtfertiget, und zur schnellen Umstaltung der in der sphärischen Trigonometrie vorkommenden Formeln gebraucht werden kann.

Es ist nicht überflüssig zu bemerken, daß die erste der hier aufgestellten Fundamentalgleichungen die drei folgenden in sich enthält. Denn die genannte Formel gibt uns

$$\cos.A = \frac{\cos.\alpha - \cos.\beta \cos.\gamma}{\sin.\beta \sin.\gamma},$$

folglich $\sin.A = \sqrt{1 - \cos.A^2}$

$$= \frac{\sqrt{\sin.\beta^2 \sin.\gamma^2 - \cos.\alpha^2 - \cos.\beta^2 \cos.\gamma^2 + 2 \cos.\alpha \cos.\beta \cos.\gamma}}{\sin.\beta \sin.\gamma};$$

oder wegen $\sin.\beta^2 = 1 - \cos.\beta^2$, $\sin.\gamma^2 = 1 - \cos.\gamma^2$;

(16) $\sin. A = \frac{\sqrt{1 - \cos. \alpha^2 - \cos. \beta^2 - \cos. \gamma^2 + 2 \cos. \alpha \cos. \beta \cos. \gamma}}{\sin. \beta \sin. \gamma}$,

also $\frac{\sin. \alpha}{\sin. A} = \frac{\sin. \alpha \sin. \beta \sin. \gamma}{\sqrt{1 - \cos. \alpha^2 - \cos. \beta^2 - \cos. \gamma^2 + 2 \cos. \alpha \cos. \beta \cos. \gamma}}$.

Vertauscht man in dieser Gleichung α mit β, folglich auch A mit B, so bleibt der Ausdruck rechter Hand des Gleichheitszeichens ungeändert; wir haben also

$$\frac{\sin. \alpha}{\sin. A} = \frac{\sin. \beta}{\sin. B},$$

welches die dritte Fundamentalgleichung ist.

Aus der Gleichung $\cos. \alpha = \cos. \beta \cos. \gamma + \sin. \beta \sin. \gamma \cos. A$ folgt ferner durch Vertauschung von α mit β, und von A mit B:

$$\cos. \beta = \cos. \alpha \cos. \gamma + \sin. \alpha \sin. \gamma \cos. B;$$

oder, wenn man hieraus $\cos. \alpha$ mittelst der ersten Gleichung wegbringt:

$\cos. \beta = \cos. \beta \cos. \gamma^2 + \sin. \beta \sin. \gamma \cos. \gamma \cos. A + \sin. \alpha \sin. \gamma \cos. B$,

das heißt $\cos. \beta \sin. \gamma^2 = \sin. \beta \sin. \gamma \cos. \gamma \cos. A + \sin. \alpha \sin. \gamma \cos. B$,

also $\sin. \alpha \cos. B = \cos. \beta \sin. \gamma - \sin. \beta \cos. \gamma \cos. A$,

welche Gleichung mit (12) übereinstimmt, und auf dem oben betretenen Wege die zweite und vierte Fundamentalgleichung darbietet.

Läßt man in den vier Fundamentalgleichungen A einen rechten Winkel bedeuten, so findet man für ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, dessen Hypothenuse α ist, die Formeln

(17) $\cos. \alpha = \cos. \beta \cos. \gamma$.

(18) $\cot. B = \cot. \beta \sin. \gamma$.

(19) $\sin. \beta = \sin. \alpha \sin. B$.

(20) $\cos. C = \cos. \gamma \sin. B$.

Macht man aber in der zweiten Formel, nachdem man A mit B, und in der vierten, nachdem man A mit C vertauscht hat, obige Voraussetzung, so folgt

(21) $\cot. \alpha = \cot. \gamma \cos. B$.

(22) $\cos. \alpha = \cot. B \cot. C$.

Mittelst dieser sechs Gleichungen lassen sich alle bei der Auflösung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke vorkommende Fälle behandeln. Sie besitzen den Vorzug, daß sie sich zur Rechnung mit Logarithmen eignen, was bei dreien der allgemeinen Gleichungen, aus welchen sie entstanden sind, der Fall nicht ist. Man pflegt deßhalb in der Ausübung

die Berechnung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke, indem man aus dem Scheitel eines Winkels auf die Gegenseite einen senkrechten Bogen fällt, auf jene der rechtwinkligen zu reduciren. Indessen geht es in einigen Fällen an, auch den Fundamentalgleichungen eine für die practische Rechnung tauglichere Gestalt zu verschaffen.

So hat man z. B. zur Berechnung eines Winkels aus den drei Seiten eines sphärischen Dreieckes die zur Anwendung der Logarithmen nicht taugliche Formel

$$\cos. A = \frac{\cos. \alpha - \cos. \beta \cos. \gamma}{\sin. \beta \sin. \gamma}.$$

Allein bedenkt man, daß

$$1 + \cos. A = \frac{\sin.\beta \sin.\gamma + \cos.\alpha - \cos.\beta \cos.\gamma}{\sin. \beta \sin. \gamma} = \frac{\cos. \alpha - \cos. (\beta + \gamma)}{\sin. \beta \sin. \gamma}$$

$$= \frac{2 \sin. \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma) . \sin. \tfrac{1}{2} (\beta + \gamma - \alpha)}{\sin. \beta \sin. \gamma},$$

$$1 - \cos. A = \frac{\sin.\beta \sin.\gamma - \cos.\alpha + \cos.\beta \cos.\gamma}{\sin. \beta \sin. \gamma} = \frac{\cos. (\beta - \gamma) - \cos. \alpha}{\sin. \beta \sin. \gamma}$$

$$= \frac{2 \sin. \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma) . \sin. \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta + \gamma)}{\sin. \beta \sin. \gamma},$$

und $\sqrt{\frac{1 + \cos. A}{2}} = \cos. \frac{A}{2}$, $\sqrt{\frac{1 - \cos. A}{2}} = \sin. \frac{A}{2}$ ist, so erhält man

$$(23) \qquad \cos. \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin. \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma) . \sin. \tfrac{1}{2} (\beta + \gamma - \alpha)}{\sin. \beta \sin. \gamma}},$$

$$(24) \qquad \sin. \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin. \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma) . \sin. \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta + \gamma)}{\sin. \beta \sin. \gamma}}.$$

Hieraus folgt auch

$$(25) \qquad tg. \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin. \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma) . \sin. \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta + \gamma)}{\sin. \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma) . \sin. \tfrac{1}{2} (\beta + \gamma - \alpha)}},$$

$$(26) \qquad \sin. A =$$

$$= \frac{2 \sqrt{\sin. \tfrac{1}{2} (\alpha+\beta+\gamma) . \sin. \tfrac{1}{2} (\alpha+\beta-\gamma) . \sin. \tfrac{1}{2} (\alpha-\beta+\gamma) . \sin. \tfrac{1}{2} (\beta+\gamma-\alpha)}}{\sin. \beta \sin. \gamma}$$

welche letztere Formel sich auch aus (16) ableiten ließe.

Diese vier Formeln gestatten die Anwendung der Logarithmen. Vertauscht man α, β, γ, A mit $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - \alpha$, so hat man sogleich

$$(27) \qquad \sin. \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{- \cos. \tfrac{1}{2} (A + B + C) . \cos. \tfrac{1}{2} (B + C - A)}{\sin. B \sin. C}},$$

(28) $\cos.\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\,.\,\cos.\frac{1}{2}(A-B+C)}{\sin.B\,\sin.C}}$,

(29) $tg.\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\,.\,\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\,.\,\cos.\frac{1}{2}(A-B+C)}}$,

(30) $\sin.a =$

$$\frac{2\sqrt{-\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\,.\,\cos.\frac{1}{2}(A+B-C).\cos.\frac{1}{2}(A-B+C).\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}}{\sin.B\,\sin.C}$$

Diese Formeln geben eine Seite des sphärischen Dreieckes, dessen Winkel bekannt sind, bloß durch Rechnungsoperationen, welche sich mittelst der Logarithmen abkürzen lassen.

Da, wenn man in (23) und (24) A mit B verwechselt,

$$\cos.\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\,.\,\sin.\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)}{\sin.\alpha\,\sin.\gamma}},$$

$$\sin.\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\,.\,\sin.\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin.\alpha\,\sin.\gamma}}$$

gefunden wird, so ergibt sich

$$\cos.\frac{A}{2}\,.\,\cos.\frac{B}{2} = \frac{\sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin.\gamma}\sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\,.\,\sin.\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin.\alpha\,\sin.\beta}}$$

$$= \frac{\sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin.\gamma}\,.\,\sin.\frac{1}{2}C,$$

$$\sin.\frac{A}{2}\,.\,\sin.\frac{B}{2} = \frac{\sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin.\gamma}\sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\,.\,\sin.\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin.\alpha\,\sin.\beta}}$$

$$= \frac{\sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin.\gamma}\,.\,\sin.\frac{1}{2}C,$$

und hieraus

$$\cos.\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)-\sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin.\gamma}\,.\,\sin.\frac{1}{2}C$$

$$= \frac{2\cos.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,\sin.\frac{1}{2}\gamma}{\sin.\gamma}\,.\,\sin.\frac{1}{2}C;$$

oder wegen $\sin.\gamma = 2\sin.\frac{1}{2}\gamma\,.\,\cos.\frac{1}{2}\gamma$:

(31) $\cos.\frac{1}{2}(A+B)\,.\,\cos.\frac{1}{2}\gamma = \cos.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,\sin.\frac{1}{2}C.$

Auf dieselbe Art gelangt man zu den Formeln

(32) $\cos.\frac{1}{2}(A-B)\,.\,\sin.\frac{1}{2}\gamma = \sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,\sin.\frac{1}{2}C,$

(33) $\sin.\frac{1}{2}(A+B)\,.\,\cos.\frac{1}{2}\gamma = \cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,.\,\cos.\frac{1}{2}C,$

(34) $\sin.\frac{1}{2}(A-B)\,.\,\sin.\frac{1}{2}\gamma = \sin.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,.\,\cos.\frac{1}{2}C.$

Aus (33) und (31), ferner aus (34) und (32) erhält man

$$(35)\qquad tg.\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cdot cot.\tfrac{1}{2}C,$$

$$tg.\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{sin.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cdot cot.\tfrac{1}{2}C;$$

aus (32) und (31), wie auch aus (34) und (33) hingegen

$$(36)\qquad tg.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{cos.\tfrac{1}{2}(A-B)}{cos.\tfrac{1}{2}(A+B)}\cdot tg.\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$tg.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{sin.\tfrac{1}{2}(A-B)}{sin.\tfrac{1}{2}(A+B)}\cdot tg.\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Die vier ersteren Gleichungen rühren von Gauß her; die vier letzteren aber wurden bereits von Neper gefunden, und sind unter dem Namen der Neper'schen Analogien längst bekannt. Dieselben dienen, wie man sieht, dazu, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines sphärischen Dreieckes die beiden übrigen Winkel, und aus zwei Winkeln und der dazwischen liegenden Seite die übrigen Seiten mit Hülfe der Logarithmen zu berechnen.

Der Zweck unserer Vorlesungen gestattet nicht, uns hier in die Entwickelung noch anderer Formeln und Hülfsmittel zur Auflösung der sphärischen Dreiecke einzulassen. Wir bemerken nur, daß, so wie drei sich wie immer schneidende Ebenen acht um den Durchschnittspunct herum liegende Ecken erzeugen, auch durch das Durchschneiden dreier größter Kreise auf der Oberfläche der Kugel acht sphärische Dreiecke gebildet werden, und deßhalb, wenn die gegebenen Stücke das zu berechnende nicht hinreichend bestimmen, zwei Dreiecke den Forderungen der Aufgabe genügen. Dieser Umstand wird immer durch die Unbestimmtheit des einem berechneten Sinus gehörenden Bogens angedeutet; denn da, wie man leicht beweisen kann, der numerische Werth keines der Stücke eines sphärischen Dreieckes, wenigstens in dem Sinne, in welchem wir ein solches Dreieck nehmen, die Zahl π erreicht, so ist nur bei der Ausmittelung des auf diese Function sich beziehenden Bogens eine Zweideutigkeit möglich. Aber ein Stück, welches durch seinen Sinus angegeben wird, ist deßhalb nicht immer nothwendig ungewiß. Man kann nämlich manchmal über seine Beschaffenheit durch Bestimmung des Zeichens einer anderen Function, oder durch Vergleichung desselben mit den bekannten Stücken des sphärischen Dreieckes entscheiden, wobei die Bemerkung, daß der größeren Seite der größere

Winkel und umgekehrt gegenüberliegt, nützliche Dienste leistet. Wer eine vollständige Aufzählung aller hiebei möglichen Fälle verlangt, der ziehe ein der sphärischen Trigonometrie eigens gewidmetes Werk *) zu Rathe.

Nachstehende Eigenschaften der Formeln (9) verdienen hier noch eine Erwähnung.

Es seyen der Kürze wegen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 die Coefficienten von x', y', z' in denselben, so daß

(37) $$\begin{aligned} x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' \\ y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' \\ z &= a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' \end{aligned}$$

ist, wobei die Bedeutungen der genannten Coefficienten durch Vergleichung dieser Ausdrücke mit (9) von selbst in die Augen fallen; ferner seyen (Fig. 4)

α_1, α_2, α_3 die Winkel, welche Ox' mit den Axen der x, y, z
β_1, β_2, β_3 » » » Oy' » » » » x, y, z
γ_1, γ_2, γ_3 » » » Oz' » » » » x, y, z

einschließt, so zeigt sich, wie wir oben gesehen haben, durch die Betrachtung eines in der Axe der x' liegenden Punctes

$$a_1 = \cos.\alpha_1.$$

Auf dieselbe Art findet man

$$b_1 = \cos.\beta_1, \quad c_1 = \cos.\gamma_1,$$

und durch Betrachtung von Puncten der Geraden Oy', Oz'

$$a_2 = \cos.\alpha_2, \quad b_2 = \cos.\beta_2, \quad c_2 = \cos.\gamma_2,$$
$$a_3 = \cos.\alpha_3, \quad b_3 = \cos.\beta_3, \quad c_3 = \cos.\gamma_3,$$

also

(38) $$\begin{aligned} x &= x'\cos.\alpha_1 + y'\cos.\beta_1 + z'\cos.\gamma_1, \\ y &= x'\cos.\alpha_2 + y'\cos.\beta_2 + z'\cos.\gamma_2, \\ z &= x'\cos.\alpha_3 + y'\cos.\beta_3 + z'\cos.\gamma_3. \end{aligned}$$

Für einen Punct, dessen Abstand vom Anfangspuncte der Coordinaten $= r$ ist, haben wir sowohl

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{als auch} \quad r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

d. h. es besteht für jeden Werth von x', y', z' die Gleichung

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 =$$
$$= (a_1x' + b_1y' + c_1z')^2 + (a_2x' + b_2y' + c_2z')^2 + (a_3x' + b_3y' + c_3z')^2.$$

---

*) allenfalls Salomon's oder Burg's Handbuch der Trigonometrie.

Verrichtet man die im zweiten Theile dieser Gleichung angezeigten Rechnungen wirklich, und vergleicht man das Resultat mit dem ersten Theile, so zeigt sich

$$(39)\quad \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1. \end{aligned} \qquad (40)\quad \begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0, \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0, \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (37) der Reihe nach einmal mit a_1, a_2, a_3, dann mit b_1, b_2, b_3, und endlich mit c_1, c_2, c_3, so ergibt sich wegen (39) und (40)

$$(41)\quad \begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ y' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ z' &= c_1 x + c_2 y + c_3 z, \end{aligned}$$

und hieraus folgt wieder

$$(42)\quad \begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1. \end{aligned} \qquad (43)\quad \begin{aligned} a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0, \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 &= 0, \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die Richtigkeit der Gleichungen 39, 40, 42, 43 ließe sich auch unmittelbar durch die aus (9) sich ergebenden Werthe der Größen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, 2c. rechtfertigen. Die Gleichungen (39) und (42) stimmen mit (3) überein; (40) und (43) aber sind besondere Fälle einer allgemeinen Gleichung, welche wir sogleich ableiten werden.

Theilen wir die erste der Gleichungen (41) durch r, und bezeichnen wir den Winkel der Geraden r und Ox' durch ω, und die Winkel, welche r mit den Axen der x, y, z bildet, durch θ_1, θ_2, θ_3, so haben wir wegen $\frac{x'}{r} = \cos.\omega$ und $\frac{x}{r} = \cos.\theta_1$, $\frac{y}{r} = \cos.\theta_2$, $\frac{z}{r} = \cos.\theta_3$ die Gleichung

$$(44)\quad \cos.\omega = \cos.\alpha_1 \cos.\theta_1 + \cos.\alpha_2 \cos.\theta_2 + \cos.\alpha_3 \cos.\theta_3.$$

Die Geraden r und Ox' können jede zwei durch den Anfangspunct der Coordinaten gezogene Geraden vorstellen; es gibt also diese Formel den Winkel, welchen zwei solche Linien einschließen, durch ihre Neigungen gegen drei rechtwinklige Axen an.

Die Gleichungen (40) sind unter derselben begriffen, wenn man $\theta = \frac{\pi}{2}$ setzt; sie zeigen demnach bloß an, daß die Axen der x', y', z' wechselweise auf einander senkrecht stehen. Dasselbe sagen die Gleichungen (43) von den Axen der x, y, z.

Dritte Vorlesung.

Über die analytische Darstellung der Flächen und Linien im Allgemeinen, und über jene einer Kugel und einer Ebene insbesondere.

Denken wir uns im Raume eine Fläche oder eine Linie nach einem bestimmten Gesetze verzeichnet, und beziehen wir alle Puncte derselben auf ein gemeinschaftliches Coordinatensystem, so findet zwischen den Coordinaten jedes einzelnen Punctes eine von diesem Gesetze abhängende Relation Statt, deren analytischer Ausdruck die Fläche oder Linie selbst analytisch characterisirt.

Zu jedem Puncte des Raumes gehören drei Coordinaten; zwischen denselben eine Beziehung festsetzen, heißt eine derselben als eine Function der beiden übrigen erklären, welche letzteren dabei entweder von einander gänzlich unabhängig sind, oder selbst wieder in einem besonderen Zusammenhange stehen. Da die Wahl eines Punctes einer Fläche oder Linie immer nach Willkür vollzogen werden kann, so bleibt wenigstens eine der drei Coordinaten eine unbestimmte Größe, und deßhalb wird eine Fläche oder Linie entweder durch eine Gleichung, oder durch ein System zweier Gleichungen zwischen den drei Coordinaten jedes ihrer Puncte ausgedrückt. Aber man kann eine Linie immer als den Durchschnitt zweier Flächen, d. h. als die Folge der denselben gemeinschaftlichen Puncte betrachten, und somit durch ein System der Gleichungen zweier Flächen darstellen; es ist daher nicht möglich, daß einer Fläche mehr als eine Gleichung zwischen den drei Coordinaten jedes ihrer Puncte zukomme.

Nennen wir demnach die rechtwinkeligen Coordinaten eines unbestimmten Punctes einer Fläche x, y, z, so hat ihre Gleichung jederzeit die Form

$$F(x, y, z) = o, \tag{45}$$

wobei die Form der Function F durch das Bildungsgesetz der Fläche bedingt wird.

Um hievon Beispiele zu geben, wollen wir erstlich die Gleichung der Oberfläche einer Kugel aufsuchen, deren Halbmesser $= r$ ist.

Die Grundeigenschaft der Kugelfläche, welche wir also hier in

die Sprache der Analysis zu übersetzen haben, besteht darin, daß die Entfernung jedes Punctes derselben von dem Mittelpuncte einer unveränderlichen Größe, dem Halbmesser, gleich kommt.

Es seyen x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punctes der Kugelfläche, ξ, υ, ζ die Coordinaten des Mittelpunctes, so gehen die ersteren, wenn man den Anfangspunct, ohne die Richtung der Axen zu ändern, in den Mittelpunct der Kugel versetzt, in $x-\xi$, $y-\upsilon$, $z-\zeta$ über. Aber dann ist der Halbmesser r der Radiusvector des Punctes der Kugelfläche, folglich haben wir nach der ersten der Formeln (2)

$$(46) \qquad (x-\xi)^2 + (y-\upsilon)^2 + (z-\zeta)^2 = r^2$$

als die allgemeine Gleichung der Kugelfläche. Sie gibt für jedes x und y zwei Werthe für z, begreiflich, weil jede Gerade, folglich auch eine auf die Ebene xy senkrechte, die Kugelfläche in zwei Puncten trifft. Beide Puncte fallen in einen zusammen, wenn man x und y so wählt, daß diese Größen der Gleichung

$$(x-\xi)^2 + (y-\upsilon)^2 = r^2$$

Genüge leisten, denn dann erhält man aus der Gleichung (46)

$$(z-\zeta)^2 = 0 \quad \text{oder} \quad z=\zeta,$$

welcher Werth jedoch eine doppelte Wurzel dieser letztgenannten Gleichung darstellt. Wird $(x-\xi)^2 + (y-\upsilon)^2 > r^2$, so nimmt z zwei imaginäre Werthe an, woraus erhellet, daß die Kugelfläche nach allen der Ebene xy parallelen Richtungen eine begrenzte Ausdehnung hat.

Wenden wir uns nun zur analytischen Darstellung der einfachsten aller Flächen, nämlich der Ebenen, in Bezug auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem.

Legen wir, indem wir die Richtung der Axen der Coordinaten mit Beibehaltung des Anfangspunctes verändern, die Ebene $x'y'$ der gegebenen Ebene, deren Gleichung gesucht wird, parallel, so ist der Abstand jedes Punctes derselben von der Ebene $x'y'$, oder was dasselbe ist, der Werth von z', eine unveränderliche Größe, und zwar dem aus dem Anfangspuncte der Coordinaten auf die gegebene Ebene fallenden Perpendikel, welches p heißen mag, gleich; eine Eigenschaft, welche zur unzweideutigen Angabe der Natur der vorgelegten Ebene völlig hinreicht, und deßhalb der Gleichung derselben zum Grunde liegen kann. Vermöge den Gleichungen (41) der vorhergehenden Vorlesung haben wir im Allgemeinen

$$z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z;$$

daher ist, mit Rücksicht auf die Bedeutung von c_1, c_2, c_3,

(47) $$x \cos.\gamma_1 + y \cos.\gamma_2 + z \cos.\gamma_3 = p,$$

wobei γ_1, γ_2, γ_3 die Winkel anzeigen, welche das Perpendikel p mit den Axen der x, y, z, oder auch die Winkel, welche die gegebene Ebene mit den Ebenen yz, xz, xy bildet.

Jede Gleichung des ersten Grades zwischen drei Variablen x, y, z, z. B.

(48) $$Ax + By + Cz + D = o,$$

kann man als die Gleichung einer Ebene betrachten; denn die Werthe von γ_1, γ_2, γ_3 und p in (47) lassen sich immer so wählen, daß die Gleichungen (47) und (48) identisch werden. Man setze nur

$$A = M \cos.\gamma_1, \quad B = M \cos.\gamma_2, \quad C = M \cos.\gamma_3, \quad D = -Mp,$$

wobei M eine unbestimmte Größe ist, so hat man mit Rücksicht auf (3)

$$A^2 + B^2 + C^2 = M^2 (\cos.\gamma_1^2 + \cos.\gamma_2^2 + \cos.\gamma_3^2) = M^2,$$

also $M = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ und

(49) $$\cos.\gamma_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos.\gamma_2 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos.\gamma_3 = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \Bigg| \quad p = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Steht die Ebene (48) auf jener der xy senkrecht, so ist $\gamma_3 = \frac{\pi}{2}$, folglich $\cos.\gamma_3 = o$, und daher auch $C = o$. In diesem Falle hat also die Gleichung der Ebene die Form

$$Ax + By + D = o.$$

Ist hingegen die Ebene (48) zu jener der xy parallel, so ist

$$\cos.\gamma_3 = 1, \text{ also } C = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

das ist $A^2 + B^2 = o$, woraus $A = o$ und $B = o$ folgt. In diesem Falle reducirt sich die Gleichung der Ebene auf

$$Cz + D = o,$$

was schon daraus erhellet, daß hier z eine constante Größe seyn muß.

Die Gleichung der Ebene xy selbst ist $z = o$, so wie die Ebenen xz und yz durch die Gleichungen $y = o$ und $x = o$ ausgedrückt werden.

Es lassen sich auch die Coordinaten des Punctes angeben, in welchem das aus dem Anfangspunete auf die Ebene (48) gezogene Perpen-

dikel dieselbe trifft; da nämlich p der Radiusvector dieses Punctes ist, so haben wir für seine Coordinaten, welche t, u, v heißen sollen, die Ausdrücke

(50) $t = p\cos.\gamma_1, \quad u = p\cos.\gamma_2, \quad v = p\cos.\gamma_3$

oder

$$t = -\frac{AD}{A^2+B^2+C^2},\ u = -\frac{BD}{A^2+B^2+C^2},\ v = -\frac{CD}{A^2+B^2+C^2}.$$

Schaffen wir aus (47) mittelst der ersteren $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ weg, so ergibt sich folgende Gleichung der Ebene:

(51) $$tx + uy + vz = p^2.$$

Will man die Länge des Perpendikels P, welches aus irgend einem Puncte x_1, y_1, z_1 auf die Ebene (48) fällt, nebst den Coordinaten t, u, v seines Durchschnittspunctes mit derselben wissen, so verlege man den Anfangspunct der Coordinaten in den Punct x_1, y_1, z_1. Hiedurch erhält die Gleichung (48) die Form

$$A(x' + x_1) + B(y' + y_1) + C(z' + z_1) + D = o$$

oder $Ax' + By' + Cz' + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = o$,

worin x', y', z' die veränderlichen Coordinaten jedes Punctes der Ebene, x_1, y_1, z_1 aber gegebene Größen vorstellen. Um nun die Formeln (49), (50) auf die letztere Gleichung anzuwenden, muß der Ausdruck

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D,$$

welcher der Kürze wegen E genannt werde, an die Stelle von D treten, und man findet, wenn t', u', v' die Werthe von t, u, v im neuen Coordinatensysteme sind:

$$t' = -\frac{AE}{A^2+B^2+C^2},\ u' = -\frac{BE}{A^2+B^2+C^2},\ v' = -\frac{CE}{A^2+B^2+C^2};$$

d. h. wegen $t' = t - x_1,\ u' = u - y_1,\ v' = v - z_1$

(52) $$t = x_1 - \frac{AE}{A^2+B^2+C^2},\quad u = y_1 - \frac{BE}{A^2+B^2+C^2},\quad v = z_1 - \frac{CE}{A^2+B^2+C^2},$$

auch ist

$$P = -\frac{E}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Die Gleichung einer Ebene ist noch einiger anderer Formen fähig, welche wir hier angeben wollen.

Nennen wir die Entfernungen der Puncte, in welchen die Ebene

den Axen der x, y, z begegnet, vom Anfangspuncte der Coordinaten a, b, c, so haben wir, wenn wir in der Gleichung (47) zuerst y und z, dann x und z, und endlich y und z verschwinden lassen:

$$a = \frac{p}{cos. \gamma_1}, \quad b = \frac{p}{cos. \gamma_2}, \quad c = \frac{p}{cos\ \gamma_3};$$

folglich, wenn wir diese Größen in die Gleichung (47) einführen:

(53) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

oder $bcx + acy + abz = abc$

als Gleichung der Ebene.

Substituiren wir aber statt $cos. \gamma_1$, $cos. \gamma_2$, $cos. \gamma_3$ ihre aus den Formeln (9) sich ergebenden Werthe, so haben wir für die Ebene die Gleichung

(54) $$z = (x\, sin. \psi - y\, cos. \psi)\, tg. \theta + c,$$

wobei θ den Neigungswinkel der Ebene gegen jene der xy, ψ den Winkel zwischen der Durchschnittslinie der zwei jetzt genannten Ebenen und der Axe der x, und c das Stück der Axe der z zwischen dem Anfangspuncte der Coordinaten und der Ebene anzeigt.

Vergleichen wir nun zwei Ebenen mit einander, welche wir der Kürze halber die Ebenen 1 und 2 nennen wollen, und deren Gleichungen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

und $$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

seyn mögen. Werden auf beide aus dem Anfangspuncte der Coordinaten Perpendikel gezogen, wovon das zur Ebene 1 gehörende mit den Axen der x, y, z die Winkel γ_1, γ_2, γ_3, und das zur Ebene 2 gehörende mit eben denselben Axen die Winkel θ_1, θ_2, θ_3 bilde, so haben wir zur Bestimmung der Neigung beider Perpendikel, d. i. zur Bestimmung des Winkels der Ebenen selbst, welcher ω heiße, der Formel (44) gemäß den Ausdruck

$$cos. \omega = cos. \gamma_1\ cos. \theta_1 + cos. \gamma_2\ cos. \theta_2 + cos. \gamma_3\ cos. \theta_3;$$

derselbe verwandelt sich mittelst der Formeln (49) in

(55) $$cos. \omega = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Sollen die Ebenen 1 und 2 auf einander senkrecht stehen, so muß $cos. \omega = 0$ seyn, d. h. zwischen den Coefficienten der Coordinaten in den Gleichungen beider Ebenen muß die Bedingungsgleichung

(56) $$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

Statt finden.

Sollen hingegen die Ebenen 1 und 2 einander parallel seyn, so muß *cos.* ω der Einheit gleich kommen, also die Gleichung

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}$$

bestehen. Dieselbe geht durch Erhebung beider Theile zum Quadrate in die Gleichung

$$2 A_1 A_2 B_1 B_2 + 2 A_1 A_2 C_1 C_2 + 2 B_1 B_2 C_1 C_2 =$$
$$= A_1^2 B_2^2 + A_2^2 B_1^2 + A_1^2 C_2^2 + A_2^2 C_1^2 + B_1^2 C_2^2 + B_2^2 C_1^2$$

oder

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 + (A_1 C_2 - A_2 C_1)^2 + (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2 = 0$$

über, welche mit den drei Gleichungen

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$$
$$A_1 C_2 - A_2 C_1 = 0$$
$$B_1 C_2 - B_2 C_1 = 0$$

gleichbedeutend ist. Aber die dritte dieser Gleichungen ist eine Folge der beiden ersten, daher ist der Parallelismus der Ebenen 1 und 2 an die Erfüllung der Bedingungen

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_1 C_2 - A_2 C_1 = 0,$$

welche sich kurz auch unter der Form

(57) $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

darstellen lassen, gebunden.

Sucht man den Sinus und die Tangente des Winkels der Ebenen 1 und 2 aus (55), so findet man

(58) $$sin. \omega = \frac{\sqrt{(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 + (A_1 C_2 - A_2 C_1)^2 + (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

(59) $$tg. \omega = \frac{\sqrt{(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 + (A_1 C_2 - A_2 C_1)^2 + (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2}}{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}.$$

Einiger Sätze wegen, welche uns die Gleichung (47) einer Ebene darbietet, wollen wir hier noch die dazu nöthigen Vorbegriffe über die Projectionen vortragen, wovon sich auch in der Folge nützliche Anwendungen machen lassen werden.

Einen Punct auf eine gerade Linie oder auf eine Ebene projiciren, heißt in der analytischen Geometrie aus demselben auf diese

Linie oder Ebene ein Perpendikel fällen. Der Punct, in welchem das Perpendikel die gerade Linie oder Ebene trifft, wird die Projection des ersteren genannt. Man pflegt auch den Punct, von welchem das Perpendikel ausgeht, den projicirten Punct, und die Gerade oder Ebene, zu welcher es gezogen ist, die Projectionslinie oder Projectionsebene zu nennen.

Denkt man sich alle Puncte einer begrenzten geraden Linie auf die Richtung einer anderen Geraden oder auf eine Ebene projicirt, so stellt die Folge ihrer Projectionen ein bestimmtes Stück der Projectionslinie, oder eine in der Projectionsebene liegende, ebenfalls begrenzte gerade Linie, nämlich die sogenannte Projection der gegebenen Geraden, dar.

Die Coordinaten eines Punctes im rechtwinkligen System sind offenbar die Projectionen des zu diesem Puncte aus dem Anfangspuncte des Systems gezogenen Radiusvectors auf die den genannten Coordinaten parallelen Axen. Oder allgemeiner: die Unterschiede der gleichnamigen Coordinaten zweier Puncte im Raume sind die Projectionen der Entfernung dieser Puncte auf die diesen Coordinaten zugehörigen Axen.

Es läßt sich aus den einfachsten Gründen der Geometrie beweisen, daß die Projection einer Geraden auf eine andere durch das Product aus der Länge der ersteren und dem Cosinus des Winkels gemessen wird, welchen zwei durch irgend einen Punct zu diesen Geraden parallel gezogene Linien mit einander bilden. Der so ausgedrückte Satz umfaßt den Fall, wenn die projicirte Gerade und die Projectionslinie nicht in einer und derselben Ebene liegen, folglich sich auch nicht durchschneiden. Eben so ist die Projection einer Geraden auf eine Ebene dem Producte aus dieser Geraden und dem Cosinus ihres Neigungswinkels gegen die Ebene gleich. Es gibt also eine Gerade auf parallele Projectionslinien oder Projectionsebenen gleiche Projectionen.

Fassen wir nun die Gleichung der Ebene (47) mit Rücksicht auf den ersteren dieser Sätze in das Auge, so erkennen wir die Ebene als eine Fläche, für welche die Summe der Projectionen der drei rechtwinkligen Coordinaten jedes ihrer Puncte auf eine und dieselbe Gerade eine unveränderliche Größe ist. Diese Projectionslinie steht auf der Ebene senkrecht, und die erwähnte unveränderliche Größe ist der Abstand der Ebene vom Anfangspuncte der Coordinaten.

Nur ist hier zu bemerken, daß unter obiger Summe eine algebrai-

sche, d. i. eine mit Rücksicht auf die durch die Lage der Projectionen bedingten Zeichen derselben genommene Summe verstanden werden muß.

Man erhält die Projection einer wie immer gestalteten Linie auf eine Ebene, wenn man sich jeden Punct dieser Linie auf die Ebene projicirt vorstellt. Es wird also die Projection einer Linie auf einer Ebene verzeichnet, wenn sich eine diese Ebene senkrecht treffende Gerade so bewegt, daß sie stets durch die gegebene Linie hindurch geht.

Endlich ist die Projection einer wie immer begrenzten ebenen Figur auf eine Ebene der Raum, welcher auf dieser Ebene durch die Projection des Umfanges der Figur eingeschlossen wird.

Ohne Schwierigkeit läßt sich beweisen, daß die Oberfläche der Projection eines Dreieckes auf eine Ebene dem mit dem Cosinus seines Neigungswinkels gegen die Ebene multiplicirten Inhalte des Dreieckes gleich kommt. Dieser Satz kann nun durch das in der Geometrie übliche Verfahren auf die Projection jedes ebenen Polygons, und nach der Methode der Grenzen auch auf die Projection jeder durch eine krumme Linie umschlossenen ebenen Figur ausgedehnt werden.

Dieß vorausgesetzt, sey F die Oberfläche irgend einer auf der Ebene, welcher die Gleichung (47) gehört, verzeichneten Figur, so haben wir offenbar

$$Fx\cos.\gamma_1 + Fy\cos.\gamma_2 + Fz\cos.\gamma_3 = Fp;$$

folglich, wenn wir die Projectionen von F auf die Ebenen yz, xz, xy durch F_1, F_2, F_3 vorstellen, wegen

$$F_1 = F\cos.\gamma_1,\quad F_2 = F\cos.\gamma_2,\quad F_3 = F\cos.\gamma_3$$

$$F_1x + F_2y + F_3z = Fp$$

und $\frac{1}{3}F_1x + \frac{1}{3}F_2y + \frac{1}{3}F_3z = \frac{1}{3}Fp.$

Aber $\frac{1}{3}Fp$ zeigt das Volum einer Pyramide (eines Kegels) an, deren (dessen) Scheitel der Anfangspunct der Coordinaten, und deren (dessen) Grundfläche die Figur F ist; ferner sind $\frac{1}{3}F_1x$, $\frac{1}{3}F_2y$, $\frac{1}{3}F_3z$ die Inhalte der Pyramiden (Kegel), welche die Projectionen von F auf die drei coordinirten Ebenen zu Grundflächen, und irgend einen in der Ebene von F liegenden Punct zum gemeinschaftlichen Scheitel haben; daher findet der merkwürdige geometrische Lehrsatz Statt, daß die erstere Pyramide (der erstere Kegel) der Summe der drei letzteren gleich ist.

Vierte Vorlesung.

Über die Gleichungen einer geraden Linie.

Da, wenn man die Gleichungen zweier Ebenen zugleich bestehen, d. h. die Werthe von x, y, z in der einen mit den Werthen dieser Coordinaten in der anderen übereinstimmen läßt, beide Gleichungen zusammen bloß für jene Puncte gelten, welche sowohl der einen als der anderen Ebene gehören, und zwei Ebenen sich jederzeit in einer geraden Linie durchschneiden; ferner auch jede gerade Linie als der Durchschnitt zweier Ebenen betrachtet werden kann: so wird eine Gerade im Raume durch ein System zweier Gleichungen von den Formen

$$(1)\qquad \begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

analytisch ausgedrückt.

Man kann aus den zwei Gleichungen einer geraden Linie unzählige Paare anderer Gleichungen ableiten, welche die ersteren vollkommen ersetzen, d. h. genau dieselbe Beziehung zwischen x, y, z darstellen. Hiezu genügt es die Gleichungen (1) mit beständigen Größen M_1, M_2 zu multipliciren, und sie sodann zu addiren oder von einander abzuziehen. Die Möglichkeit dieses Verfahrens entspricht dem Umstande, daß sich durch jede Gerade unzählig viele Ebenen legen lassen, wovon je zwei die Position dieser Geraden unzweideutig bestimmen.

Die hier gemachte Bemerkung gestattet die Gleichungen einer Geraden auf die einfachsten Gestalten, deren sie fähig sind, zurückzuführen. Wir erhalten sie, wenn wir aus (1) zwei Gleichungen ableiten, in deren jeder bloß zwei der Größen x, y, z erscheinen. Eliminiren wir ein Mal y, und das andere Mal x, so ergeben sich für unsere gerade Linie die Gleichungen

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1) x + (C_1 B_2 - C_2 B_1) z + D_1 B_2 - D_2 B_1 = 0,$$
$$(A_1 B_2 - A_2 B_1) y + (A_1 C_2 - A_2 C_1) z + A_1 D_2 - A_2 D_1 = 0,$$

welche, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} = a, \quad \frac{B_1 D_2 - B_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} = \alpha$$
$$\frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} = b, \quad \frac{A_2 D_1 - A_1 D_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} = \beta$$

setzen, in

(2) $$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta$$

übergehen, unter welchen einfachen Formen wir von nun an die Gleichungen einer Geraden betrachten werden.

Den in der vorhergehenden Vorlesung enthaltenen Gründen zufolge ist $x = az + \alpha$ die Gleichung einer Ebene, welche jene der xz senkrecht durchschneidet; der Durchschnitt selbst ist offenbar die Projection der durch die Gleichungen (2) vorgestellten Geraden auf die genannte coordinirte Ebene: es gehören demnach der Projection der Geraden (2) auf die Ebene xz die Gleichungen

$$x = az + \alpha, \quad y = o.$$

Eben so stellen die Gleichungen

$$x = o, \quad y = bz + \beta$$

die Projection der Geraden (2) auf die Ebene yz vor. Kennt man demnach die Gleichungen der Projectionen einer Geraden auf zwei der coordinirten Ebenen, so ist man sogleich im Stande, die Gleichungen der projicirten Geraden selbst anzugeben.

Es ist $x = az$ die Gleichung einer zur Ebene $x = az + \alpha$, und eben so $y = bz$ die Gleichung einer zur Ebene $y = bz + \beta$ parallelen Ebene, daher gehören die Gleichungen

(3) $$x = az$$
$$y = bz$$

einer Geraden, welche jener, der die Gleichungen (2) entsprechen, parallel lauft. Aber die Gleichungen (3) geben für $z = o$ auch $x = o$, $y = o$, deßhalb geht die Gerade (3) durch den Anfangspunct der Coordinaten. Läßt man also aus den Gleichungen einer Geraden die von den Coordinaten jedes ihrer Puncte freien Bestandtheile weg, so hat man die Gleichungen einer der ersteren durch den Anfangspunct der Coordinaten parallel gezogenen geraden Linie.

Man denke sich, von dem Anfangspuncte der Coordinaten ausgehend, auf der Geraden (3) ein der Längeneinheit gleiches Stück abgeschnitten, und nenne die Coordinaten seines Endpunctes x_1, y_1, z_1, so hat man, wenn man dieses Stück als Radiusvector des Punctes x_1, y_1, z_1 betrachtet:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = 1.$$

Dieser Ausdruck gibt uns wegen $x_1 = a z_1$ und $y_1 = b z_1$ ...

$$z_1 \sqrt{a^2 + b^2 + 1} = 1,$$

folglich $z_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$, und hieraus

$$y_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},$$

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Es seyen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Winkel, welche die Gerade (3) mit den Axen der x, y, z bildet, so bestehen die Gleichungen

$$x_1 = \cos.\gamma_1, \quad y_1 = \cos.\gamma_2, \quad z_1 = \cos.\gamma_3,$$

daher ist

$$(4) \qquad \cos.\gamma_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \cos.\gamma_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \cos.\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \qquad \Bigg| \quad a = \frac{\cos.\gamma_1}{\cos.\gamma_3}, \quad b = \frac{\cos.\gamma_2}{\cos.\gamma_3}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln verwandeln sich die Gleichungen (2) in

$$(5) \qquad x = \frac{\cos.\gamma_1}{\cos.\gamma_3} z + \alpha, \quad y = \frac{\cos.\gamma_2}{\cos.\gamma_3} z + \beta.$$

Es sey ψ die Neigung der Projection der Geraden (2) auf die Ebene xz gegen die Axe der z, so geben uns die so eben gefundenen Formeln, auf die Gleichungen dieser Projection angewendet:

$$x = \frac{\cos.\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)}{\cos.\psi} z + \alpha$$

oder $x = tg.\psi \,.\, z + \alpha$;

woraus hervorgeht, daß der Coefficient a in den Gleichungen (2) die Tangente des Winkels bezeichnet, welchen die Projection der diesen Gleichungen entsprechenden Geraden auf die Ebene xz mit der Axe der z bildet. Eben so ist b die Tangente der Neigung der Projection dieser Geraden auf die Ebene yz gegen die Axe der z.

Setzen wir in den Gleichungen der Projection der Geraden (2) auf die Ebene xz, $z=0$, so erhalten wir $x=\alpha$. Es ist also α die Entfernung des Durchschnittspunctes dieser Projection mit der Axe der

1 vom Anfangspuncte der Coordinaten. Hieraus wird man auch die Bedeutung von β leicht entnehmen.

Vergleichen wir nun zwei gerade Linien mit einander, wovon der einen, welche wir die Linie 1 nennen, die Gleichungen

$$x = a_1 z + \alpha_1, \quad y = b_1 z + \beta_1,$$

und der anderen, der Linie 2, die Gleichungen

$$x = a_2 z + \alpha_2, \quad y = b_2 z + \beta_2$$

gehören. Schneiden sich diese Geraden, so entspricht denselben für den Durchschnittspunct einerlei x, y, z. Da wir aber hier vier Gleichungen zwischen diesen drei Größen vor Augen haben, so können dieselben nicht übereinstimmen, wofern nicht zwischen den beständigen Größen a_1, b_1, α_1, β_1, a_2, b_2, α_2, β_2 eine Relation besteht, welche wir durch Elimination der Coordinaten aus obigen Gleichungen kennen lernen. Diese Gleichungen geben uns nämlich

$$a_1 z + \alpha_1 = a_2 z + \alpha_2,$$

also $(a_1 - a_2) z + \alpha_1 - \alpha_2 = 0;$

ferner $b_1 z + \beta_1 = b_2 z + \beta_2,$

also $(b_1 - b_2) z + \beta_1 - \beta_2 = 0.$

Soll nun z in beiden Resultaten einerlei Werth besitzen, so muß die Bedingung

$$(6) \qquad \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2}$$

erfüllt werden, von welcher daher auch die Möglichkeit des Zusammentreffens der Geraden 1 und 2 abhängt.

Obschon bei zwei sich nicht durchschneidenden Geraden von einem Winkel derselben keine Rede seyn kann, so läßt sich doch ihre gegenseitige Lage beurtheilen, wenn man den Winkel beachtet, der von zwei durch einen beliebigen Punct, am besten, durch den Anfangspunct der Coordinaten, gezogenen ihnen parallelen Geraden gebildet wird. Einige Schriftsteller nennen den letzteren Winkel geradezu die Neigung der ersteren Geraden; eine Redensart, durch welche der Ausdruck sehr an Kürze gewinnt.

Die Geraden 1 und 2 sind parallel, wenn ihnen eine und dieselbe durch den Anfangspunct gehende Gerade parallel lauft. Damit dieß Statt finde, muß

$$a_1 = a_2 \quad \text{und} \quad b_1 = b_2$$

seyn. In diesem Falle geht die Gleichung (6) in

$$\frac{o}{o} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2}$$

über.

Es bezeichne ω die Neigung der Geraden 1 und 2, so geben uns die Gleichungen (4) mit Rücksicht auf die Formel (44) der zweiten Vorlesung

(7) $$cos.\, \omega = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + 1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + 1} \,.\, \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + 1}}.$$

Diese Geraden haben gegen einander eine senkrechte Lage, wenn $cos.\, \omega = o$, d. h. wenn

(8) $$a_1 a_2 + b_1 b_2 + 1 = o \quad \text{ist.}$$

Vergleichen wir noch eine Gerade 1

$$x = a z + \alpha, \quad y = b z + \beta$$

mit einer Ebene I

$$A x + B y + C z + D = o,$$

und bestimmen wir zu diesem Behufe die Neigungen einer durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden, diese Ebene unter einem rechten Winkel treffenden Geraden gegen die Axen der x, y, z. Die Cosinusse dieser Neigungen werden, wie aus der vorhergehenden Vorlesung zu ersehen ist, durch die Größen

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

angezeigt. Nennen wir nun den Winkel, unter welchem die Gerade 1 der Ebene I begegnet, θ, und bedenken wir, daß derselbe mit der Neigung der Geraden 1 gegen ein auf der Ebene I errichtetes Perpendikel zusammengenommen einen rechten Winkel gibt, so haben wir die Formel

(9) $$sin.\, \theta = \frac{A a + B b + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \,.\, \sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Soll die Gerade 1 der Ebene I parallel laufen, so muß $\theta = o$, also auch

(10) $$A a + B b + C = o$$

werden.

Substituirt man die oben genannten Cosinusse in die Gleichungen (5), so sieht man, daß die Gleichungen jeder auf die Ebene I senkrechten Geraden die Form

(11) $$x = \frac{A}{C} z + \alpha, \quad y = \frac{B}{C} z + \beta$$

haben. Soll demnach die Gerade 1 der Ebene I unter einem rechten Winkel begegnen, so müssen die Gleichungen

(12) $$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C}$$

Statt finden. Diese Gleichungen ergeben sich auch, wenn man $\sin. \theta = 1$, oder

$$Aa + Bb + C = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

setzt, durch die bei einem ähnlichen Falle in der vorhergehenden Vorlesung gebrauchten Schlüsse.

Die Coordinaten des Punctes, in welchem die Gerade 1 der Ebene I begegnet, ergeben sich, wenn man die Werthe von x, y, z in den Gleichungen der Geraden und in der Gleichung der Ebene als gleichbedeutend ansieht. Substituirt man nämlich die durch die ersteren Gleichungen dargebotenen Ausdrücke für x und y in die letztere, so erhält man

$$(Aa + Bb + C) z + A\alpha + B\beta + D = 0,$$

und hieraus $z = -\frac{A\alpha + B\beta + D}{Aa + Bb + C}$.

Dieser Werth, in die Gleichungen der Geraden 1 eingeführt, gibt

$$x = \frac{B(b\alpha - a\beta) + C\alpha - Da}{Aa + Bb + C},$$

$$y = \frac{A(a\beta - b\alpha) + C\beta - Db}{Aa + Bb + C}.$$

Wenn sich die Gerade 1 einer zur Ebene I parallelen Lage unendlich nähert, so werden die Werthe der Coordinaten des Durchschnittspunctes beider unendlich groß; allein die Neigung dieser Geraden gegen die coordinirten Ebenen, und folglich auch gegen die Ebene I, hängt bloß von den Coefficienten a, b ab: daher kann die erwähnte Vergrößerung der Werthe von x, y, z nur dadurch erreicht werden, daß der Nenner $Aa + Bb + C$ in obigen Ausdrücken der Nulle unendlich nahe kommt. Es ist also

$$Aa + Bb + C = 0$$

die Bedingung des Parallelismus zwischen der Linie und der Ebene.

Soll die Gerade 1 in der Ebene I enthalten seyn, so muß die Gleichung

$$(Aa + Bb + C) z + A\alpha + B\beta + D = 0$$

für jeden Werth von z gelten. Dieß kann aber nur in so fern Statt finden, als die beiden Gleichungen

(13) $$A a + B b + C = o$$
$$A \alpha + B \beta + D = o$$

bestehen. Die erste dieser Gleichungen sagt, daß die Gerade zur Ebene parallel sey; die zweite hingegen, daß die Gerade und die Ebene einen Punct, nämlich jenen, dessen Coordinaten α, β, o sind, gemeinschaftlich besitzen; woraus, wie man leicht sieht, nothwendig folgt, daß die Gerade in der Ebene liegt.

Wir sind auch jetzt im Stande die Gleichungen der geraden Linien anzugeben, in welchen die Ebene, deren Gleichung

$$A x + B y + C z + D = o$$

ist, die coordinirten Ebenen xy, xz, yz durchschneidet. Sie bestehen in der Verbindung dieser Gleichung mit den Gleichungen der genannten coordinirten Ebenen, nämlich $z = o$, $y = o$, $x = o$. So sind z. B. $B y + C z + D = o$ und $x = o$ die Gleichungen der Durchschnittslinie der genannten Ebene mit der Ebene yz.

Wenn zwei gerade Linien, welche man mit einander vergleicht, in einer der coordinirten Ebenen, z. B. in jener der xz liegen, so nehmen die oben gewonnenen Resultate eine einfachere Gestalt an. Denn es seyen

$$x = a_1 z + \alpha_1, \quad x = a_2 z + \alpha_2$$

in Verbindung mit $y = o$ die Gleichungen dieser Geraden, so sind

$$z = -\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{a_1 - a_2}, \quad x = -\frac{\alpha_1 a_2 - \alpha_2 a_1}{a_1 - a_2}$$

die Coordinaten ihres Durchschnittspunctes;

$$\frac{a_1 a_2 + 1}{\sqrt{a_1^2 + 1} \cdot \sqrt{a_2^2 + 1}}$$ ist der Cosinus, folglich

$$\frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 a_2}$$ die Tangente des von denselben gebildeten Winkels, und

$$a_1 = a_2$$

ist die Bedingung des Parallelismus,

$$1 + a_1 a_2 = o$$

aber die Bedingung des auf einander senkrecht Stehens dieser Geraden.

Fünfte Vorlesung.

Über die Auflösung einiger die gerade Linie und die Ebene betreffender Aufgaben.

Erste Aufgabe. Es sind die Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 zweier Puncte gegeben; man verlangt die Gleichungen der Geraden, welche diese Puncte mit einander verbindet.

Auflösung. Man stelle die Gleichungen der zu suchenden Geraden durch

$$x = Az + H, \quad y = Bz + K$$

vor, wobei A, B, H, K unbekannte Größen bedeuten. Da diese Gerade durch die gegebenen Puncte gehen soll, so müssen die Gleichungen

$$x_1 = Az_1 + H, \quad y_1 = Bz_1 + K$$
$$\text{und} \quad x_2 = Az_2 + H, \quad y_2 = Bz_2 + K$$

Statt finden, mittelst welcher man die unbekannten Größen bestimmen kann. Man kömmt aber am einfachsten zu dem verlangten Resultate, wenn man von den angeführten drei Paaren zusammengehöriger Gleichungen jedes folgende von dem vorhergehenden subtrahirt, und aus den Resultaten dieser Operation A und B wegschafft. Hiedurch erhält man nämlich

$$x - x_1 = A(z - z_1), \quad y - y_1 = B(z - z_1)$$
$$\text{und} \quad x_1 - x_2 = A(z_1 - z_2), \quad y_1 - y_2 = B(z_1 - z_2),$$

folglich

$$x - x_1 = \frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2}(z - z_1), \quad y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{z_1 - z_2}(z - z_1),$$

welches die Gleichungen der durch die Puncte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 gezogenen Geraden sind.

Zweite Aufgabe. Man soll die Gleichungen einer Geraden finden, welche durch den Punct x_1, y_1, z_1 geht, und zur Geraden $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ parallel ist.

Auflösung. Sind

$$x = Az + H, \quad y = Bz + K$$

die verlangten Gleichungen, so nehmen sie, der Bedingung wegen, daß die durch dieselben vorgestellte Gerade den Punct x_1, y_1, z_1 ent-

halte, also die Gleichungen

$$x_1 = A z_1 + H, \quad y_1 = B z_1 + K,$$

Statt finden, die Gestalt

$$x - x_1 = A (z - z_1), \quad y - y_1 = B (z - z_1)$$

an. Der Parallelismus der zu suchenden und der gegebenen Geraden fordert überdieß, daß $A = a$, $B = b$ sey; wir haben also

$$x - x_1 = a (z - z_1), \quad y - y_1 = b (z - z_1),$$

in welchen Gleichungen die Auflösung der vorgelegten Aufgabe besteht.

Dritte Aufgabe. Es werden die Gleichungen einer Geraden gefordert, welche durch den Punct x_1, y_1, z_1 geht, und die Gerade $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ senkrecht durchschneidet; ferner die Coordinaten des Durchschnittspunctes und die Länge der Senkrechten zwischen demselben und dem Puncte x_1, y_1, z_1.

Auflösung. Die zu suchenden Gleichungen lassen sich, wie aus der vorhergehenden Aufgabe zu ersehen ist, unter der Form

$$x - x_1 = A (z - z_1), \quad y - y_1 = B (z - z_1)$$

vorstellen, so daß es nur noch auf die Bestimmung von A und B ankommt.

Da sich beide Geraden durchschneiden sollen, so muß (vorhergehende Vorlesung (6)) die Bedingungsgleichung

$$\frac{x_1 - A z_1 - \alpha}{y_1 - B z_1 - \beta} = \frac{A - a}{B - b}$$

oder

$$A (y_1 - bz_1 - \beta) - B (x_1 - az_1 - \alpha) + b (x_1 - \alpha) - a (y_1 - \beta) = 0,$$

und weil der Winkel derselben ein rechter seyn soll, so muß (ebendaselbst (8)) die Gleichung

$$Aa + Bb + 1 = 0$$

bestehen, woraus sich die Werthe von A und B finden lassen. Es dürfte jedoch einfacher seyn, in die letzteren zwei Gleichungen statt A und B die Ausdrücke

$$\frac{x - x_1}{z - z_1} \text{ und } \frac{y - y_1}{- z_1}$$

einzuführen, obgleich dadurch in die verlangten Gleichungen alle drei Größen x, y, z zugleich verwebt werden. Man erhält nämlich die Gleichungen

$$a (x - x_1) + b (y - y_1) + z - z_1 = 0,$$

$$(y_1 - b z_1 - \beta)(x - x_1) - (x_1 - a z_1 - \alpha)(y - y_1) + [b(x_1 - \alpha) - a(y_1 - \beta)](z - z_1) = 0,$$

welche dem ersten Theile unserer Aufgabe entsprechen. Wir werden die Bedeutung dieser Gleichungen in den nächstfolgenden Aufgaben kennen lernen.

Um die Coordinaten des Durchschnittspunctes der durch sie vorgestellten Geraden mit jener, der die Gleichungen

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

gehören, zu bestimmen, verbinden wir diese letzteren mit einer der ersteren Gleichungen, am zweckmäßigsten mit der einfacheren. Wir finden

$$z = \frac{a(x_1 - \alpha) + b(y_1 - \beta) + z_1}{a^2 + b^2 + 1},$$

wodurch sich auch die dem erwähnten Durchschnittspuncte gehörenden Werthe von x und y nach einer leichten Rechnung ergeben. Bestimmt man die Werthe der Unterschiede $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, so erhält man

$$z - z_1 = \frac{a(x_1 - a z_1 - \alpha) + b(y_1 - b z_1 - \beta)}{a^2 + b^2 + 1},$$

$$y - y_1 = b(z - z_1) - (y_1 - b z_1 - \beta)$$
$$= \frac{a[b(x_1 - \alpha) - a(y_1 - \beta)] - (y_1 - b z_1 - \beta)}{a^2 + b^2 + 1},$$

$$x - x_1 = a(z - z_1) - (x_1 - a z_1 - \alpha)$$
$$= -\frac{b[b(x_1 - \alpha) - a(y_1 - \beta)] + x_1 - a z_1 - \alpha}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Die Länge der vom Puncte x_1, y_1, z_1 auf die Gerade $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ geführten Senkrechten, sie heiße S, wird durch

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

ausgedrückt; es ist also, wenn man der Kürze wegen

$$x_1 - az_1 - \alpha = P, \quad y_1 - bz_1 - \beta = Q, \quad b(x_1 - \alpha) - a(y_1 - \beta) = R$$

setzt:

$$S = \frac{\sqrt{(aP + bQ)^2 + (aR - Q)^2 + (bR + P)^2}}{a^2 + b^2 + 1}$$
$$= \frac{\sqrt{(a^2 + 1)P^2 + (b^2 + 1)Q^2 + (a^2 + b^2)R^2 + 2abPQ + 2bPR - 2aQR}}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich, wenn man bedenkt, daß

$$R = bP - aQ,$$

folglich $(R - bP + aQ)^2 = 0$
oder $R^2 + b^2P^2 + a^2Q^2 = 2abPQ + 2bPR - 2aQR$
ist, auf die Form

$$\sqrt{\frac{P^2 + Q^2 + R^2}{a^2 + b^2 + 1}}$$

bringen; demnach haben wir

$$s = \sqrt{\frac{[x_1 - az_1 - \alpha]^2 + [y_1 - bz_1 - \beta]^2 + [b(x_1 - \alpha) - a(y_1 - \beta)]^2}{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Vierte Aufgabe. Man soll die Gleichungen einer durch den Punct x_1, y_1, z_1 gehenden und die Gerade $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ senkrecht schneidenden Ebene finden.

Auflösung. Es sey $Ax + By + Cz + D = 0$ die verlangte Gleichung, so muß, weil die durch dieselbe vorgestellte Ebene den Punct x_1, y_1, z_1 in sich enthalten soll, insbesondere

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

seyn, woraus durch Subtraction der letzteren Gleichung von der ersteren

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

folgt. Dieß ist die allgemeine Form der Gleichung einer Ebene, welcher ein bestimmter Punct x_1, y_1, z_1 zugehört. Damit diese Ebene auf der gegebenen Geraden senkrecht stehe, muß den Bedingungen

$$\frac{A}{C} = a, \quad \frac{B}{C} = b$$

Genüge geleistet werden; demnach ist

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + z - z_1 = 0$$

die zu suchende Gleichung. Dieselbe stimmt mit der ersten der in der Auflösung der vorigen Aufgabe gefundenen Gleichungen überein. In der That liegt die aus einem gegebenen Puncte auf eine gegebene Gerade gefällte Senkrechte in der Ebene, welche durch jenen Punct geht, und die genannte Gerade senkrecht trifft.

Fünfte Aufgabe. Es wird die Gleichung einer durch den Punct x_1, y_1, z_1 und durch die Gerade $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ gelegten Ebene verlangt.

Auflösung. Die zu suchende Gleichung hat, weil die ihr zugehörende Ebene durch den Punct x_1, y_1, z_1 gehen soll, die Form

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Damit die gegebene Gerade in dieser Ebene liege, müssen die Gleichungen

$$A a + B b + C = 0$$
$$A \alpha + B \beta - A x_1 - B y_1 - C z_1 = 0$$

(vorhergehende Vorlesung (13)) Statt finden, mittelst deren sich die Quotienten $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, welche hier eigentlich die unbekannten Größen sind, bestimmen lassen. Man findet

$$A = \frac{(y_1 - b z_1 - \beta) C}{b (x_1 - \alpha) - a (y_1 - \beta)},$$
$$B = - \frac{(x_1 - a z_1 - \alpha) C}{b (x_1 - \alpha) - a (y_1 - \beta)}.$$

Setzt man nun die willkürliche Größe $C = b (x_1 - \alpha) - a (y_1 - \beta)$, so ergibt sich die Gleichung

$$(y_1 - b z_1 - \beta) (x - x_1) - (x_1 - a z_1 - \alpha) (y - y_1)$$
$$+ [b (x_1 - \alpha) - a (y_1 - \beta)] (z - z_1) = 0.$$

Dieß ist die zweite der in der Auflösung der dritten Aufgabe erhaltenen Gleichungen. Die aus einem Puncte auf eine Gerade gefällte Senkrechte befindet sich nämlich in der Ebene, welche den Punct und die Gerade in sich begreift.

Sechste Aufgabe. Man soll die Gleichungen der kürzesten Geraden finden, welche aus einem gegebenen Puncte x_1, y_1, z_1 zu einer gegebenen Geraden $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ gezogen werden kann.

Auflösung. Es seyen

$$x - x_1 = A (z - z_1), \quad y - y_1 = B (z - z_1)$$

die Gleichungen jener Geraden, so haben wir, wenn wir unter x, y, z die Coordinaten ihres Durchschnittspunctes mit der gegebenen Geraden verstehen, für ihre Länge L den Ausdruck

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2};$$

woraus, wenn man denselben quadrirt nnd in Bezug auf die Variablen x, y, z differenzirt,

$$L dL = (x - x_1) dx + (y - y_1) dy + (z - z_1) dz$$

folgt. In unserem Falle muß der in der fünf und vierzigsten Vorlesung über die Analysis vorgetragenen Regel gemäß $dL = 0$ seyn, daher haben wir

$$(x - x_1) dx + (y - y_1) dy + (z - z_1) dz = 0.$$

Die Gleichungen $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ geben uns

$$dx = a dz, \quad dy = b dz;$$

nehmen wir zugleich auf die für die zu suchenden Gleichungen angenommenen Formen Rücksicht, so erhalten wir

$$A a + B b + 1 = 0;$$

aus welcher Gleichung erhellet, daß die aus einem bestimmten Puncte zu einer gegebenen Geraden gezogene kürzeste gerade Linie auf der ersteren senkrecht steht, wodurch die gegenwärtige Aufgabe in das Gebiet des dritten der oben aufgelösten Probleme versetzt wird.

Siebente Aufgabe. Man soll die Gleichungen der kürzesten Geraden finden, welche zwei gegebene Geraden

$$x = a_1 z + \alpha_1, \quad y = b_1 z + \beta_1$$

$$\text{und} \quad x = a_2 z + \alpha_2, \quad y = b_2 z + \beta_2$$

mit einander verbindet.

Auflösung. Bezeichnen wir durch x_1, y_1, z_1 irgend einen Punct der ersten, und durch x_2, y_2, z_2 irgend einen Punct der zweiten, so ist die Länge ihrer Verbindungslinie

$$L = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

folglich

$$L dL =$$

$$= (x_1 - x_2)(dx_1 - dx_2) + (y_1 - y_2)(dy_1 - dy_2) + (z_1 - z_2)(dz_1 - dz_2).$$

Wir haben $x_1 = a_1 z_1 + \alpha_1$, $y_1 = b_1 z_1 + \beta_1$,

$x_2 = a_2 z_2 + \alpha_2$, $y_2 = b_2 z_2 + \beta_2$,

daher sind x_1, y_1 Functionen von z_1, und x_2, y_2 Functionen von z_2; z_1 und z_2 aber, wie es die Natur der Sache mit sich bringt, von einander gänzlich unabhängig. Setzen wir nun $dL = 0$, so haben wir folgende zwei Gleichungen

$$(x_1 - x_2) dx_1 + (y_1 - y_2) dy_1 + (z_1 - z_2) dz_1 = 0,$$

$$(x_1 - x_2) dx_2 + (y_1 - y_2) dy_2 + (z_1 - z_2) dz_2 = 0,$$

welche wegen $dx_1 = a_1 dz_1$, $dy_1 = b_1 dz_1$

$dx_2 = a_2 dz_2$, $dy_2 = b_2 dz_2$

sich auf

$$a_1 (x_1 - x_2) + b_1 (y_1 - y_2) + z_1 - z_2 = 0$$

$$a_2 (x_1 - x_2) + b_2 (y_1 - y_2) + z_1 - z_2 = 0$$

reduciren lassen, und mit den obigen Ausdrücken für x_1, y_1, x_2, y_2 verbunden dazu dienen, die Werthe dieser Coordinaten, wie auch die von z_1 und z_2, bloß durch bekannte Größen darzustellen. Nun kennt man die Coordinaten zweier Puncte der zu suchenden Geraden, folglich auch nach der ersten Aufgabe die Gleichungen derselben. Wie man leicht sieht, kann auch die vorhergehende Aufgabe auf diese Art behandelt werden.

Es seyen $x = A z + H$, $y = B z + K$

die Gleichungen der in der vorliegenden Aufgabe geforderten geraden Linie, so haben wir, weil dieselbe die Puncte $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ in sich enthält,

$$x_1 = A z_1 + H, \quad y_1 = B z_1 + K,$$
$$x_2 = A z_2 + H, \quad y_2 = B z_2 + K,$$

folglich $x_1 - x_2 = A(z_1 - z_2)$, $y_1 - y_2 = B(z_1 - z_2)$, und deßhalb finden die Gleichungen

$$A a_1 + B b_1 + 1 = 0 \quad | \quad A a_2 + B b_2 + 1 = 0$$

Statt, welche zeigen, daß die kürzeste Verbindungslinie zweier Geraden auf beiden zugleich senkrecht steht.

Achte Aufgabe. Es werden die Gleichungen der kürzesten Geraden verlangt, welche von dem Puncte x_1, y_1, z_1 zur Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ geht.

Auflösung. Es sey L die Länge der Geraden, durch welche der gegebene Punct x_1, y_1, z_1 mit dem Puncte x, y, z der Ebene verbunden wird, so ist wieder

$$L = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

Aber hier sind x und y von einander unabhängig, wenn man z als eine durch die Gleichung der Ebene bestimmte Function dieser Größen betrachtet; daher erhalten wir, wenn wir L^2 sowohl in Bezug auf x als auch in Bezug auf y partiell differenziren:

$$L \frac{dL}{dx} = x - x_1 + (z - z_1) \frac{dz}{dx}$$

$$\text{und} \quad L \frac{dL}{dy} = y - y_1 + (z - z_1) \frac{dz}{dy}.$$

Setzen wir $\frac{dL}{dx} = 0$ und $\frac{dL}{dy} = 0$, und bedenken wir, daß vermöge der Gleichung der Ebene

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{B}{C}$$

ist, so finden wir mit Rücksicht auf die für die Gerade angenommenen Gleichungen $x - x_1 = a(z - z_1)$, $y - y_1 = b(z - z_1)$

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C};$$

woraus zu ersehen ist, daß die verlangte Gerade auf die Ebene perpendikulär fällt. Ihre Gleichungen sind

$$x - x_1 = \frac{A}{C}(z - z_1), \quad \Big| \quad y - y_1 = \frac{B}{C}(z - z_1).$$

Sechste Vorlesung.

Über die geometrische Bedeutung einer Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen.

Liegen alle Puncte einer Linie in einer und derselben Ebene, und läßt man eine der coordinirten Ebenen, z. B. die der xy mit ersterer zusammenfallen, so reducirt sich eine der beiden Gleichungen der Linie auf $z=o$, und in der andern kommen deßhalb bloß die Coordinaten x und y vor. Erstrecken sich nun alle Operationen, welche man mit der Linie vornimmt, auf keinen außerhalb der Ebene xy befindlichen Punct, so genügt es, die zwischen x und y bestehende Gleichung allein zu beachten. Eben so hat man es im Polarcoordinatensysteme, wenn man die Basis desselben in die Ebene der Linie legt, bloß mit einer Gleichung zwischen dem Radiusvector und seiner Abweichung von der Polaraxe zu thun. In diesem Sinne kann also eine sogenannte **ebene Linie** auch mittelst eines Systems zweier Coordinaten analytisch dargestellt werden.

Da man im rechtwinkeligen Coordinatensystem auf der Ebene die Position eines Punctes sogleich auffindet, wenn man längst einer der Axen, vom Anfangspuncte derselben ausgehend, die ihr parallele Coordinate abschneidet, und in dem Endpuncte des hiedurch erhaltenen Stückes auf dieses eine der anderen Coordinate gleiche Gerade senkrecht aufstellt, so nennt man die erstere Coordinate gewöhnlich die **Abscisse**, und die letztere die **Ordinate** des zu bestimmenden Punctes. Die Abscisse wird fast immer durch x, und die Ordinate durch y vorgestellt. Die Axe der x heißt sodann die **Abscissenaxe**, und die Axe der y die **Ordinatenaxe**.

Wie aus den vorhergehenden Vorlesungen erhellet, gehört jede Gleichung des ersten Grades zwischen zwei rechtwinkligen Coordinaten x und y, d. h. jede Gleichung von der Form $Ay+Bx+C=o$, in so fern sie bloß auf die Ebene xy bezogen wird, einer geraden Linie. Es bietet sich uns nun die Frage dar, welche geometrische Bedeutung eine Gleichung des zweiten Grades, deren allgemeine Form

(1) $$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o$$

ist, in der so eben ausgesprochenen Beziehung zulasse.

Um dieselbe kennen zu lernen, ist es nöthig, die gegebene Gleichung auf eine einfachere Gestalt zu bringen. Dieß kann durch Transformation der Coordinaten auf zweifache Art bewerkstelliget werden.

I. Man versetze den Anfangspunct der Coordinaten in den Punct ξ, υ, und lasse die neuen Axen den vorigen parallel seyn, so hat man, wenn die Coordinaten des Punctes x, y im neuen Systeme durch x' und y' bezeichnet werden:

$$x = x' + \xi, \quad y = y' + \upsilon;$$

folglich, durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung (1)

$$(2) \quad \begin{aligned} & A y'^2 + B x' y' + C x'^2 \\ & + (2 A \upsilon + B \xi + D) y' + (B \upsilon + 2 C \xi + E) x' \\ & + A \upsilon^2 + B \xi \upsilon + C \xi^2 + D \upsilon + E \xi + F = 0. \end{aligned}$$

Kann man die Werthe der bis jetzt noch unbestimmten Größen ξ, υ so wählen, daß die Coefficienten von y' und x' in (2) verschwinden, so nimmt diese Gleichung offenbar eine einfachere Form an, als (1); vorausgesetzt, daß in letzterer Gleichung nicht etwa D und E gleich Null sind. Wir erfahren diese Werthe durch die Auflösung der Gleichungen

$$(3) \quad \begin{aligned} 2 A \upsilon + B \xi + D &= 0, \\ B \upsilon + 2 C \xi + E &= 0, \end{aligned}$$

aus welchen sich

$$(4) \quad \xi = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad \upsilon = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$$

ergibt. Damit diese Werthe brauchbar seyen, d. h. weder unendlich werden, noch unbestimmt bleiben, muß $B^2 - 4AC$ von 0 verschieden ausfallen.

Es sey also $B^2 - 4AC$ nicht gleich Null, so verwandelt sich die Gleichung (2) mit Hülfe der Werthe (4) in

$$(5) \quad A y'^2 + B x' y' + C x'^2 + H = 0,$$

wobei

$$H = A \upsilon^2 + B \xi \upsilon + C \xi^2 + D \upsilon + E \xi + F$$

ist. Um H durch die Coefficienten A, B, C, ꝛc. darzustellen, addire man die Gleichungen (3), nachdem man die erste derselben mit υ, und die zweite mit ξ multiplicirt hat. Man findet

$$2 (A \upsilon^2 + B \xi \upsilon + C \xi^2) + D \upsilon + E \xi = 0,$$

folglich $A \upsilon^2 + B \xi \upsilon + C \xi^2 = - \tfrac{1}{2} (D \upsilon + E \xi)$,

und hiedurch $H = F + \tfrac{1}{2} (D \upsilon + E \xi)$,

welcher Ausdruck uns mittelst der obigen Werthe von ξ und v

(6) $$H = F + \frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{B^2 - 4AC}$$

gibt.

II. Man lasse für die Gleichung (1) den Anfangspunct der Coordinaten ungeändert, und wähle in der Ebene der Coordinaten x und y ein anderes rechtwinkliges System, dessen Abscissenaxe mit jener des vorigen Systems den Winkel ψ bildet, so hat man, wenn man die neuen Coordinaten durch x'' und y'' andeutet:

$$x = x'' \cos.\psi - y'' \sin.\psi, \quad y = x'' \sin.\psi + y'' \cos.\psi;$$

und dadurch verwandelt sich die Gleichung (1) in

(7) $$\begin{aligned}&(A \cos.\psi^2 - B \sin.\psi \cos.\psi + C \sin.\psi^2) y''^2 \\ &+ [2(A-C) \sin.\psi \cos.\psi + B(\cos.\psi^2 - \sin.\psi^2)] x'' y'' \\ &+ (A \sin.\psi^2 + B \sin.\psi \cos.\psi + C \cos.\psi^2) x''^2 \\ &+ (D \cos.\psi - E \sin.\psi) y'' + (D \sin.\psi + E \cos.\psi) x'' + F = 0.\end{aligned}$$

Man suche nun den Winkel ψ so anzunehmen, daß das Glied, in welchem $x'' y''$ als Factor erscheint, aus der Gleichung (7) hinwegfällt. In dieser Absicht setze man

$$2(A-C) \sin.\psi \cos.\psi + B(\cos.\psi^2 - \sin.\psi^2) = 0,$$

d. h. $(A-C) \sin.2\psi + B \cos.2\psi = 0,$

so hat man $(A-C)\, tg.2\psi + B = 0,$

und hieraus

(8) $$tg.2\psi = -\frac{B}{A-C} = \frac{B}{C-A}.$$

Die Tangente eines Winkels ist aller positiven und negativen Werthe von 0 angefangen bis in das Unendliche fähig, daher läßt sich ψ jederzeit der obigen Forderung gemäß bestimmen.

Aus dem hier erhaltenen Werthe von $tg.2\psi$ folgen zwei Werthe für $tg.\psi$, denn es ist im Allgemeinen

$$tg.2\psi = \frac{2\, tg.\psi}{1 - tg.\psi^2};$$

also, wenn man aus dieser Gleichung $tg.\psi$ sucht:

$$tg.\psi = -\cot.2\psi \pm \sqrt{\cot.2\psi^2 + 1},$$

und mit Rücksicht auf (8)

$$tg.\psi = \frac{A - C \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B}.$$

Bezeichnen wir durch ψ_1 und ψ_2 die kleinsten Bogen, deren Tangenten

$$\frac{A - C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B} \quad \text{und} \quad \frac{A - C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B}$$

sind, so entsprechen diese Bogen spitzigen Winkeln, wovon der erste positiv, und der zweite, wegen $A - C < \sqrt{(A-C)^2 + B^2}$, negativ ist. Auch zeigt sich

$$tg.\psi_1 \,.\, tg.\psi_2 = -1 \quad \text{oder} \quad tg.\psi_1 = -cot.\psi_2,$$

daher ist die Summe der numerischen Werthe von ψ_1 und ψ_2 gleich $\frac{\pi}{2}$; woraus erhellet, daß die zwei Lagen, welche die Axe der x'', mit Beachtung obiger Forderung, anzunehmen vermag, auf einander senkrecht stehen. Wird nun der Axe der x'' eine dieser Lagen wirklich angewiesen, so fällt die Axe der y'' in die andere.

Wir wollen hier die Wurzelgröße $\sqrt{(A-C)^2 + B^2}$, für sich betrachtet, als eine positive Größe ansehen, und

$$(9) \qquad tg.\psi = \frac{A - C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B}$$

setzen.

Die durch diesen Werth von ψ erzeugten Coefficienten von y''^2 und x''^2 in (7), welche der Kürze wegen M und N heißen mögen, lassen sich nun leicht durch A, B, C ausdrücken. Es ist nämlich

$$M = (A - B\,tg.\psi + C\,tg.\psi^2)\,cos.\psi^2,$$
$$N = (A\,tg.\psi^2 + B\,tg.\psi + C)\,cos.\psi^2;$$

ferner

$$A - B\,tg.\psi + C\,tg.\psi^2 =$$
$$= \left(1 + \frac{2C}{B^2}\left[\sqrt{(A-C)^2 + B^2} - (A-C)\right]\right)\sqrt{(A-C)^2 + B^2},$$
$$A\,tg.\psi^2 + B\,tg.\psi + C =$$
$$= \left(\frac{2A}{B^2}\left[\sqrt{(A-C)^2 + B^2} - (A-C)\right] - 1\right)\sqrt{(A-C)^2 + B^2}$$

und $$cos.\psi^2 = \frac{B^2}{2\left[\sqrt{(A-C)^2 + B^2} - (A-C)\right]\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{(A-C)^2 + B^2} + A - C}{2\sqrt{(A-C)^2 + B^2}},$$

folglich

$$(10) \qquad M = \tfrac{1}{2}(A + C) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2 + B^2},$$
$$N = \tfrac{1}{2}(A + C) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2 + B^2}.$$

Setzen wir noch

(11) $$D\,cos.\,\phi - E\,sin.\,\phi = P,$$
$$D\,sin.\,\phi + E\,cos.\,\phi = Q,$$

so erscheint die Gleichung (7) unter der Form

(12) $$My''^2 + Nx''^2 + Py'' + Qx'' + F = 0,$$

welche einfacher ist, als die ursprünglich gegebene (1).

Die hier gebrauchte Transformation der Gleichung (1) findet bei jeder Beschaffenheit derselben Statt, während die früher auseinandergesetzte I nur in so fern anwendbar ist, als $B^2 - 4AC$ sich nicht auf die Nulle reducirt. Indessen hat die Voraussetzung $B^2 - 4AC = 0$ auch auf die Form der transformirten Gleichung (12) einen wesentlichen Einfluß. Es wird nämlich in diesem Falle $B^2 = 4AC$, folglich

$$\sqrt{(A-C)^2 + B^2} = \sqrt{(A-C)^2 + 4AC} = A + C,$$

und daher $N = 0$; d. h. wenn $B^2 - 4AC = 0$ ist, so fehlt in der Gleichung (12) die zweite Potenz der Abscisse x''.

Wir wollen nun die Folgerungen auseinandersetzen, welche uns die Form der Gleichungen (5) und (12) darbietet.

Nehmen wir an, die Gleichung (1) sey so beschaffen, daß aus ihr die Gleichung (5) abgeleitet werden kann, und M (Fig. 6) sey ein Punct, dessen Coordinaten $O'P = x'$ und $MP = y'$ der letzteren Gleichung Genüge leisten. Da in der erwähnten Gleichung bloß die Quadrate von x' und y' und das Product $x'y'$, nicht aber die ersten Potenzen x' und y' erscheinen, so wird dieselbe nicht verletzt, wenn man $-x'$ an die Stelle von x', und zugleich $-y'$ an die Stelle von y' treten läßt. Nimmt man also in der Axe der x', $O'P' = O'P$, und senkrecht darauf $P'M' = PM$, so zwar, daß $O'P'$ und $O'P$ auf entgegengesetzte Seiten der Axe $O'y'$, und $P'M'$, PM auf entgegengesetzte Seiten der Axe $O'x'$ fallen, so ist M' gleichfalls ein der Gleichung (5) unterworfener Punct. Da nun, wie leicht gezeigt werden kann, die Puncte M, M' mit dem Anfangspuncte der Coordinaten O' in einer und derselben geraden Linie liegen, und gleich weit von diesem Anfangspuncte abstehen, so sieht man, daß zu jedem der Gleichung (1) unterliegenden Puncte M ein zweiter, dieser Gleichung ebenfalls entsprechender M' gefunden wird, wenn man von dem ersteren Puncte zu dem Puncte O', dessen Coordinaten in dem der Gleichung (1) zum Grunde liegenden Systeme

$$OH = \xi = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} \text{ und } HO' = v = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$$

sind, eine Gerade zieht, und dieselbe um ein der MO' gleiches Stück verlängert.

Die Gerade MO'M' wie immer verlängert, enthält außer M und M' keinen Punct, dessen Coordinaten der Gleichung (1) Genüge leisten. Denn transformirt man das gegenwärtig vorhandene Coordinatensystem dergestalt, daß die neue Axe der Ordinaten mit MO'M' parallel lauft, so wird dadurch der Grad der Gleichung nicht verändert. Es gehören also zu jeder Abscisse, folglich auch zu der, welche die Gerade MO'M' von der Abscissenaxe abscheidet, nicht mehr als zwei Ordinaten, und deßhalb befinden sich in der MO'M' nicht mehr als zwei Puncte, deren Coordinaten der transformirten, oder was dasselbe ist, der ursprünglichen Gleichung (1) entsprechen.

Wie nun auch immer das uns bis jetzt noch unbekannte, durch die Gleichung (1) vorgestellte, System von Puncten beschaffen seyn mag, so besitzt der Punct O' die Eigenschaft, jede durch ihn gehende Verbindungslinie zweier Puncte, oder wie man sich auch auszudrücken pflegt, jede durch ihn gehende Sehne dieses Systems zu halbiren, und heißt deßwegen ein Mittelpunct oder Centrum desselben. Die obige Entwickelung zeigt, daß, sobald in der Gleichung (1) $B^2 - 4AC$ nicht verschwindet, immer ein solcher Punct, aber nur ein einziger, gefunden werden kann; denn die in I dargestellte Transformation der Coordinaten, welche den Anfangspunct der Coordinaten in diesen Punct verlegt, ist in diesem Falle nur auf eine einzige Art ausführbar. Verschwindet aber $B^2 - 4AC$, so werden ξ und v entweder unendlich, in welchem Falle der Inbegriff aller der Gleichung (1) unterworfenen Puncte gar keinen Mittelpunct besitzt, oder sie nehmen die Form $\frac{0}{0}$ an, d. h. es finden unzählige Mittelpuncte Statt.

In Bezug auf die Transformation II bemerken wir Folgendes. Es seyen y_1 und y_2 die der Gleichung (1) gemäß zu einem bestimmten x gehörenden Werthe von y, z. B. (Fig. 7) für $x = OP$ sey $y_1 = M_1P$, $y_2 = M_2P$, wobei wir uns y_1 und y_2 als reelle Größen denken, so ist $y_1 - y_2 = M_1M_2$ eine Sehne des dieser Gleichung entsprechenden Systems von Puncten, und $y_2 + \frac{y_1 - y_2}{2} = M_2P + NM_2$, d. h. $\frac{y_1 + y_2}{2} = NP$ die der Abscisse $x = OP$ correspondirende Ordinate des Halbirungspunctes N dieser Sehne M_1M_2. Nun gibt uns, wie die Theorie der Glei-

chungen lehrt, der mit verändertem Zeichen genommene Coefficient von y, in der bloß nach y geordneten Gleichung (1), das Product der Summe $y_1 + y_2$ mit dem Coefficienten von y^2; wir haben daher

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{Bx + D}{2A};$$

und wenn wir $\frac{y_1 + y_2}{2} = Y$ setzen:

$$Y = -\frac{Bx + D}{2A}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Halbirungspuncte aller der Axe der y parallelen Sehnen, welche das durch die Gleichung (1) angezeigte System von Puncten zuläßt, in einer geraden Linie, z. B. LN liegen, deren Neigungswinkel gegen die Axe der x die Größe $-\frac{B}{2A}$ zur Tangente hat. Man nennt eine Gerade, welche eine Folge paralleler Sehnen eines Systems von Puncten halbirt, den diesen Sehnen zugehörigen Durchmesser. Der Winkel, unter welchem der Durchmesser LN seine Sehnen trifft, hat die Größe $-\frac{B}{2A}$ zur Cotangente.

Wenden wir das hier Gesagte auf die Gleichung (12) an, so erkennen wir aus dem Mangel des Gliedes, worin das Product $x''y''$ erscheint, daß die derselben zum Grunde liegende Axe Ox'' dem Durchmesser, welcher die auf ihr senkrecht stehenden Sehnen halbirt, in dem Abstande $-\frac{P}{2M}$ parallel lauft, folglich dieser Durchmesser seine Sehnen unter einem rechten Winkel schneidet. Ein solcher Durchmesser heißt vorzugsweise ein Hauptdurchmesser. Verwechseln wir die Axe der x'' mit jener der y'', und wiederholen wir dieselben Schlüsse, so sehen wir, daß, sobald $B^2 - 4AC$, folglich auch N von o verschieden ausfällt, außer dem so eben nachgewiesenen Hauptdurchmesser noch ein zweiter, auf jenem senkrecht stehender, vorhanden ist, dessen Entfernung von der Axe der y'' durch $-\frac{Q}{2N}$ angegeben wird. Beide Hauptdurchmesser begegnen sich offenbar in einem Puncte, für welchen $x'' = -\frac{Q}{2N}$ und $y'' = -\frac{P}{2M}$ ist. Dieser Punct ist der Mittelpunct selbst, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die Coordinaten desselben in Bezug auf die Gleichung (12) nach den Formeln (4) aufsucht.

Siebente Vorlesung.

Über die geometrische Bedeutung einer Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen.

(Fortsetzung.)

Um die geometrische Bedeutung der Gleichung (1), nämlich

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

näher untersuchen zu können, müssen wir die zwei Fälle, wenn $B^2 - 4AC$ von der Nulle verschieden, und wenn diese Größe gleich Null ist, von einander absondern.

Es sey also erstlich $B^2 - 4AC$, nicht $= 0$.

Wenden wir die beiden in der vorhergehenden Vorlesung vorgetragenen Transformationen auf die Gleichung (1) nach einander an, so kommen wir, welche Ordnung wir auch immer bei diesem Geschäfte beobachten wollen, auf die Gleichung

$$(13) \qquad My''^2 + Nx''^2 + H = 0,$$

wobei
$$M = \tfrac{1}{2}(A+C) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2 + B^2},$$
$$N = \tfrac{1}{2}(A+C) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2 + B^2},$$
$$H = F + \frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{B^2 - 4AC};$$

und wenn ξ, v die Coordinaten des Anfangspunctes des neuen Systems in Bezug auf das ursprüngliche Coordinatensystem bezeichnen, und ϕ den Winkel vorstellt, welchen die neue Axe der x'' mit der Axe der x bildet,

$$\xi = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad v = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$$

und $$tg.\,\phi = \frac{A - C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B}$$ ist.

Man kann immer voraussetzen, daß in der Gleichung (1) der Coefficient A keinen negativen Werth besitzt; denn fände das Gegentheil Statt, so dürfte man nur die Zeichen aller Glieder in dieser Gleichung verändern. Unter dieser Annahme ist M offenbar stets eine positive Größe, hingegen N positiv oder negativ, je nachdem $B^2 - 4AC$ das Vorzeichen $-$ oder $+$ erhält.

Lassen wir nun $B^2 - 4AC$ negativ oder N positiv seyn, so haben wir wieder auf die Beschaffenheit der Größe H zu sehen.

Ist H positiv, so entsprechen der Gleichung (13) keine reellen Werthe von x'' und y'', denn es sind dann My''^2 und Nx''^2 positive Größen, welche zu dem positiven H addirt unmöglich Null zur Summe geben können. Die Gleichung (13), und daher auch die Gleichung (1) läßt also in diesem Falle gar keine geometrische Bedeutung zu.

Ist $H = o$, so haben wir

$$My''^2 + Nx''^2 = o;$$

eine Gleichung, welcher außer $x'' = o$, $y'' = o$ keine anderen reellen Werthe von x'' und y'' Genüge leisten. Die Gleichung (13) gehört daher in diesem Falle einem einzigen Puncte, nämlich dem Anfangspuncte der Coordinaten selbst, und dem zu Folge entspricht der Gleichung (1) bloß der Punct, für welchen x und y die Werthe

$$\frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} \text{ und } \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} \text{ haben.}$$

Ist endlich H negativ, so findet, wenn wir $H = -K$ setzen, die Gleichung

$$My''^2 + Nx''^2 = K$$

Statt. Aus dieser folgt

$$y'' = \sqrt{\frac{K - Nx''^2}{M}};$$

aus welchem Ausdrucke erhellet, daß y'' imaginär wird, sobald der numerische Werth von x'' die Größe $\sqrt{\frac{K}{N}}$ übersteigt; hingegen für jedes sowohl positive als negative x'', von o angefangen bis $\sqrt{\frac{K}{N}}$, sich zwei numerisch betrachtet gleiche reelle Werthe von y'', ein positiver und ein negativer, vorfinden. Für $x'' = o$ fallen diese Werthe am größten aus, und haben die Bedeutung $\sqrt{\frac{K}{M}}$; sie nehmen ab, wenn x'' wächst, und verschwinden für $x'' = \pm\sqrt{\frac{K}{N}}$ völlig. Es stellt daher in diesem Falle die vorgelegte Gleichung eine ganz in einem endlichen Raume enthaltene, folglich in sich selbst zurückkehrende krumme Linie oder Curve vor, welche den Anfangspunct der Coordinaten x'', y'' zum Mittelpuncte, und die Axen der x'' und y'' zu Hauptdurchmessern hat, und von letzteren in congruirende Theile getheilt wird. Diese Curve führt den Namen Ellipse. Die von ihr begrenzten Theile ihrer

Hauptdurchmesser heißen ihre **Hauptaxen**. Bezeichnet man die Hälften dieser Hauptaxen, nämlich $\sqrt{\frac{H}{N}}$ und $\sqrt{\frac{H}{M}}$, durch a und b, und führt man die letzteren Größen in obige Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

$$\text{oder} \quad b^2 x''^2 + a^2 y''^2 = a^2 b^2.$$

Wenn M und N einander nicht gleich sind, so ist stets $M > N$, und daher auch $a > b$. Fallen aber M und N gleich aus, was nur dann seyn kann, wenn $\sqrt{(A - C)^2 + B^2}$ verschwindet, also $B = 0$ und $A = C$ ist, so wird auch $a = b$, und die Gleichung der Ellipse geht in

$$x''^2 + y''^2 = a^2$$

über. Aber $\sqrt{x''^2 + y''^2}$ ist die Verbindungslinie des Anfangspunctes der Coordinaten x'', y'' mit irgend einem Puncte der Curve, daher gehört die letztere Gleichung einem Kreise, dessen Halbmesser $= a$ ist. Die Coordinaten des Mittelpunctes dieses Kreises, in Bezug auf das der Gleichung (1) zum Grunde liegende Coordinatensystem, sind

$$\xi = -\frac{E}{2A}, \quad \upsilon = -\frac{D}{2A},$$

und sein Halbmesser $a = \sqrt{\frac{H}{M}}$ wird durch

$$\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}$$

ausgedrückt.

Wenden wir uns jetzt zur Betrachtung des Falles, wenn in der Gleichung (1) $B^2 - 4AC$ positiv, folglich in der daraus abgeleiteten Gleichung (13) N negativ ist.

Der leichteren Übersicht wegen sey $N = -U$, so daß wir es mit der Gleichung

(14) $$My''^2 - Ux''^2 + H = 0$$

zu thun haben.

Ist hier $H = 0$, so geht diese Gleichung in

$$My''^2 - Ux''^2 = 0$$

über, welche letztere Gleichung sich in die zwei einfacheren

$$y''\sqrt{M} + x''\sqrt{U} = 0 \quad \text{und} \quad y''\sqrt{M} - x''\sqrt{U} = 0$$

zerfällen läßt, und deßhalb zwei im Anfangspuncte der Coordinaten

x'', y'' sich schneidende, gegen die Axe der x'' unter gleichen Winkeln geneigte gerade Linien vorstellt, für welche $+\sqrt{\frac{U}{M}}$ und $-\sqrt{\frac{U}{M}}$ die Tangenten der Neigungswinkel sind.

Ist H eine positive Größe, so gibt uns die obige Gleichung

$$y'' = \pm\sqrt{\frac{Ux''^2 - H}{M}}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß allen zwischen o und $\pm\sqrt{\frac{H}{U}}$ enthaltenen Abscissen imaginäre Werthe von y'' entsprechen, und nur jene positiven oder negativen Abscissen, deren numerische Werthe $\sqrt{\frac{H}{U}}$ übertreffen, reelle Ordinaten zulassen. Jede der letzteren Abscissen besitzt zwei gleiche, mit entgegengesetzten Zeichen versehene Ordinaten, deren Werthe mit x'' zugleich in das Unendliche zunehmen. Es stellt daher die vorgelegte Gleichung (14) eine zu beiden Seiten der Abscissenaxe, sowohl nach der Richtung der positiven als auch nach der Richtung der negativen Abscissen, in das Unendliche sich erstreckende krumme Linie, die sogenannte Hyperbel, vor, deren vier divergirende Äste in Bezug auf die Axen der x'' und der y'' übereinstimmende Lagen besitzen.

Für $x''=o$ gibt die Gleichung der Hyperbel $y''=\pm\sqrt{-\frac{H}{M}}$; woraus erhellet, daß die Curve von der Axe der y'' gar nicht getroffen wird. Um jedoch die zwischen der Ellipse und Hyperbel, ihrer Abstammung aus der allgemeinen Gleichung (1) zu Folge, bestehende Analogie noch mehr zu befestigen, wollen wir

$$\sqrt{\frac{H}{U}} = a \quad \text{und} \quad \sqrt{-\frac{H}{M}} = b\sqrt{-1}$$

setzen, wodurch die Gleichung der Hyperbel die Form

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

$$\text{oder} \quad b^2x''^2 - a^2y''^2 = a^2b^2$$

annimmt. Die Größe 2a ist der numerische Werth des von der Hyperbel begrenzten Stückes der Axe der x'', welches die Queraxe der Hyperbel heißt; die Größe 2b hingegen pflegt die conjugirte Axe dieser Curve genannt zu werden

Ist $M=U$, was nur dann Statt finden kann, wenn $A+C$ verschwindet oder $A=-C$ ist, so sind die Werthe von a und b einander gleich, und die Hyperbel heißt sodann eine gleichseitige.

Der Fall, wenn H einen negativen Werth, welchen wir durch $-K$ vorstellen wollen, besitzt, läßt sich auf den vorigen zurückführen, und bietet also nichts Neues dar. Denn verwechselt man in der Gleichung

$$My''^2 - Ux''^2 - K = o$$

die Abscissenaxe mit jener der Ordinaten, so geht dieselbe in

$$Uy''^2 - Mx''^2 + K = o$$

über, welche letztere Gleichung mit der oben betrachteten (14) der Form nach einerlei ist, und daher ebenfalls einer Hyperbel gehört, deren Querare jedoch die Richtung der ursprünglichen Axe der y'' hat.

Um die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o$$

unter der Voraussetzung $B^2 - 4AC = o$ kennen zu lernen, bleibt uns nichts anderes übrig, als die in der vorhergehenden Vorlesung gegebene Transformation II. anzuwenden; denn die Transformation I. kann, wie wir bereits früher bemerkt haben, in diesem Falle nicht gebraucht werden.

Da wegen $B^2 = 4AC$ die Wurzelgröße $\sqrt{(A-C)^2 + B^2} = A + C$ wird, so erhalten wir die transformirte Gleichung

(15) $$My''^2 + Py'' + Qx'' + F = o,$$

wobei $M = A + C$, $tg.\psi = -\sqrt{\frac{C}{A}}$,

$$P = D\,cos.\psi - E\,sin.\psi = \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C}}{\sqrt{A+C}},$$

$$Q = D\,sin.\psi + E\,cos.\psi = \frac{E\sqrt{A} - D\sqrt{C}}{\sqrt{A+C}}$$ ist.

Hier sind nun zwei Fälle zu betrachten. Es ist entweder $Q = o$ oder Q von Null verschieden.

Ist $Q = o$, so haben wir es mit der Gleichung

(16) $$My''^2 + Py'' + F = o$$

zu thun, in welcher x'' gar nicht vorkommt, die uns demnach für y'' bloß unveränderliche Werthe gibt, und deßwegen entweder gar keine geometrische Bedeutung zuläßt, oder sich bloß auf gerade, der Axe der x'' parallele Linien bezieht, je nachdem diese Werthe imaginär oder reell sind. Um diese untergeordneten Fälle zu unterscheiden, suchen

wir aus dieser Gleichung den Werth von y''. Wir finden

$$y'' = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4MF}}{2M}.$$

Ist hier $P^2 - 4MF$ negativ, so fallen beide Werthe von y'' imaginär aus, und die vorgelegte Gleichung hat keine geometrische Bedeutung.

Ist $P^2 - 4MF = 0$, so wird $y'' = -\frac{P}{2M}$. Unsere Gleichung drückt sodann eine der Axe der x'' in der Entfernung $-\frac{P}{2M}$ parallel laufende Gerade aus.

Ist endlich $P^2 - 4MF$ eine positive Größe, so gehört die obige Gleichung zweien zur Axe der x'' parallelen Geraden, deren Entfernungen von dieser Axe

$$\frac{-P + \sqrt{P^2 - 4MF}}{2M} \quad \text{und} \quad \frac{-P - \sqrt{P^2 - 4MF}}{2M}$$

sind.

Will man $P^2 - 4MF$ auf Größen zurückführen, welche unmittelbar durch die Gleichung (1) gegeben sind, so bedenke man, daß wegen $Q = 0$, $E\sqrt{A} = D\sqrt{C}$, folglich

$$P = \sqrt{D^2 + E^2}, \quad M = A\left(\frac{D^2 + E^2}{D^2}\right),$$

und daher $P^2 - 4MF = \left(\frac{D^2 + E^2}{D^2}\right)(D^2 - 4AF)$ ist.

Da $\frac{D^2 + E^2}{D^2}$ jederzeit einen positiven Werth besitzt, so hängt das Zeichen der Größe $P^2 - 4MF$ bloß von dem Zeichen des Ausdruckes $D^2 - 4AF$ ab.

Aus den Gleichungen $B^2 - 4AC = 0$ oder $B = 2\sqrt{AC}$, und $Q = 0$ oder $E\sqrt{A} = D\sqrt{C}$ folgt auch

$$2AE = BD$$
$$\text{und} \quad 2CD = BE,$$

daher geben die Formeln (4) der vorhergehenden Vorlesung in diesem Falle $\xi = \frac{0}{0}$ und $v = \frac{0}{0}$.

Natürlich finden hier unzählige Mittelpuncte Statt, welche sämmtlich in einer geraden Linie liegen, die den beiden durch obige Gleichung ausgedrückten in der Hälfte ihres gegenseitigen Abstandes parallel

läuft, oder, falls diese zwei Geraden in eine zusammenfallen, mit letzterer identisch ist.

Es sey nun Q von o verschieden. Man setze in der Gleichung (15), nämlich in $My''^2 + Py'' + Qx'' + F = o$

$$x'' = x' + \xi, \quad y'' = y' + v,$$

so verwandelt sich dieselbe in

$$My'^2 + (2Mv + P)y' + Qx' + Mv^2 + Pv + Q\xi + F = o,$$

und bezieht sich in dieser Gestalt auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Axen jenen der x'' und y'' parallel liegen, und dessen Anfangspunct im früheren Systeme die Coordinaten ξ und v hat.

Man kann v immer so wählen, daß

$$2Mv + P = o$$

wird, und dabei ξ so bestimmen, daß die Gleichung

$$Mv^2 + Pv + Q\xi + F = o$$

Statt findet. Es bedarf hiezu nur der Annahme

$$v = -\frac{P}{2M} \text{ und } \xi = \frac{P^2 - 4MF}{4MQ}.$$

Hiedurch erhält obige Gleichung die einfachere Gestalt

$$My'^2 + Qx' = o,$$

welche man, wenn man $-\frac{Q}{M} = a$ setzt, auch so schreiben kann:

$$y'^2 = ax'.$$

Diese Gleichung gibt für jeden mit a dem Zeichen nach übereinstimmenden Werth von x' zwei reelle, gleiche und entgegengesetzte Werthe für y', welche bei dem unendlichen Zunehmen von x' gleichfalls unendlich wachsen; sobald aber x' der Größe a dem Zeichen nach entgegengesetzt ist, wird y' imaginär. Es gehört demnach die erwähnte Gleichung einer Curve, welche sich mit zwei beiderseits der Abscissenaxe liegenden und von ihr symmetrisch divergirenden Schenkeln nach der Beschaffenheit von a entweder bloß nach der Gegend der positiven oder bloß nach jener der negativen Abscissen in das Unendliche ausbreitet, und den Namen Parabel führt. Die beständige Größe a heißt ihr Parameter, und der der Abscisse $x' = o$ gehörende Punct, in welchem die Axe der x' die Curve trifft, ihr Scheitel.

Die Axe der x' ist, wie man sieht, ein Hauptdurchmesser der Parabel, und wird die **Hauptaxe** derselben genannt.

Fassen wir alle durch die hier dargestellte Analyse gewonnenen Resultate zusammen, so sehen wir, daß eine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen, in geometrischer Beziehung entweder 1) gar nichts bedeutet,

oder 2) einem Puncte,
» 3) einer geraden Linie,
» 4) zwei parallelen geraden Linien,
» 5) zwei sich durchschneidenden geraden Linien,
» 6) einer Ellipse (einem Kreise),
» 7) einer Hyperbel,
» 8) einer Parabel

gehört.

Achte Vorlesung.

Über einige Eigenschaften der Linien der zweiten Ordnung.

Da die Curven, welche wir in der vorhergehenden Vorlesung unter den Benennungen Ellipse, Hyperbel und Parabel kennen gelernt haben, aus der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei Variablen gemeinschaftlich entspringen, so besitzen sie auch, der Verschiedenheit ihrer Gestalten ungeachtet, analoge Eigenschaften. Um die Verwandtschaft dieser Curven, welche man ihres Ursprunges wegen die Linien der zweiten Ordnung zu nennen pflegt, noch in ein helleres Licht zu setzen, wollen wir ihre einfachsten, auf ihre Hauptaxen sich beziehenden Gleichungen in das Auge fassen.

Für die Ellipse und Hyperbel haben wir die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erhalten. Aus denselben erhellet, daß die eine Curve in die andere übergeht, wenn man b in $b\sqrt{-1}$ verwandelt. Es wird dieß daher auch mit allen übrigen auf diese Curven sich beziehenden Ausdrücke, worin a und b vorkommen, der Fall seyn, und deßhalb die Übertragung der Eigenschaften der Ellipse auf die Hyperbel, und umgekehrt, keiner Schwierigkeit unterliegen.

Die Gleichung der Parabel, deren Hauptaxe und Scheitel die Axe der Abscissen und den Anfangspunct der Coordinaten vorstellen, ist

$$y^2 = ax.$$

Obschon diese Gleichung von den beiden obigen wesentlich abzuweichen scheint, so zeigt sich doch sogleich ihre Verbindung mit denselben, wenn man daselbst den Anfangspunct der Coordinaten, ohne Änderung der Richtung der Abscissen- und Ordinatenaxe, in den Durchschnittspunct der Abscissenaxe mit der Curve verlegt, was für die Ellipse durch die Substitution von $a - x$ statt x, und für die Hyperbel durch die Substitution von $a + x$ statt x bewerkstelliget wird, weil in ersterer Curve jede Abscisse, vom Centrum aus gerechnet, kleiner, und

in letzterer Curve größer ist, als a. Wir erhalten somit für die Ellipse die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2ax - x^2}{a^2},$$

und für die Hyperbel

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2ax + x^2}{a^2};$$

oder, wenn wir $\frac{2b^2}{a} = \alpha$ setzen, und beide Gleichungen in eine zusammenziehen:

$$y^2 = \alpha x \mp \frac{\alpha x^2}{2a}.$$

Lassen wir nun für ein und dasselbe x den Werth für a unendlich zunehmen, α hingegen ungeändert bleiben, oder allgemeiner einer fixen Grenze β sich unendlich nähern, was demnach auch eine unendliche Vergrößerung von b mit sich bringt; so nähert sich der durch letztere Gleichung gegebene Werth von y^2 unendlich der Grenze βx, d. h. dem Werthe, welchen die Gleichung der Parabel, deren Parameter β ist, darbietet. Man kann also eine mit dem Parameter β beschriebene Parabel als die Grenze betrachten, der sich eine Ellipse oder Hyperbel unendlich nähert, wenn die größere Axe 2a der ersteren, oder die Queraxe 2a der letzteren sammt der zugehörigen kleineren oder conjugirten Axe 2b dergestalt wächst, daß $lim. \frac{b^2}{a} = \beta$ ist. Diese Bemerkung dient dazu, Eigenschaften, welche für die Ellipse oder Hyperbel bewiesen worden sind, der Parabel anzupassen. Der Quotient $\frac{b^2}{a}$ pflegt auch der **Parameter** der Ellipse oder Hyperbel genannt zu werden.

Nehmen wir nun an, die Gleichung

$$(1) \quad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

gehöre einer Ellipse oder einer Hyperbel, d. h. in derselben sey $B^2 - 4AC$ von 0 verschieden, und denken wir uns, indem wir

$$x + \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} \text{ statt } x,$$

$$\text{und } y + \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} \text{ statt } y$$

setzen, den Anfangspunct der Coordinaten ohne Änderung der Richtung der Axen in das Centrum O der Curve (Fig. 8, a und b) verlegt, wodurch die Gleichung (1) in

$$(2) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + H = 0$$

übergeht, wenn wir nämlich die Größe $F + \frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{B^2 - 4AC}$ durch H anzeigen, so werden alle auf die Abscissenaxe Ox senkrechten Sehnen, wie MN, mn, durch eine Gerade qQG halbirt, deren Gleichung (sechste Vorlesung)

$$(3) \qquad Y = -\frac{B}{2A}x$$

ist, und die, weil hier Y für $x = 0$ verschwindet, offenbar durch das Centrum O geht. Aus der Form der Gleichung (2) folgt, den in der angeführten Vorlesung gemachten Schlüssen gemäß, daß die den gleichen und entgegengesetzt liegenden Abscissen OP und Op auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe zugehörigen Ordinaten MP und np einander gleich sind; da nun auch $PQ = pq$ ist, so haben wir

$$qn = mq = MQ,$$

woraus hervorgeht, daß die Sehne Mm dem Durchmesser OG parallel lauft, und von der Axe der y in S halbirt wird. Es ist nicht schwer hieraus zu schließen, daß überhaupt der Halbirungspunct jeder der OG parallelen Sehne der krummen Linie in der Oy liegt, also OG, Oy zwei Durchmesser der Curve sind, deren jeder die dem anderen parallelen Sehnen in gleiche Theile abtheilt. Man nennt solche Durchmesser zusammengehörige oder conjugirte. Da endlich die Form der Gleichung (3) bei jeder Transformation der Coordinaten mit Beibehaltung des jetzigen Anfangspunctes dieselbe bleibt, so gehen alle Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel durch das Centrum, so wie es auch zu jeder durch das Centrum gezogenen Geraden eine Folge paralleler Sehnen gibt, die durch diese Gerade halbirt werden.

Bezeichnen wir die Hälften OG, OE zweier conjugirter Durchmesser einer Ellipse durch m und n, so haben wir, wenn die Gleichung der Curve so eingerichtet ist, daß die Axe der x auf dem letzteren senkrecht steht, wie es bei den obigen Betrachtungen mit der Gleichung (2) wirklich der Fall war, für $x = 0$, $y = n$, also

$$n^2 = -\frac{H}{A}.$$

Um einen Ausdruck für m zu erhalten, seyen die Coordinaten des Punctes G gleich h und k, so gibt uns, weil G ein Punct der Curve ist, die Gleichung (2)

$$Ak^2 + Bhk + Ch^2 + H = 0,$$

und weil G in der Geraden OG liegt, die Gleichung (3)

$$k = -\frac{B}{2A}h;$$

daher finden wir durch Verbindung der zwei letzteren Gleichungen

$$h^2 = \frac{4AH}{B^2 - 4AC}, \quad k^2 = \frac{B^2 H}{A(B^2 - 4AC)}.$$

Es ist aber $m^2 = h^2 + k^2$, folglich

$$m^2 = \frac{H(4A^2 + B^2)}{A(B^2 - 4AC)}.$$

Wir haben der vorhergehenden Vorlesung zu Folge für die Hälften a und b der Hauptdurchmesser der Ellipse die Ausdrücke

$$a^2 = -\frac{H}{N}, \quad b^2 = -\frac{H}{M},$$

wobei $M = \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2}$

und $N = \frac{1}{2}(A + C) - \frac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2}$

ist. Mittelst derselben läßt sich zwischen a, b, m, n eine einfache Relation angeben. Es ist nämlich, diesen Resultaten gemäß, sowohl

$$a^2 + b^2 = -\frac{H(M + N)}{MN} = \frac{4H(A + C)}{B^2 - 4AC}$$

als auch $m^2 + n^2 = \frac{4H(A + C)}{B^2 - 4AC}$, also

(4) $$m^2 + n^2 = a^2 + b^2.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Summe der Quadrate zweier zusammengehöriger Durchmesser einer Ellipse eine unveränderliche Größe ist.

Der Winkel $EOG = \omega$, unter welchem sich die conjugirten Durchmesser 2m und 2n begegnen, macht mit dem Winkel GOx, unter welchem der erstere gegen die Axe der x geneigt ist, einen rechten aus, und hat daher $-\frac{B}{2A}$ zur Cotangente, folglich $-\frac{2A}{\sqrt{4A^2 + B^2}}$ zum Sinus.

Es besteht also die Gleichung

$$m^2 n^2 \sin.\omega^2 = -\frac{4H^2}{B^2 - 4AC};$$

aber es ist auch

$$a^2 b^2 = \frac{H^2}{MN} = -\frac{4H^2}{B^2 - 4AC},$$

daher haben wir

(5) $$mn \sin.\omega = ab,$$

d. h. das Rechteck aus zwei zusammengehörigen Durchmessern einer Ellipse ist ebenfalls unveränderlich.

Die Gleichungen (4) und (5) geben a und b, wenn man m, n und ω kennt.

Da $sin.\,\omega = -\frac{2A}{\sqrt{4A^2+B^2}}$ ist, so erhalten wir

$$cos.\,\omega = \frac{B}{\sqrt{4A^2+B^2}}, \text{ und hieraus}$$

$$sin.\,2\omega = 2\,sin.\,\omega\,cos.\,\omega = -\frac{4AB}{4A^2+B^2},$$

$$cos.\,2\omega = cos.\,\omega^2 - sin.\,\omega^2 = \frac{B^2-4A^2}{4A^2+B^2},$$

folglich $$m^2\,sin.\,2\omega = -\frac{4HB}{B^2-4AC},$$

$$m^2\,cos.\,2\omega = \frac{H(B^2-4A^2)}{A(B^2-4AC)},$$

also $$m^2\,cos.\,2\omega + n^2 = \frac{4H(C-A)}{B^2-4AC}$$

und $$\frac{m^2\,sin.\,2\omega}{m^2\,cos.\,2\omega+n^2} = \frac{B}{A-C}.$$

Nennen wir den Winkel, welchen die Hauptaxe $a = AO$ mit der Axe der x bildet, ψ, so haben wir

$$\frac{B}{A+C} = -\,tg.\,2\psi.$$

Aber der Winkel zwischen OA und OE, d. i. der Winkel zwischen a und n, er heiße θ, macht mit ψ einen rechten aus, oder es ist $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$, folglich $2\psi = \pi - 2\theta$, und daher $-tg.\,2\psi = tg.\,2\theta$; es besteht demnach die Gleichung

$$(6) \qquad tg.\,\theta = \frac{m^2\,sin.\,2\omega}{m^2\,cos.\,2\omega+n^2}.$$

Mittelst derselben läßt sich die Lage der Hauptaxe a gegen den Durchmesser n angeben, wenn m, n und der Winkel ω bekannt sind.

Für die Hyperbel gelten ähnliche Formeln, nur ist in Bezug auf diese Curve eine der Größen m, n imaginär, also ihr Quadrat negativ.

In der Parabel sind alle Durchmesser zur Hauptaxe parallel, denn die Voraussetzung $B^2 - 4AC = 0$ gibt für die Tangente der Neigung des zu den Ordinaten der Gleichung (1) gehörenden Durchmessers gegen die Axe der x, nämlich für $-\frac{B}{2A}$, den Ausdruck

$-\sqrt{\frac{C}{A}}$; und dieser ist, wie wir in der vorhergehenden Vorlesung gesehen haben, auch die Tangente des Winkels, den die Hauptaxe der Curve mit der Axe der x darstellt.

Es werde nun von irgend einem Puncte der größeren Hauptaxe 2a einer Ellipse, dessen Abstand vom Mittelpuncte derselben u heiße, zu dem Puncte x, y dieser Curve eine Gerade r gezogen, so haben wir, wenn wir die genannte Hauptaxe der Ellipse für die Axe der x, und das Centrum für den Anfangspunct der Coordinaten nehmen, die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

worin b die Hälfte der anderen Hauptaxe anzeigt. Da nun

$$r = \sqrt{(x-u)^2 + y^2}$$

ist, so ergibt sich, wenn wir y durch x ausdrücken:

$$r = \sqrt{u^2 + b^2 - 2ux + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2}.$$

Hier bietet sich die Frage dar, wie u angenommen werden müsse, damit die Gerade r durch die Abscisse x in einem in Bezug auf dieselbe rationalen Ausdrucke dargestellt erscheine. Offenbar wird die Größe unter dem Wurzelzeichen für jeden Werth von x ein vollständiges Quadrat, wenn das Product des von x freien Gliedes mit dem Coefficienten von x^2 dem vierten Theile des Quadrates des Coefficienten von x gleich kommt, oder wenn

$$(u^2 + b^2)\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = u^2$$

ist. Hieraus folgt

(7) $$u = \sqrt{a^2 - b^2},$$

und hiedurch wird

$$r = \sqrt{u^2 + b^2} + \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ oder}$$

$$r = \pm a \pm \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Die Combinationen der Zeichen + und — geben uns vier Werthe von r; da aber in der Ellipse offenbar $\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ dem numerischen Werthe nach kleiner ist, als a, und r eine positive Größe seyn soll,

so finden nur folgende zwei Werthe des r Statt:

(8) $r_1 = a - \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ und $r_2 = a + \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$,

welche den zwei Werthen von u, nämlich

$$+\sqrt{a^2 - b^2} \text{ und } -\sqrt{a^2 - b^2}$$

correspondiren. Es gibt also in der Richtung der größeren Hauptaxe einer Ellipse bloß zwei, diesseits und jenseits des Mittelpunctes liegende und von demselben gleich weit abstehende Puncte, in Bezug auf welche alle an die Curve gezogene gerade Linien sich durch die Abscissen ihrer Endpuncte rational ausdrücken lassen. Man nennt diese zwei Puncte die Brennpuncte der Ellipse.

Da, wie obige Ausdrücke zeigen, die Gleichung

(9) $$r_1 + r_2 = 2a$$

besteht, d. i. die Summe der beiden aus den Brennpuncten zu irgend einem Puncte der Ellipse gehenden Geraden, die man vorzugsweise die Radienvectoren dieses Punctes heißt, jederzeit der größeren Hauptaxe der Curve gleich ist, so haben wir ein leichtes Mittel, diese Curve zu verzeichnen, und uns eine genaue Vorstellung von ihrer Gestalt zu verschaffen.

Der Abstand eines Brennpunctes vom Mittelpuncte, nämlich die Größe $\sqrt{a^2 - b^2}$, wird von einigen Schriftstellern die Excentricität der Ellipse genannt; andere geben dem Quotienten $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ diesen Namen.

Die durch einen Brennpunct gehende, auf die größere Axe senkrechte Sehne der Ellipse, oder was dasselbe heißt, die doppelte Länge der Ordinate, welche der Abscisse $\sqrt{a^2 - b^2}$ zugehört, ist, wie die Gleichung dieser Curve lehrt, $= 2 \cdot \frac{b^2}{a}$, folglich dem Parameter derselben gleich.

In der kleineren Hauptaxe der Ellipse gibt es keine Brennpuncte; denn wollte man die obige Rechnung für diese Axe anstellen, so fände man offenbar $u = \sqrt{b^2 - a^2}$, welches eine imaginäre Größe ist. Auch überzeugt man sich leicht durch die Form, welche der Gleichung der Ellipse zu Theil wird, wenn man einen von den Hauptaxen verschiedenen Durchmesser zur Abscissenaxe nimmt, daß auch in diesem keine mit der oben erwähnten Eigenschaft begabten Puncte liegen.

Die Hyperbel bietet ähnliche Eigenschaften wie die Ellipse dar; in der verlängerten Queraxe derselben liegen zwei Brennpuncte, deren vom Centrum der Curve aus gerechnete Abscissen $+\sqrt{a^2+b^2}$ und $-\sqrt{a^2+b^2}$ sind. Für die von diesen Brennpuncten ausgehenden Radienvectoren bestehen die Gleichungen

$$(10)\quad r_1 = \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a} - a \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a} + a,$$

daher ist für die Hyperbel

$$(11)\qquad r_2 - r_1 = 2a,$$

d. h. die Differenz der Radienvectoren jedes Punctes dieser Curve ist der Queraxe gleich.

Um diese Resultate auf die Parabel auszudehnen, nehmen wir einen der Scheitel der Ellipse zum Anfangspuncte der Coordinaten, so werden die Abscissen der Brennpuncte durch

$$a - \sqrt{a^2-b^2} \quad \text{und} \quad a + \sqrt{a^2-b^2}, \quad \text{oder durch}$$

$$\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}} \quad \text{und} \quad \frac{b^2}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$$

ausgedrückt, welche Größen, wenn man in dieselben den Parameter $\frac{2b^2}{a} = \alpha$ einführt, in

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha}{1+\sqrt{1-\frac{\alpha}{2a}}} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{1}{2}\alpha}{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{2a}}}$$

übergehen. Bei dem unendlichen Wachsen von a nähert sich die erstere Größe der Grenze $\frac{1}{4}\alpha$ unendlich, und die letztere nimmt unendlich zu: woraus erhellet, daß die Parabel bloß einen um die halbe Länge des Parameters vom Scheitel entfernten Brennpunct besitzt. Der von demselben an die Curve gezogene Radiusvector ergibt sich aus der Formel

$$(12)\qquad r = \tfrac{1}{4}\alpha + x,$$

welche mittelst der oben gebrauchten Schlüsse aus der ersteren der Gleichungen (7) folgt.

Neunte Vorlesung.

Über die geometrische Bedeutung einer Gleichung des zweiten Grades zwischen drei veränderlichen Größen.

Die allgemeinste Form einer Gleichung des zweiten Grades zwischen drei Variablen x, y, z ist

(1) $Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dyz + Exz + Fxy + Gz + Hy + Ix + K = 0.$

Beziehen wir dieselbe auf irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem, so läßt sie sich, auf ähnliche Art, wie dieß in der sechsten Vorlesung mit der Gleichung zwischen zwei Variablen geschehen ist, durch eine schickliche Transformation der Coordinaten auf eine einfachere Gestalt reduciren. Hiezu dienen vornehmlich folgende zwei Umstaltungen.

I. Man versetze den Anfangspunct der Coordinaten auf den Punct ξ, v, ζ, während die Axen der neuen Coordinaten x', y', z' den vorigen parallel bleiben, so hat man $x = x' + \xi$, $y = y' + v$, $z = z' + \zeta$, und die Gleichung (1) verwandelt sich in

(2) $$\begin{aligned} &Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 + Dy'z' + Ex'z' + Fx'y' \\ &+ (2A\zeta + Dv + E\xi + G)\,z' \\ &+ (2Bv + D\zeta + F\xi + H)\,y' \\ &+ (2C\xi + E\zeta + Fv + I)\,x' \\ &+ A\zeta^2 + Bv^2 + C\xi^2 + Dv\zeta + E\xi\zeta + F\xi v \\ &\qquad + G\zeta + Hv + I\xi + K = 0. \end{aligned}$$

Setzt man nun

(3) $$\begin{aligned} 2A\zeta + Dv + E\xi + G &= 0, \\ 2Bv + D\zeta + F\xi + H &= 0, \\ 2C\xi + E\zeta + Fv + I &= 0, \end{aligned}$$

so findet man

(4) $$\xi = \frac{(DF - 2BE)\,G + (DE - 2AF)\,H + (4AB - D^2)\,I}{2(AF^2 + BE^2 + CD^2) - 8ABC - 2DEF},$$

$$v = \frac{(EF - 2CD)\,G + (4AC - E^2)\,H + (DE - 2AF)\,I}{2(AF^2 + BE^2 + CD^2) - 8ABC - 2DEF},$$

$$\zeta = \frac{(4BC - F^2)\,G + (EF - 2CD)\,H + (DF - 2BE)\,I}{2(AF^2 + BE^2 + CD^2) - 8ABC - 2DEF}.$$

Diese Ausdrücke zeigen, daß man, wenn die Größe

$$AF^2 + BE^2 + CD^2 - 4ABC - DEF$$

nicht verschwindet, aus der Gleichung (2) jederzeit die Glieder, in welchen die Coordinaten x', y', z' allein und in der ersten Potenz stehen, wegschaffen, also diese Gleichung auf die Form

$$(5)\quad Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 + Dy'z' + Ex'z' + Fx'y' + L = 0$$

bringen kann, wobei

$$L = A\zeta^2 + B\upsilon^2 + C\xi^2 + D\upsilon\zeta + E\xi\zeta + F\xi\upsilon + G\zeta + H\upsilon + I\xi + K$$

ist.

Multiplicirt man die Gleichungen (3) der Reihe nach mit $\frac{1}{2}\zeta$, $\frac{1}{2}\upsilon$, $\frac{1}{2}\xi$, und addirt man sie sodann, so ergibt sich

$$A\zeta^2 + B\upsilon^2 + C\xi^2 + D\upsilon\zeta + E\xi\zeta + F\xi\upsilon + \tfrac{1}{2}G\zeta + \tfrac{1}{2}H\upsilon + \tfrac{1}{2}I\xi = 0;$$

und wenn man diesen Ausdruck von dem obigen Werthe der Größe L abzieht:

$$L = K + \tfrac{1}{2}G\zeta + \tfrac{1}{2}H\upsilon + \tfrac{1}{2}I\xi,$$

d. h. mit Rücksicht auf die Ausdrücke (4):

$$(6)\quad L = K + \frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}(4BC - F^2)G^2 + \frac{1}{2}(4AC - E^2)H^2 + \frac{1}{2}(4AB - D^2)I^2 \\ + (EF - 2CD)GH + (DF - 2BE)GI + (DE - 2AF)HI\end{array}\right\}}{2(AF^2 + BE^2 + CD^2) - 8ABC - 2DEF}.$$

II. Man behalte den Anfangspunct des der Gleichung (1) zum Grunde liegenden Coordinatensystems bei, und ändere die Richtung der Axen desselben, wobei, um die Rechnung besser übersehen zu können, vor der Hand vorausgesetzt werde, daß die neue Axe der x'' in der Ebene xy liege, so bestehen, wenn die übrigen Coordinaten y'' und z'' heißen, den in der ersten Vorlesung entwickelten Formeln (9) zu Folge, wegen $\varphi = 0$, die Gleichungen

$$x = x'' \cos.\psi - y'' \sin.\psi \cos.\theta - z'' \sin.\psi \sin.\theta,$$
$$y = x'' \sin.\psi + y'' \cos.\psi \cos.\theta + z'' \cos.\psi \sin.\theta,$$
$$z = - y'' \sin\theta + z'' \cos.\theta,$$

in welchen ψ den Winkel zwischen den Axen der x und x'', und θ den Winkel zwischen den Ebenen xy und $x''y''$ anzeigt.

Substituirt man diese Ausdrücke statt der Coordinaten x, y, z in der Gleichung (1), so kann man wegen der Unbestimmtheit der zwei Größen ψ und θ versuchen, aus der dadurch erhaltenen Gleichung zwei Glieder zu beseitigen. Wir wollen hier die Glieder, welche die Pro-

ducte $x''z''$ und $y''z''$ als Factoren enthalten, in das Auge fassen, und die Werthe von ψ und θ bestimmen, für welche die Coefficienten der genannten Glieder verschwinden. Fallen diese Werthe jederzeit reell aus, so läßt sich die so eben angedeutete Vereinfachung der Gleichung (1) immer bewerkstelligen.

Die Coefficienten von $x''z''$ und $y''z''$ in der transformirten Gleichung lassen sich mittelst der obigen Ausdrücke für x, y, z leicht angeben, ohne daß es nöthig ist, die ganze transformirte Gleichung zu berechnen. Man findet

den Coefficienten von $x''z''$

$$= 2(B - C) \sin.\psi \cos.\psi \sin.\theta + F(\cos.\psi^2 - \sin.\psi^2) \sin.\theta + (E \cos.\psi + D \sin.\psi) \cos.\theta,$$

und den Coefficienten von $y''z''$

$$= 2(C \sin.\psi^2 + B \cos.\psi^2 - A - F \sin.\psi \cos.\psi) \sin.\theta \cos.\theta + (D \cos.\psi - E \sin.\psi)(\cos.\theta^2 - \sin.\theta^2).$$

Es sey also sowohl der eine als auch der andere dieser Coefficienten $= 0$, so hat man, wenn man den ersteren durch $\cos.\theta$, und den letzteren durch $\cos.\theta^2$ dividirt, die Gleichungen

$$(7) \quad [2(B - C) \sin.\psi \cos.\psi + F(\cos.\psi^2 - \sin.\psi^2] \, tg.\theta + E \cos.\psi + D \sin.\psi = 0,$$

$$(8) \quad 2(C \sin.\psi^2 + B \cos.\psi^2 - A - F \sin.\psi \cos.\psi) \, tg.\theta + (D \cos.\psi - E \sin.\psi)(1 - tg.\theta^2) = 0.$$

Sucht man aus (7) den Werth von $tg.\theta$, und substituirt man denselben in (8), so erhält man nach einer leichten Rechnung die Gleichung

$$(9) \quad 2(C \sin.\psi^2 + B \cos.\psi^2 - F \sin.\psi \cos.\psi - A)(D \sin.\psi + E \cos.\psi) \times \\ \times \big(2(C - B) \sin.\psi \cos.\psi - F(\cos.\psi^2 - \sin.\psi^2)\big) \\ + (D \cos.\psi - E \sin.\psi)\big[\big(2(C - B) \sin.\psi \cos.\psi - F(\cos.\psi^2 - \sin.\psi^2)\big)^2 \\ - (D \sin.\psi + E \cos.\psi)^2\big] = 0,$$

aus welcher nun der Werth von ψ bestimmt werden muß.

Man setze zu diesem Behufe $tg.\psi = u$, so wird

$$\sin.\psi = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad \cos.\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}},$$

und die Gleichung (9) verwandelt sich in

$$2\big(Cu^2 + B - Fu - A(1 + u^2)\big)(Du + E)\big(2(C - B)u - F(1 - u^2)\big) \\ + (D - Eu)\big[\big(2(C - B)u - F(1 - u^2)\big)^2 - (1 + u^2)(Du + E)^2\big] = 0$$

oder in

$$(10)\ [2(C-B)u-F(1-u^2)][2(Cu^2+B-Fu-A(1+u^2))(Du+E) + (D-Eu)(2(C-B)u-F(1-u^2))] - (1+u^2)(D-Eu)(Du+E)^2 = 0.$$

Nun ist aber

$$2(Cu^2+B-Fu-A(1+u^2))(Du+E) + (D-Eu)(2(C-B)u-F(1-u^2)) = (1+u^2)^2(2BE-2AE-FD+(2CD-2AD-FE)u),$$

daher kann die Gleichung (10) durch $1+u^2$ getheilt werden, und es bleibt

$$(11)\ [2(C-B)u-F(1-u^2)][2BE-2AE-FD+(2CD-2AD-FE)u] - (D-Eu)(Du+E)^2 = 0.$$

Ohne diese Gleichung nach den Potenzen der unbekannten Größe u zu ordnen, sieht man, daß sie vom dritten Grade ist; jede Gleichung dieses Grades besitzt aber wenigstens eine reelle Wurzel, daher gibt es für $u = tg.\psi$ wenigstens einen reellen Werth, woraus folgt, daß ψ unter den oben angeführten Umständen nothwendig wenigstens einen reellen Werth zuläßt. Ist dieß der Fall, so hat auch θ, der Gleichung (7) zu Folge, einen reellen Werth. Es gestatten also die Gleichungen (7) und (8) wenigstens eine reelle Auflösung, und deßhalb kann die Gleichung (1) jederzeit so umgestaltet werden, daß in der transformirten Gleichung die Producte der Coordinaten x'' und z'', wie auch y'' und z'' fehlen.

Man kann also die Gleichung (1) stets auf die Gestalt

$$(12)\ \mathfrak{M}z''^2 + \mathfrak{N}y''^2 + \mathfrak{P}x''^2 + \mathfrak{Q}x''y'' + \mathfrak{R}z'' + \mathfrak{S}y'' + \mathfrak{T}x'' + K = 0$$

bringen, wobei die Coefficienten der Coordinaten sämmtlich reelle Größen sind. Das letzte Glied bleibt hier K, weil keiner der für x, y, z gebrauchten Ausdrücke ein von x'', y'', z'' freies Glied enthält, welches mit dem letzten Gliede der Gleichung (1) in Verbindung treten könnte.

Aus der Gleichung (12) läßt sich nun auch das Glied, in welchem das Product $x''y''$ vorkommt, wegschaffen. Man verrücke zu diesem Ende die jetzige Axe der x'' in der Ebene $x''y''$ um den Winkel φ, d. h. man setze

$$x''\cos.\varphi - y''\sin.\varphi \quad \text{statt} \quad x'',$$

$$\text{und} \quad x''\sin.\varphi + y''\cos.\varphi \quad \text{statt} \quad y'',$$

so erhält man eine neue Gleichung, in welcher das Product $x'' y''$ mit dem Coefficienten

$$2 (\mathfrak{N} - \mathfrak{P}) \sin.\varphi \cos.\varphi + \mathfrak{Q} (\cos.\varphi^2 - \sin.\varphi^2) =$$
$$= (\mathfrak{N} - \mathfrak{P}) \sin. 2\varphi + \mathfrak{Q} \cos. 2\varphi$$

verbunden erscheint. Setzt man diesen Coefficienten $= 0$, so ergibt sich

$$tg. 2\varphi = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P} - \mathfrak{N}}.$$

Da dieser Ausdruck immer auf ein reelles φ führt, so ist es immer möglich den Coefficienten von $x'' y''$ zu tilgen, also der Gleichung (1) zuletzt die Form

(13) $\quad M z''^2 + N y''^2 + P x''^2 + Q z'' + R y'' + S x'' + K = 0$

zu ertheilen.

Die Gleichungen (5) und (13) geben zu Folgerungen Veranlassung, welche jenen vollkommen ähnlich sind, die wir in der sechsten Vorlesung in Bezug auf die aus der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen entspringenden transformirten Gleichungen kennen gelernt haben.

Wenn nämlich reelle Werthe von x', y', z' bekannt sind, welche der Gleichung (5) Genüge leisten, so erfüllen dieselben die genannte Gleichung auch, wenn man sie sämmtlich mit entgegengesetzten Zeichen nimmt. Die aus dem Anfangspuncte der in der Gleichung (5) enthaltenen Coordinaten zu den Puncten x', y', z' und $-x'$, $-y'$, $-z'$ gehenden Radienvectoren werden beide durch $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ ausgedrückt, und haben deßhalb einerlei Größe; die Cosinusse der Winkel hingegen, welche diese Radienvectoren mit den Axen der x', y', z' bilden, besitzen gleiche numerische Werthe und entgegengesetzte Zeichen, woraus erhellet, daß je zwei zu derselben Axe gehörende dieser Winkel mit einander zwei Rechte ausmachen: es befinden sich daher die Puncte x', y', z' und $-x'$, $-y'$, $-z'$ mit dem Anfangspuncte der in der Gleichung (5) vorkommenden Coordinaten in einer geraden Linie, und stehen von diesem Anfangspuncte diesseits und jenseits desselben gleich weit ab. Da nun die Gleichung (1) was immer für einem rechtwinkligen Coordinatensysteme unterworfen, für jede einzelne der Coordinaten nicht mehr als zwei Werthe darbietet, also eine nach Belieben angenommene gerade Linie höchstens zwei Puncte in sich enthält, deren Coordinaten dieser Gleichung entsprechen, so wird jede durch den Anfangspunct der Coordinaten, auf welche sich die Gleichung (5) bezieht,

gezogene Sehne des durch die Gleichung (1) vorgestellten Systems von Puncten in diesem Anfangspuncte halbirt, welcher letztere Punct dieser Eigenschaft wegen ein **Mittelpunct** oder **Centrum** des erwähnten Systems heißt.

Sobald also in der Gleichung (1) die Größe

$$AF^2 + BE^2 + CD^2 - 4ABC - DEF$$

von der Nulle verschieden ausfällt, d. h. die Transformation I. angewendet werden kann, so gehört dem durch die Gleichung (1) vorgestellten Systeme von Puncten jederzeit ein Mittelpunct, und zwar nur einer, dessen Coordinaten im ursprünglichen Systeme durch die in (4) dargestellten Werthe von ξ, v, z angegeben werden.

In Bezug auf die durch die Transformation II. erhaltene Gleichung (13) bemerken wir, daß, sobald das durch die Gleichung (1) ausgedrückte System von Puncten einen einzigen Mittelpunct besitzt, keiner der Coefficienten M, N, P verschwindet. Da wir im Vorhergehenden diese Coefficienten nicht durch jene der Gleichung (1) dargestellt haben, so müssen wir zur Rechtfertigung dieser Behauptung einen von dem in der sechsten Vorlesung betretenen, abweichenden Weg einschlagen. Wenden wir die Transformation I. auf die Gleichung (13) an, so sehen wir, daß die Möglichkeit der Wegschaffung der die ersten Potenzen der Coordinaten x'', y'', z'' enthaltenden Glieder an die Erfüllung der Bedingungen

$$2Mz'' + Q = 0$$
$$2Nv'' + R = 0$$
$$2P\xi'' + S = 0$$

gebunden ist, wenn nämlich ξ'', v'', z'' zu den Coordinaten x'', y'', z'' in derselben Beziehung stehen, in welcher wir oben ξ, v, z mit x, y, z verknüpft haben. Soll nun das unserer Gleichung zugehörende System von Puncten bloß einen Mittelpunct zulassen, so müssen die Größen ξ'', v'', z'' bestimmte Werthe erhalten, was wegen

$$\xi'' = -\frac{S}{2P}, \quad v'' = -\frac{R}{2N}, \quad z'' = -\frac{Q}{2M}$$

nur dann der Fall ist, wenn P, N, M nicht gleich Null sind.

Gestattet hingegen die Gleichung (1) die Anwendung der Transformation I. nicht, so können ξ'', v'', z'' nicht sämmtlich bestimmte Werthe annehmen, woraus hervorgeht, daß in diesem Falle wenigstens eine der Größen M, N, P verschwindet.

Stellt man die beiden Werthe von z, welche für ein bestimmtes x und y aus der Gleichung (1) folgen, durch z_1 und z_2 vor, so findet man

$$z_1 + z_2 = -\frac{Dy + Ex + G}{A}$$

und $$Z = \frac{z_1 + z_2}{2} = -\frac{Dy + Ex + G}{2A}.$$

Dieser letztere Ausdruck zeigt, daß alle auf die Ebene xy senkrechten Sehnen des durch die Gleichung (1) dargestellten Systems von Puncten durch eine und dieselbe Ebene halbirt werden, deren Gleichung

$$Z = -\frac{D}{2A}y - \frac{E}{2A}x - \frac{G}{2A}$$

ist. Wir wollen eine solche Ebene eine **diametrale Ebene** nennen.

Da sich dasselbe Resultat ergibt, man mag der Gleichung (1) was immer für ein rechtwinkliges Coordinatensystem zum Grunde legen, so sind wir berechtiget zu schließen, daß jeder Folge paralleler Sehnen des erwähnten Systems von Puncten eine diametrale Ebene entspricht. Immer lassen sich aber drei auf einander senkrechte Folgen paralleler Sehnen angeben, welche ihren diametralen Ebenen unter rechten Winkeln begegnen. Dieß erhellet aus der Form der Gleichung (13), welche

$$Z'' = \frac{z''_1 + z''_2}{2} = -\frac{Q}{2M}$$

gibt, also der diametralen Ebene, welche sich auf die zur Axe der z'' parallelen Sehnen bezieht, eine der Ebene $x''y''$ parallele Lage anweiset. Dasselbe gilt von den diametralen Ebenen der zu den Axen der y'' und x'' parallelen Sehnen. Die Transformation II. ist daher mit dem Vortheile verbunden, die coordinirten Ebenen den letztgenannten diametralen Ebenen parallel zu stellen. Übrigens sieht man ohne Mühe, daß, falls das der Gleichung (1) Genüge leistende System von Puncten bloß einen Mittelpunct zuläßt, sämmtliche diametrale Ebenen sich in demselben durchschneiden.

Zehnte Vorlesung.

Über die geometrische Bedeutung einer Gleichung des zweiten Grades zwischen drei veränderlichen Größen.

(Fortsetzung.)

Bei der Beurtheilung der geometrischen Bedeutung der Gleichung (1), nämlich

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dyz + Exz + Fxy + Gz + Hy + Ix + K = 0,$$

müssen wir den in der vorhergehenden Vorlesung vorgetragenen Lehren gemäß vor Allem unterscheiden, ob die Größe

$$AF^2 + BE^2 + CD^2 - 4ABC - DEF$$

von der Nulle verschieden, oder ob dieselbe der Nulle gleich ist.

Im ersten Falle lassen sich beide Transformationen I. und II. nach einander auf die Gleichung (1) anwenden, und diese Gleichung geht dadurch in

$$(14) \qquad Mz''^2 + Ny''^2 + Px''^2 + L = 0$$

über, wobei keine der Größen M, N, P fehlen kann. Drücken wir im Folgenden durch die Buchstaben M, N, P bloß die numerischen Werthe der früher durch dieselben vorgestellten Größen aus, und lassen wir bei den Buchstaben x, y, z die Accente der Kürze wegen weg, so veranlaßt die Gleichung (14) hinsichtlich der Vorzeichen ihrer Glieder und der Anwesenheit oder des Mangels von L die Betrachtung nachstehender Fälle.

(a) $Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + L = 0,$
(b) $Mz^2 + Ny^2 + Px^2 - L = 0,$
(c) $Mz^2 - Ny^2 - Px^2 + L = 0,$
(d) $Mz^2 - Ny^2 - Px^2 - L = 0,$
(e) $Mz^2 + Ny^2 + Px^2 = 0,$
(f) $Mz^2 - Ny^2 - Px^2 = 0.$

Keine andere Gruppirung der Zeichen bietet einen Fall dar, welcher sich nicht, theils durch Verwechslung der Axen der Coordinaten, theils durch Änderung der Zeichen aller Glieder, auf einen der hier aufgestellten zurückführen ließe.

In dem Falle (a) bedeutet unsere Gleichung in geometrischer Beziehung Nichts, weil die Summe positiver reeller Größen nicht gleich Null seyn kann.

Wenden wir uns daher zur Gleichung (b). Diese gibt für alle reellen Werthe von x und y, durch welche die Summe $Ny^2 + Px^2$ nicht größer ausfällt als L, zwei gleiche und entgegengesetzte reelle Werthe für z, welche letzteren eine gewisse Grenze nie überschreiten; sobald aber $Ny^2 + Px^2 > L$ wird, erscheint z als imaginäre Größe. Es gehört demnach die Gleichung (b) einer ganz in einem begrenzten Raume enthaltenen Fläche.

Um überhaupt von der Gestalt einer Fläche eine deutliche Vorstellung zu bekommen, kann man nichts Besseres thun, als die Beschaffenheit der Linien in Erwägung ziehen, in welchen die Fläche von Ebenen, deren Lagen man nach Belieben verändert, geschnitten wird. Hiebei ist es am vortheilhaftesten, die Position der coordinirten Ebenen so zu verändern, daß eine derselben mit der Ebene des Schnittes zusammenfällt, oder doch wenigstens ihr parallel ist, weil man dadurch in den Stand gesetzt wird, die zu untersuchende Linie mittelst einer einzigen Gleichung hinreichend bestimmen zu können.

Zur Erleichterung unserer künftigen Untersuchungen wollen wir folgende allgemeine Bemerkung vorausschicken.

Denken wir uns eine Fläche, welcher eine der obigen Gleichungen gehört, durch irgend eine Ebene geschnitten, und das vorhandene rechtwinklige Coordinatensystem so verändert, daß die Ebene der xy der schneidenden Ebene parallel wird, so erscheint die Gleichung der Fläche jederzeit unter der Form

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dyz + Exz + Fxy + Gz + Hy + Ix + K = 0,$$

nur mit dem Unterschiede, daß nun die Coefficienten A, B, C, rc. andere Werthe haben, als vorhin. Es sey ρ der Abstand der schneidenden Ebene von der Ebene xy, so erhalten wir die Gleichungen des Schnittes, wenn wir die Gleichung

$$(15) \qquad z = \rho$$

mit der vorhergehenden Gleichung verbinden, weßhalb wir für eine der Gleichungen dieses Schnittes auch die Gleichung

$$(16) \quad By^2 + Fxy + Cx^2 + (D\rho + H)\,y + (E\rho + I)\,x + A\rho^2 + G\rho + K = 0$$

nehmen können. Da in dieser letzteren bloß die Coordinaten x und y

vorkommen, so bleibt sie unverändert, wenn man die Ebene xy in die schneidende Ebene rückt; so jedoch, daß der Anfangspunct der Coordinaten in der früheren Axe der z bleibt, und die neuen Axen der Coordinaten den früheren parallel laufen. Es stellt daher die Gleichung (16) auch zugleich die durch den Schnitt der Fläche mit der Ebene erzeugte Linie in Bezug auf ein in dieser Ebene gewähltes rechtwinkliges Coordinatensystem vor. Da nun die Gleichung (16) vom zweiten Grade ist, so finden hier die in den vorhergehenden Vorlesungen gegebenen Lehren ihre Anwendung.

Aus diesen Vorlesungen erhellet, daß die Natur der durch die Gleichung (16) angezeigten Linie, und die Position wie auch das Verhältniß ihrer Hauptaxen bloß durch die Coefficienten B, F, C, auf welche der Werth von ρ keinen Einfluß hat, bestimmt wird. Linien der zweiten Ordnung mit einem Mittelpuncte, in welchen das Verhältniß der beiden Hauptaxen das nämliche ist, heißen einander ähnlich; daher gelangen wir durch die so eben gemachte Bemerkung zu folgendem Satze: Alle Schnitte, welche in einer Fläche der zweiten Ordnung durch eine und dieselbe Folge paralleler Ebenen hervorgebracht werden, sind einander ähnliche Linien der zweiten Ordnung, deren gleichnamige Hauptaxen einander parallel liegen; wobei jedoch zu bemerken ist, daß in der Reihe stufenweise in einander übergehender Ellipsen auch der Punct, in der Reihe der Hyperbeln zwei sich durchschneidende, und in der Reihe der Parabeln eine oder auch zwei einander parallele Geraden als Übergangsglieder erscheinen können.

Bestimmt man die Coordinaten ξ, v, z des etwa vorhandenen Mittelpunctes der durch die Gleichung (16) angezeigten Linie, in Bezug auf die der schneidenden Ebene parallele Ebene xy, so findet man

$$\xi = \mathfrak{A}\rho + \mathfrak{H}, \quad v = \mathfrak{B}\rho + \mathfrak{K}, \quad z = \rho,$$

wobei die leicht zu findenden Werthe der Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ von ρ nicht abhängen. Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Größe ρ, so ergeben sich die Gleichungen der Linie, welche die Mittelpuncte aller durch parallele Schnitte an einer Fläche der zweiten Ordnung hervorgebrachten Linien in sich enthält. Diese Gleichungen haben aber die Formen

$$\xi = \mathfrak{A}z + \mathfrak{H}, \quad v = \mathfrak{B}z + \mathfrak{K},$$

folglich liegen alle genannten Mittelpuncte in einer geraden Linie. Diese Gerade wird ein Durchmesser der Fläche der zweiten Ordnung genannt.

Gehört der Fläche der zweiten Ordnung ein Mittelpunct, und wählt man diesen zum Anfangspuncte der Coordinaten, so sind, wie man leicht sieht, die Größen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ gleich Null, und man hat

$$\xi = \mathfrak{A}z, \quad v = \mathfrak{B}z,$$

woraus folgt, daß jeder Durchmesser einer solchen Fläche durch ihr Centrum geht.

Fehlen in der zum Grunde gelegten Gleichung der Fläche der zweiten Ordnung die Producte der Coordinaten, so erhalten ξ, v beständige Werthe, d. h. der Durchmesser der mit der Ebene xy parallelen Schnitte steht auf den Ebenen dieser Schnitte senkrecht. Ein Gleiches gilt auch von den Schnitten, welche den Ebenen xz, yz parallel sind. Es gibt also in jeder Fläche der zweiten Ordnung mit einem Centrum bloß drei auf einander senkrechte Durchmesser, welche den Ebenen der ihnen correspondirenden Schnitte der Fläche senkrecht begegnen. Sie heißen die **Hauptdurchmesser** dieser Fläche, und die von der Fläche begrenzten Stücke derselben die **Hauptaxen**.

Die so eben gewonnenen Resultate überheben uns der Mühe, andere Schnitte der durch die Gleichung (b) vorgestellten Fläche zu betrachten, als solche, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen. Wir behalten daher den dieser Gleichung zum Grunde liegenden Anfangspunct bei, und lassen die Axe der neuen Coordinaten x', der Einfachheit der Rechnung wegen, in der Ebene xy liegen, so haben wir, wenn wir uns der Formeln (9) der ersten Vorlesung bedienen, $\varphi = 0$ zu setzen. Um sogleich auf die Linie überzugehen, in welcher die Ebene x'y' der Fläche (b) begegnet, nehmen wir $z' = 0$, und wir erhalten die Gleichung dieser Linie, wenn wir die Ausdrücke

$$\begin{aligned} x &= x' \cos.\psi - y' \sin.\psi \cos.\theta \\ y &= x' \sin.\psi + y' \cos.\psi \cos.\theta \\ z &= - y' \sin.\theta \end{aligned}$$

in die Gleichung (b) einführen; sie ist

$$(M \sin.\theta^2 + N \cos.\psi^2 \cos.\theta^2 + P \sin.\psi^2 \cos.\theta^2)\, y'^2$$
$$+ 2(N-P) \sin.\psi \cos.\psi \cos.\theta \,.\, x'y' + (N \sin.\psi^2 + P \cos.\psi^2)\, x'^2 - L = 0.$$

Der Unterschied zwischen dem Quadrate des Coefficienten von x'y' und dem vierfachen Producte der Coefficienten von y'^2 und x'^2 ist hier

$$= - 4M(N \sin.\psi^2 + P \cos.\psi^2) \sin.\theta^2 - 4NP \cos.\theta^2,$$

also stets negativ, daher gehört letztere Gleichung einer Ellipse, wie auch immer die Werthe von ψ und θ beschaffen seyn mögen.

Es wird demnach die durch die Gleichung (b) vorgestellte Fläche von jeder durch ihren Mittelpunct gelegten, und folglich auch von jeder andern ihr begegnenden Ebene in einer Ellipse geschnitten, deren Dimensionen bei einer Folge paralleler Schnitte um so mehr abnehmen, je weiter die Ebene jedes einzelnen Schnittes vom Mittelpuncte absteht. Von der Richtigkeit der letzteren Behauptung kann man sich insbesondere durch Betrachtung des Umstandes überzeugen, daß die Gleichung unserer Fläche für irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunct sich in ihrem Mittelpuncte befindet, die Form

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dyz + Exz + Fxy - L = 0$$

hat, wobei A, B, C positiv sind, weil sonst nicht alle Schnitte der Fläche mit einer Ebene Ellipsen wären, und das letzte Glied negativ ist, weil sonst z für $x = 0$ und $y = 0$ einen imaginären Werth erhielte, daß also, wenn man einen mit der Ebene xy parallelen und von ihr um $z = \rho$ entfernten Schnitt durch die Fläche führt, eine Ellipse entsteht, deren auf die Ebene des Schnittes bezogene Gleichung

$$By^2 + Fxy + Cx^2 + D\rho y + E\rho x - (L - A\rho^2) = 0$$

ist. Sucht man hier die Werthe der Quadrate der beiden Halbaxen der Ellipse, so findet man dafür Ausdrücke, deren Zähler bloß von ρ abhängen, und zwar dem Endgliede $L - A\rho^2$ der letzteren Gleichung gleich kommen. Es nehmen daher die Werthe der Halbaxen des Schnittes ab, wenn ρ, die Entfernung der Ebene desselben vom Mittelpuncte der Fläche zunimmt, bis sie endlich völlig verschwinden.

Die Fläche, welcher die Gleichung (b) gehört, wird, der so eben auseinandergesetzten Eigenschaften wegen, Ellipsoid oder elliptisches Sphäroid genannt.

Die Schnitte, welche die der Gleichung (b) zum Grunde liegenden coordinirten Ebenen xy, xz, yz in das Ellipsoid machen, deren Gleichungen nämlich durch Verbindung der Gleichung (b) mit den Gleichungen

$$z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0$$

erhalten werden, und deßhalb auf die genannten coordinirten Ebenen selbst bezogen

$$Ny^2 + Px^2 = L, \quad Mz^2 + Px^2 = L, \quad Mz^2 + Ny^2 = L$$

sind, heißen die Hauptschnitte des Ellipsoids. Es sind Ellipsen, deren

Hauptaxen mit den Axen der Coordinaten zusammenfallen, und die Hauptaxen dieser Fläche darstellen. Die Hälften der den Axen der x, y, z parallelen Hauptaxen werden durch $\sqrt{\frac{L}{P}}$, $\sqrt{\frac{L}{N}}$, $\sqrt{\frac{L}{M}}$ ausgedrückt. Nennen wir dieselben a, b, c, so haben wir

$$P = \frac{L}{a^2},\quad N = \frac{L}{b^2},\quad M = \frac{L}{c^2},$$

und die Gleichung des Ellipsoids nimmt die einfachere Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

oder $a^2 b^2 z^2 + a^2 c^2 y^2 + b^2 c^2 x^2 = a^2 b^2 c^2$ an.

Untersuchen wir nun, ob es Folgen paralleler Schnitte eines Ellipsoids gibt, welche statt der Ellipsen Kreise darbieten.

Die oben gefundene Gleichung eines durch das Centrum des Ellipsoids geführten Schnittes verwandelt sich in die Gleichung eines Kreises, wenn

$$(N - P) \sin.\psi \cos.\psi \cos.\theta = 0$$

und zugleich

$$M \sin.\theta^2 + N \cos.\psi^2 \cos.\theta^2 + P \sin.\psi^2 \cos.\theta^2 = N \sin.\psi^2 + P \cos.\psi^2.$$

Der ersten Gleichung leistet man Genüge, wenn man entweder $\psi = 0$, oder $\psi = \frac{\pi}{2}$, oder $\theta = \frac{\pi}{2}$, oder endlich $N = P$ annimmt.

Die Voraussetzung $\psi = 0$ gibt der anderen Gleichung zu Folge

$$M \sin.\theta^2 + N \cos.\theta^2 = P,$$

also $\sin.\theta = \sqrt{\frac{P - N}{M - N}}$ oder $\sin.\theta = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2 - c^2}}$.

Durch die Voraussetzung $\psi = \frac{\pi}{2}$ erhält man

$$M \sin.\theta^2 + P \cos.\theta^2 = N,$$

folglich $\sin.\theta = \sqrt{\frac{N - P}{M - P}}$ oder $\sin.\theta = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$.

Nimmt man $\theta = \frac{\pi}{2}$, so findet man

$$M = N \sin.\psi^2 + P \cos.\psi^2,$$

d. h. $\sin.\psi = \sqrt{\frac{M - P}{N - P}}$ oder $\sin.\psi = \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}}$.

Sind die drei Hauptaxen des Ellipsoids ungleich, ist nämlich $a > b$ und $b > c$, so ist weder die Annahme $\psi = 0$, noch die Annahme

$\theta = \frac{\pi}{2}$ brauchbar, denn die erstere führt auf einen imaginären, und die zweite auf einen die Einheit übersteigenden Werth von $sin.\theta$; hingegen kann man immer $\psi = \frac{\pi}{2}$ setzen, denn hiedurch erhält $sin.\theta$ zwei gleiche und entgegengesetzte reelle Werthe, deren jeder kleiner ist als die Einheit. Es wird also ein Ellipsoid mit drei ungleichen Axen von zwei verschiedenen Folgen paralleler Ebenen in Kreisen geschnitten; die durch den Mittelpunct gehenden dieser Ebenen enthalten die mittlere Hauptaxe in sich, und sind gegen die anderen Hauptaxen gleich geneigt.

Die Annahme $N = P$, welche mit $a = b$ identisch ist, verwandelt obige Gleichung in

$$M sin.\theta^2 + N cos.\theta^2 = N \quad \text{oder} \quad M sin.\theta^2 = N sin.\theta^2,$$

welche Gleichung, wenn M von N verschieden ist, nur für $\theta = o$ bestehen kann, und wenn $M = N$ ist, θ gänzlich unbestimmt läßt. Bei einem Ellipsoide mit zwei gleichen Hauptaxen sind also alle auf die dritte Axe senkrecht geführten Schnitte Kreise; ein Zeichen, daß dieses Ellipsoid durch Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Hauptaxen, welche hier die Lage der erwähnten dritten Axe des Ellipsoids hat, erzeugt werden kann. Ein Ellipsoid mit drei gleichen Hauptaxen aber wird von jeder Ebene in einem Kreise geschnitten, und ist deßhalb mit einer Kugel identisch. Dieß erhellet auch aus der Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wenn man in derselben $a = b = c$ annimmt; denn hiedurch erhält diese Gleichung die Gestalt

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

welche letztere Gleichung einer mit dem Halbmesser a beschriebenen Kugel gehört, deren Mittelpunct mit dem Anfangspuncte der Coordinaten übereinstimmt.

Eilfte Vorlesung.

Über die geometrische Bedeutung einer Gleichung des zweiten Grades zwischen drei veränderlichen Größen.

(Fortsetzung.)

Die Gleichung

$$(c) \qquad Mz^2 - Ny^2 - Px^2 + L = o$$

gibt, sobald man die Werthe von x und y so wählt, daß die Summe $Ny^2 + Px^2$ nicht kleiner wird als L, zwei gleiche und entgegengesetzte reelle Werthe für z; es kann also sowohl x als y unendlich wachsen, und dabei nimmt auch z unendlich zu, woraus hervorgeht, daß diese Gleichung einer, nach den Richtungen der drei coordinirten Axen in das Unendliche sich ausbreitenden Fläche gehört.

Eine durch den Anfangspunct der Coordinaten, welcher hier zugleich der Mittelpunct der Fläche ist, gelegte Ebene begegnet der Fläche in einer Linie, deren auf die schneidende Ebene bezogene Gleichung sich sogleich aus der in der vorhergehenden Vorlesung für die Schnitte des Ellipsoids erhaltenen ergibt, wenn man dort, mit Beibehaltung der Bedeutungen der Winkel ψ und θ, die Zeichen der Größen N, P, L ändert. Es ist also die Gleichung eines solchen Schnittes unserer Fläche

$$(M\,sin.\,\theta^2 - N\,cos.\,\psi^2\,cos.\,\theta^2 - P\,sin.\,\psi^2\,cos.\,\theta^2)\,y'^2$$
$$+ 2(P-N)\,sin.\psi\,cos.\psi\,cos.\theta\,.\,x'y' - (N\,sin.\psi^2 + P\,cos.\psi^2)\,x'^2 + L = o.$$

Die Beschaffenheit des Schnittes selbst hängt nun von dem Zeichen der Größe

$$M(N\,sin.\,\psi^2 + P\,cos.\,\psi^2)\,sin.\,\theta^2 - NP\,cos.\,\theta^2$$

ab. Ist diese Größe negativ, d. h. ist

$$tg.\,\theta < \sqrt{\frac{NP}{M(N\,sin.\,\psi^2 + P\,cos.\,\psi^2)}},$$

so hat der Schnitt die Gestalt einer Ellipse, deren Mittelpunct mit jenem der Fläche übereinstimmt. Dieß findet insbesondere Statt, wenn $\theta = o$ ist; es schneidet nämlich die Ebene xy unsere Fläche in einer Ellipse, welcher die Gleichung

$$Ny^2 + Px^2 = L$$

entspricht, deren Hauptaxen also in den Axen der x und y liegen. Die Hälften dieser Hauptaxen sind $\sqrt{\frac{L}{P}}$ und $\sqrt{\frac{L}{N}}$.

Ist die oben genannte Größe positiv, d. h. ist

$$tg.\theta > \sqrt{\frac{NP}{M(N\,sin.\psi^2 + P\,cos.\psi^2)}},$$

so stellt der Schnitt eine Hyperbel dar, deren Mittelpunct sich in jenem der Fläche befindet. Dieß ist insbesondere für jeden Werth von ψ der Fall, wenn die schneidende Ebene auf der Ebene xy senkrecht steht, oder wenn $\theta = \frac{\pi}{2}$ angenommen wird. Die Gleichung dieser Hyperbel ist

$$My'^2 - (N\,sin.\psi^2 + P\,cos.\psi^2) \cdot x'^2 + L = 0,$$

folglich hat die in der Axe z liegende conjugirte Axe derselben die unveränderliche Größe $2\sqrt{\frac{L}{M}}$, und die in der Ebene xy befindliche und mit der Axe der x den Winkel ψ bildende Queraxe ist

$$= \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{N\,sin.\psi^2 + P\,cos.\psi^2}},$$

wodurch man sich eine Vorstellung von der Gestalt der hier betrachteten Fläche machen kann, welche Hyperboloid mit ununterbrochener Höhlung heißen mag.

Für $\psi = 0$ fällt die Axe der x' in jene der x, für $\psi = \frac{\pi}{2}$ in jene der y. Diese beiden Annahmen geben uns die Gleichungen der Hyperbeln, in welchen die Ebenen xz und yz unsere Fläche treffen, und deren halbe Queraxen mit den Halbaxen des durch die Ebene xy erzeugten Schnittes übereinstimmen.

Setzen wir $\sqrt{\frac{L}{P}} = a$, $\sqrt{\frac{L}{N}} = b$, $\sqrt{\frac{L}{M}} = c$, so nimmt die Gleichung des Hyperboloids mit ununterbrochener Höhlung die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

an. Ist $a = b$, so ist der Schnitt des Hyperboloids mit der Ebene xy ein Kreis, und alle durch die Axe der z gelegten Ebenen treffen diese Fläche in gleichen Hyperbeln; man hat also eine durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre conjugirte Hauptaxe beschriebene Fläche vor sich.

Wir haben noch den Fall zu betrachten, wenn die durch den Mittelpunct des Hyperboloids geführte Ebene eine solche Lage hat, daß

die Größe

$$M(N\sin.\psi^2 + P\cos.\psi^2)\sin.\theta^2 - NP\cos.\theta^2,$$

folglich auch $(a^2\sin.\psi^2 + b^2\cos.\psi^2)\sin.\theta^2 - c^2\cos.\theta^2$ verschwindet, oder

$$tg.\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2\sin.\psi^2 + b^2\cos.\psi^2}}$$

wird. In diesem Falle verwandelt sich die auf die schneidende Ebene bezogene Gleichung des Schnittes in

$$\left[\frac{(a^2-b^2)\sin.\psi\cos.\psi\cos.\theta}{\sqrt{a^2\sin.\psi^2 + b^2\cos.\psi^2}}.y' + \frac{\sqrt{a^2\sin.\psi^2 + b^2\cos.\psi^2}}{ab}.x'\right]^2 - 1 = 0,$$

und zeigt somit ein System zweier paralleler gerader Linien an. Da man für jedes ψ den Werth von $tg.\theta$, des in demselben vorkommenden Radikals wegen, sowohl mit dem Zeichen $+$, als auch mit dem Zeichen $-$ nehmen kann, so gibt es für jedes ψ zwei gegen die Axe der z gleich geneigte Lagen der schneidenden Ebene, in welcher dieselbe dem Hyperboloide in geraden Linien begegnet. Hieraus läßt sich folgern, daß jedes Hyperboloid mit ununterbrochener Höhlung auf zweifache Art durch eine, nach einem leicht zu bestimmenden Gesetze sich bewegende, Gerade beschrieben werden könne.

Für $a=b$ wird $tg.\theta = \pm\frac{c}{a}$, und die letztere Gleichung verwandelt sich in $x'^2 - a^2 = 0$; bei dem durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre conjugirte Hauptaxe gebildeten Hyperboloide stehen daher alle oben erwähnten Geraden auf dem Halbmesser des Kreises, welchen die Queraxe der Hyperbel während dieser Umdrehung beschreibt, senkrecht, und sind sämmtlich gegen die Ebene desselben gleich geneigt, ohne aber auf dieser Ebene jemals senkrecht zu stehen, da θ, wie aus dem Werthe von $tg.\theta$ zu ersehen ist, so lange a von o verschieden bleibt, nie in $\frac{\pi}{2}$ übergeht. Ein Hyperboloid der letzteren Art wird also auch erzeugt, wenn eine gerade Linie sich um eine andere, mit welcher sie nicht in einerlei Ebene liegt und unveränderlich verbunden ist, bewegt.

Das Hyperboloid mit ununterbrochener Höhlung kann im Allgemeinen durch zwei Folgen paralleler Ebenen in Kreisen geschnitten werden; bei dem durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre conjugirte Hauptaxe hervorgebrachten findet bloß eine Folge paralleler, auf der genannten Axe senkrecht stehender Kreise Statt. Der Beweis dieses Satzes ist dem

bei dem Ellipsoide geführten in allen Stücken ähnlich, und kann deßhalb hier füglich übergangen werden.

Trifft eine Ebene das Hyperboloid mit ununterbrochener Höhlung in geraden Linien, so sind die durch Ebenen, welche der ersteren parallel liegen, hervorgebrachten Schnitte im Allgemeinen Parabeln oder Hyperbeln, je nachdem diese Geraden einander parallel laufen, oder sich durchkreuzen, was aus der in der vorhergehenden Vorlesung gemachten Bemerkung von selbst erhellet.

Die Rechnungen, welche zur Untersuchung der Gleichung

$$(d) \qquad Mz^2 - Ny^2 - Px^2 - L = o$$

nöthig sind, stimmen mit den vorhergehenden überein, nur muß überall L mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen werden. Dieser Umstand übt jedoch auf die Gestalt der durch die Gleichung (d) ausgedrückten Fläche einen wesentlichen Einfluß aus. Denn nun begegnet die Ebene xy der Fläche gar nicht; eine der Ebene xy in dem Abstande $z = \rho$ parallel geführte Ebene aber trifft die Fläche nur dann in einer Ellipse, deren Gleichung

$$Ny^2 + Px^2 = M\rho^2 - L$$

ist, wenn ρ die Größe $\sqrt{\frac{L}{M}}$ übersteigt. Die durch den Mittelpunct der Fläche auf die Ebene xy senkrecht gehenden Ebenen schneiden die Fläche in Hyperbeln, deren gemeinschaftliche Queraxe $2\sqrt{\frac{L}{M}}$ die Richtung der Axe der z hat. Es besteht also diese Fläche aus zwei abgesonderten Parthien, und heißt deßwegen auch **Hyperboloid mit getrennten Höhlungen.** Die Gleichungen, welche bei dem vorigen Hyperboloide geradlinige Schnitte anzeigen, geben bei diesem imaginäre Resultate; es kann daher das letztere nicht durch Bewegung einer geraden Linie beschrieben werden.

Setzt man wieder $\sqrt{\frac{L}{P}} = a$, $\sqrt{\frac{L}{N}} = b$, $\sqrt{\frac{L}{M}} = c$, so erhält die Gleichung unserer Fläche die Gestalt

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Die Annahme $a = b$ führt auf die Fläche, welche durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre Queraxe entsteht.

Was die Gleichung (e) betrifft, so ist leicht einzusehen, daß sie bloß die einzige reelle Auflösung $x = o$, $y = o$, $z = o$ gestattet. Sie

gehört demnach einem Puncte, welcher in dem gegenwärtigen Coordinatensysteme der Anfangspunct selbst ist.

Wendet man endlich die oben vorgetragene Analyse auf die Gleichung (f), nämlich $Mz^2 - Ny^2 - Px^2 = 0$ an, so findet man, daß diese Gleichung eine Fläche darstellt, welche von einer durch den Anfangspunct der Coordinaten gelegten Ebene entweder bloß in diesem Puncte, oder in einer durch denselben gehenden geraden Linie, oder endlich in zweien in dem genannten Puncte sich durchkreuzenden Geraden getroffen wird, je nachdem, mit Rücksicht auf die früher gebrauchte Bezeichnung,

$$tg.\,\theta \text{ entweder } < \text{ oder } = \text{ oder } > \sqrt{\frac{NP}{M(N\,sin.\,\psi^2 + P\,cos.\,\psi^2)}} \text{ ist.}$$

Die Ebenen, welche den erwähnten drei Lagen einer durch den Anfangspunct der Coordinaten geführten Ebene parallel sind, erzeugen an der Fläche Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln. Insbesondere geben alle der Ebene xy parallelen Ebenen Ellipsen, deren Mittelpuncte in der Axe der z, und deren Hauptaxen jenen der x und y parallel liegen. Die Dimensionen dieser Ellipsen verhalten sich wie ihre Abstände von dem Anfangspuncte der Coordinaten. Ein Gleiches gilt auch von allen anderen Linien der zweiten Ordnung, welche durch eine Folge paralleler Schnitte dieser Fläche entspringen.

Es wird also unsere Fläche beschrieben, wenn sich eine stets durch einen fixen Punct gehende gerade Linie längst irgend einer Curve der zweiten Ordnung fortbewegt; und da es immer Folgen paralleler Schnitte gibt, welche an dieser Fläche Kreise darstellen, so ist dieselbe offenbar mit der krummen Oberfläche des **Kegels** der Elementar-Geometrie einerlei. Da die Linien der zweiten Ordnung, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, durch ebene Schnitte des gemeinen Kegels entstehen, so heißen sie auch gewöhnlich die **Kegelschnittslinien**.

Setzt man in der Gleichung (f) $\frac{P}{M} = \alpha$, $\frac{N}{M} = \beta$, so nimmt dieselbe die einfachere Form

$$z^2 = \alpha x^2 + \beta y^2$$

an.

Untersuchen wir nun die Bedeutung der Gleichung (1)

$Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dyz + Exz + Fxy + Gz + Hy + Ix + K = 0$,

wenn $AF^2 + BE^2 + CD^2 - 4ABC - DEF = 0$ ist.

Mit Hülfe der Transformation II. kann diese Gleichung auf die Gestalt

(17) $Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + Qz + Ry + Sx + K = 0$

gebracht werden, wobei aus den in der neunten Vorlesung angegebenen Gründen wenigstens einer der Coefficienten M, N, P gleich Null ist.

Es sey erstlich bloß $P = 0$. Setzt man hier $y = y' + v$, $z = z' + \zeta$, so erhält man eine transformirte Gleichung, in welcher die Coefficienten von z'^2 und y'^2 wieder M und N sind, und aus der man die Glieder, in welchen die ersten Potenzen dieser Coordinaten, nämlich z' und y' erscheinen, immer wegschaffen kann, wenn man nur

$$\zeta = -\frac{Q}{2M} \text{ und } v = -\frac{R}{2N}$$

annimmt. Ist in der obigen Gleichung S von o verschieden, so setze man noch $x = x' + \xi$, und man sieht, daß durch die Annahme

$$\xi = -\frac{M\zeta^2 + Nv^2 + Q\zeta + Rv + K}{S}$$

das von den Coordinaten x', y', z' freie Glied der transformirten Gleichung getilgt wird. Es läßt sich also in unserem Falle die vorgelegte Gleichung jederzeit auf eine nur mit drei Gliedern versehene, entweder

(18) $Mz^2 + Ny^2 + Sx = 0$, oder

(19) $Mz^2 + Ny^2 + L = 0$

reduciren, wobei die Accente, der Kürze wegen, weggelassen worden sind. In der letzteren Gleichung ist

$$L = M\zeta^2 + Nv^2 + Q\zeta + Rv + K.$$

Es sey zweitens in der Gleichung (17) nebst P auch noch N gleich Null, so läßt sich aus derselben mittelst der Substitution $z = z' + \zeta$ das mit z' versehene Glied wegschaffen, wenn man $\zeta = -\frac{Q}{2M}$ annimmt. Ist in der erwähnten Gleichung ein Glied vorhanden, in welchem y oder x erscheint, so kann die transformirte Gleichung auch noch von dem beständigen Gliede befreit werden. Enthält z. B. die Gleichung (17) das Glied Ry, so setze man $y = y' + v$, und lasse $v = -\frac{M\zeta^2 + Q\zeta + K}{R}$ seyn, so wird dadurch das letzte Glied der neuen Gleichung auf Null reducirt. Es bietet demnach die Gleichung (17) für $P = 0$, $N = 0$ eine der beiden Formen

(20) $$Mz^2 + Ry + Sx = 0,$$
(21) $$Mz^2 + L = 0$$
dar, wobei $L = Mz^2 + K$ ist.

Bei der Gleichung (18) kommen in Bezug auf die Zeichen ihrer Glieder bloß zwei Fälle in Erwägung. Es haben nämlich M und N entweder einerlei oder verschiedene Zeichen. Hiebei ist das Zeichen von S willkürlich, weil man bloß die Richtung der positiven x mit jener der negativen zu verwechseln braucht, um das Zeichen der genannten Größe zu ändern. Demnach zerfällt die Gleichung (18) in die untergeordneten

(g) $$Mz^2 + Ny^2 - Sx = 0,$$
(h) $$Mz^2 - Ny^2 + Sx = 0.$$

Aus der Gleichung (19) entspringen in Bezug auf die Zeichen ihrer Glieder und die Anwesenheit oder den Mangel von L folgende besondere Gleichungen:

(i) $$Mz^2 + Ny^2 + L = 0,$$
(k) $$Mz^2 + Ny^2 - L = 0,$$
(l) $$Mz^2 - Ny^2 + L = 0,$$
(m) $$Mz^2 + Ny^2 = 0,$$
(n) $$Mz^2 - Ny^2 = 0.$$

Die Gleichung (20) enthält, wie man auch immer die Zeichen ihrer Glieder nehmen mag, wegen der Willkürlichkeit der Richtungen der positiven Theile der Axen der x und y, bloß den einen Fall

(o) $$Mz^2 - Ry - Sx = 0.$$

Die Gleichung (21) endlich zerfällt in

(p) $$Mz^2 + L = 0,$$
(q) $$Mz^2 - L = 0.$$

Der bloße Überblick dieser zehn Gleichungen lehrt, daß die Formen (i), (p) in geometrischer Hinsicht bedeutungslos sind, da sie auf imaginäre Werthe der Coordinaten führen. Die Gleichung (m) gibt bloß $z = 0$, $y = 0$, und gehört daher offenbar der gegenwärtigen Axe der x; die Gleichung (n) zeigt zwei in dieser Axe sich schneidende, und die Gleichung (q) zwei der Ebene xy diesseits und jenseits in gleichen Abständen parallel laufende Ebenen an, so daß uns nur mehr die fünf Gleichungen (g), (h), (k), (l), (o) zur Untersuchung übrig bleiben, womit wir uns in der nächsten Vorlesung beschäftigen werden.

Zwölfte Vorlesung.

Über die geometrische Bedeutung einer Gleichung des zweiten Grades zwischen drei veränderlichen Größen.

(Beschluß.)

Um die Beschaffenheit der durch die Gleichung

(g) $$Mz^2 + Ny^2 - Sx = o$$

vorgestellten Fläche kennen zu lernen, schneiden wir dieselbe durch eine den Anfangspunct der Coordinaten in sich enthaltende Ebene; die auf diese Ebene selbst bezogene Gleichung des Schnittes ergibt sich, wenn man die Ausdrücke

$$x = x' \cos.\psi - y' \sin.\psi \cos.\theta,$$
$$y = x' \sin.\psi + y' \cos.\psi \cos.\theta,$$
$$z = - y' \sin.\theta$$

in obige Gleichung einführt, sie ist nämlich

$$(M \sin.\theta^2 + N \cos.\psi^2 \cos.\theta^2)y'^2 + 2N \sin.\psi \cos.\psi \cos.\theta . x'y' + N \sin.\psi^2 . x'^2 + S \sin.\psi \cos.\theta . y' - S \cos.\psi . x' = o;$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die Axe der x' in der Ebene xy liege, und ψ, θ die Winkel anzeigen, welche die Axen der x' und x, ferner die Ebenen $x'y'$ und xy mit einander bilden.

Die Größe, welche wir in den Vorlesungen über die Linien der zweiten Ordnung durch $B^2 - 4AC$ vorgestellt haben, ist hier

$$= - 4MN \sin.\psi^2 \sin.\theta^2,$$

also stets negativ, ausgenommen, wenn einer der Winkel ψ, θ verschwindet, in welchem Falle dieselbe gleichfalls in Null übergeht.

Die Größe hingegen, welche am angeführten Orte H genannt wurde, ist, wie die Formel (6) der sechsten Vorlesung zeigt:

$$= - \frac{S^2 (M \cos.\psi^2 \sin.\theta^2 + N \cos.\theta^2)}{4MN \sin.\psi^2 \sin.\theta^2},$$

also stets von der Nulle verschieden, ausgenommen, wenn beide Winkel ψ, θ rechte sind.

Die durch den Anfangspunct der Coordinaten an die der Gleichung (g) entsprechende Fläche geführten Schnitte sind also Ellipsen

oder Parabeln, je nachdem sie die Axe der x bloß in dem genannten Puncte treffen, oder die ganze Axe der x in sich fassen. Die Ebene $y z$ insbesondere begegnet der Fläche nur in dem Anfangspuncte der Coordinaten. Die gesammte Fläche liegt auf einer und derselben Seite der Ebene $y z$, welche bei der oben vorausgesetzten Beschaffenheit von S diejenige ist, auf welcher sich die positiven x befinden.

Setzen wir in der Gleichung (g) zuerst $x' + \xi$ statt x, und sodann $x' = o$, oder was dasselbe heißt, sogleich ξ statt x, so erhalten wir die Gleichung des Schnittes, welchen eine in dem Abstande ξ vom Anfangspuncte der Coordinaten auf die Axe der x senkrecht gestellte Ebene in der Fläche erzeugt, und hiebei können wir diese Gleichung auf die schneidende Ebene selbst beziehen, wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten in den Punct, in welchem sie die Axe der x trifft, verlegen, und die Axen der y und z ihren ursprünglichen Richtungen parallel annehmen. Da nun die erwähnte Gleichung

$$M z^2 + N y^2 = S \xi$$

ist, so geben alle auf die Axe der x senkrechten Schnitte unserer Fläche Ellipsen, deren Hauptaxen jenen der y und z parallel sind.

Man wird sich nun eine Vorstellung von der Gestalt dieser Fläche machen können. Sie heißt das elliptische Paraboloid. Der Anfangspunct der Coordinaten in dem der Gleichung (g) zum Grunde liegenden Systeme ist ihr Scheitel, und die Axe der x ihre Hauptaxe.

Das elliptische Paraboloid kann auf keine Weise in Hyperbeln oder in geraden Linien, wohl aber in Kreisen geschnitten werden. Um die Lage der schneidenden Ebene für den letzteren Fall auszumitteln, setzen wir in der obigen Gleichung den Coefficienten des Productes $x' y'$ gleich Null, und die Coefficienten von y'^2 und x'^2 einander gleich, nämlich

$$\sin.\psi \cos.\psi \cos.\theta = o$$

$$\text{und} \quad M \sin.\theta^2 + N \cos.\psi^2 \cos.\theta^2 = N \sin.\psi^2,$$

so bietet uns die erste Gleichung die drei Annahmen

$$\psi = o, \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

dar, für welche uns die zweite Gleichung beziehungsweise

$$tg.\theta = \sqrt{-\frac{N}{M}}, \quad \sin.\theta = \sqrt{\frac{N}{M}}, \quad \sin.\psi = \sqrt{\frac{M}{N}}$$

gibt. Von diesen Resultaten ist im Allgemeinen nur eines der beiden

letzteren anwendbar; das vorhergehende, wenn $N < M$, das folgende, wenn $N > M$ ist, und da im ersten Falle $sin. \theta$, im zweiten $sin. \psi$ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe besitzt, so sind immer zwei Folgen paralleler Ebenen möglich, welche das elliptische Paraboloid in Kreisen treffen. Die obigen Formeln zeigen, daß diese Ebenen stets den größeren Hauptaxen der auf die Axe des Paraboloids senkrechten elliptischen Schnitte parallel liegen.

Ist $M = N$, so sind alle auf die Axe des Paraboloids senkrechten Schnitte selbst Kreise, und außer denselben sind keine anderen möglich, welche Kreise erzeugen könnten. Das so beschaffene Paraboloid entsteht offenbar durch Umdrehung einer Parabel um ihre Hauptaxe.

Schneidet man das durch die Gleichung (g) vorgestellte Paraboloid mittelst einer zur Ebene der xz parallelen und von ihr um $y = v$ entfernten Ebene, so erhält man eine Parabel, deren auf die schneidende Ebene bezogene Gleichung

$$Mz^2 - Sx + Nv^2 = o$$

ist; deren Hauptaxe demnach in der Ebene xy und der Axe der x parallel liegt. Der Parameter dieser Parabel, nämlich $\frac{S}{M}$, hängt von v nicht ab; es sind also alle durch Schnitte, welche man der Ebene xz parallel führt, entstehenden Parabeln einander gleich, und da die Scheitel derselben in der Parabel liegen, welche die Ebene xy auf der Fläche bestimmt, so wird ein elliptisches Paraboloid auch durch eine Parabel beschrieben, deren Scheitel einer anderen Parabel so folgt, daß die Ebenen beider auf einander senkrecht und die Hauptaxen beider einander parallel und nach derselben Gegend gerichtet bleiben.

Diese Erzeugungsweise eines elliptischen Paraboloids ließe sich leicht noch allgemeiner darstellen, da es nicht schwer zu beweisen ist, daß überhaupt alle Parabeln, welche durch eine bestimmte Folge paralleler Schnitte der genannten Fläche erhalten werden, einander gleich sind.

Was die durch die Gleichung

$$\text{(h)} \qquad Mz^2 - Ny^2 + Sx = o$$

ausgedrückte Fläche betrifft, so ist

$$(M\, sin.\theta^2 - N\, cos.\psi^2\, cos\, \theta^2)y'^2 - 2N\, sin.\psi\, cos.\psi\, cos.\theta\, x'y' - N sin.\psi^2 . x'^2$$
$$- S\, sin.\psi\, cos.\theta . y' + S\, cos.\psi . x' = o$$

die Gleichung eines durch den Anfangspunct der Coordinaten geführ-

ten Schnittes derselben, auf die schneidende Ebene bezogen; man erhält diese Gleichung, wenn man in der aus (g) abgeleiteten die Zeichen der Größen N und S ändert.

Die in der sechsten Vorlesung durch $B^2 - 4AC$ vorgestellte Größe ist hier

$$= 4 M N \sin.\psi^2 \sin.\theta^2,$$

also im Allgemeinen positiv, und nur dann $= 0$, wenn entweder ψ oder θ verschwindet.

Die Größe, welche wir H genannt haben, hat hier den Werth

$$\frac{S^2 (M \cos.\psi^2 \sin.\theta^2 - N \cos.\theta^2)}{4 M N \sin.\psi^2 \sin.\theta^2};$$

sie verschwindet, sobald

$$tg.\theta = \frac{1}{\cos.\psi}\sqrt{\frac{N}{M}} \text{ ist.}$$

Es wird demnach unsere Fläche von einer durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden Ebene entweder in einer Hyperbel oder in einer Parabel, oder in zwei sich durchkreuzenden geraden Linien geschnitten. Zur Bildung einer Parabel ist erforderlich, daß die schneidende Ebene durch die Axe der x gelegt werde, oder $\psi = 0$ sey. Diese Voraussetzung gibt uns für den Schnitt die Gleichung

$$(M \sin.\theta^2 - N \cos.\theta^2) y'^2 + S x' = 0.$$

Ist $M \sin.\theta^2 - N \cos.\theta^2$ negativ, d. h. $tg.\theta < \sqrt{\frac{N}{M}}$, so sind die Äste der Parabel nach der Gegend der positiven x hin gerichtet; ist aber $M \sin.\theta^2 - N \cos.\theta^2$ positiv, oder $tg.\theta > \sqrt{\frac{N}{M}}$, so breiten sich diese Äste nach der entgegengesetzten Gegend aus. Die Annahme $tg.\theta = \sqrt{\frac{N}{M}}$ führt auf $x' = 0$; in diesem Falle entstehen zwei in der Ebene yz liegende, gegen die Axe der z gleich geneigte gerade Linien, durch welche demnach der Übergang der Äste der Parabeln von der einen Richtung zur andern erfolgt. Daß diese Geraden auch durch den Schnitt unserer Fläche mit der Ebene yz erzeugt werden, ist nun für sich klar, kann aber auch unmittelbar aus der Gleichung (h) gefolgert werden. Übrigens sieht man aus den obigen Formeln, daß es unmöglich ist, auf der hier betrachteten Fläche eine Ellipse oder einen Kreis zu verzeichnen.

Der Schnitt unserer Fläche mit der Ebene xy gibt eine Para-

bel, deren Gleichung $y^2 = \frac{S}{N} x$ ist; die Hauptaxe dieser Parabel hat die Richtung des positiven Theiles der Axe der x, und ihr Scheitel fällt in den Anfangspunct der Coordinaten. Die Ebene xz hingegen begegnet der Fläche in einer Parabel, welcher die Gleichung $z^2 = -\frac{S}{M} x$ gehört; die Hauptaxe dieser Curve ist die Verlängerung jener der Vorigen nach der Richtung der negativen x, und ihr Scheitel liegt gleichfalls im Anfangspuncte. Bewegt sich nun eine dieser Parabeln ihrer anfänglichen Position parallel und so, daß ihr Scheitel stets ein Punct der anderen bleibt, so entsteht die der Gleichung (h) entsprechende Fläche; eine Bemerkung, welche durch den Umstand gerechtfertiget wird, daß alle zu der Ebene xz parallelen Schnitte, und eben so alle zu der Ebene xy parallel geführten, übereinstimmende Parabeln darbieten, mit deren Hülfe man sich am leichtesten eine richtige Vorstellung von der Gestalt der Fläche (h) machen dürfte. Diese Fläche heißt das hyperbolische Paraboloid.

Betrachten wir noch die Anordnung der geraden Linien, welche auf dem hyperbolischen Paraboloide gezogen werden können. Da sich durch jede derselben und durch den Anfangspunct der Coordinaten eine Ebene legen läßt, so reicht es hin, die geradlinigen Schnitte zu untersuchen, welche eine den Anfangspunct in sich enthaltende Ebene an unserer Fläche hervorbringt. Die Gleichung einer solchen Ebene ist, wie die in der dritten Vorlesung gegebene Formel (54) lehrt,

$$z = (x \sin.\psi - y \cos.\psi)\, tg.\theta,$$

worin ψ und θ die oben angenommenen Bedeutungen haben. Verbinden wir dieselbe mit der Gleichung (h), so wird

$$(M \cos.\psi^2\, tg.\theta^2 - N)\, y^2 - 2M \sin.\psi \cos.\psi\, tg.\theta^2 . xy + M \sin.\psi^2\, tg.\theta^2 . x^2 + Sx = 0,$$

und dieses ist eine der Gleichungen des Schnittes der erwähnten Ebene mit der Fläche. Soll ein geradliniger Schnitt Statt finden, so muß

$$tg.\theta = \frac{1}{\cos.\psi} \sqrt{\frac{N}{M}}$$

seyn; hiedurch verwandelt sich die letztere Gleichung in

$$-2N\, tg.\psi . xy + N\, tg.\psi^2 . x^2 + Sx = 0,$$

und zerfällt somit in die zwei Gleichungen

$$x = 0 \quad \text{und} \quad 2N\, tg.\psi . y - N\, tg.\psi^2 . x - S = 0,$$

deren jede mit der Gleichung der schneidenden Ebene zusammengenommen eine der beiden geraden Linien darstellt, in welchen diese Ebene dem Paraboloide begegnet. Die Gleichungen dieser Geraden sind demnach, mit Rücksicht auf den Werth von $tg.\theta$:

$$\left.\begin{array}{l} x = o \\ z = -y\sqrt{\frac{N}{M}} \end{array}\right\} \text{ und } \left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} tg.\psi \,.\, x + \frac{S}{2N.tg.\psi} \\ z = y\sqrt{\frac{N}{M}} - \frac{S}{\sqrt{MN}\,.\,tg.\psi} \end{array}\right\}.$$

Die erstere dieser Geraden ist eine der Durchschnittslinien der Ebene yz mit der Fläche, und die andere, in welcher die schneidende Ebene der Fläche zum zweiten Male begegnet, gibt, auf die Ebene yz projicirt, eine zur zweiten Durchschnittslinie der Fläche mit der Ebene yz parallele Gerade. Man kann in den obigen Rechnungen $\sqrt{\frac{N}{M}}$ auch mit dem entgegengesetzten Zeichen nehmen; es gibt also auf dem hyperbolischen Paraboloide zwei Systeme gerader Linien, wovon die einen der Ebene $z = -y\sqrt{\frac{N}{M}}$, und die anderen der Ebene $z = +y\sqrt{\frac{N}{M}}$ parallel liegen.

Im Allgemeinen ist aus der Beschaffenheit der Schnitte, welche eine Fläche der zweiten Ordnung mit einer Ebene zuläßt, leicht einzusehen, daß wenn auf diese Fläche eine gerade Linie möglich ist, darauf unzählige andere gezogen werden können; denn jede Ebene, welche durch die erstere Gerade gelegt wird, muß die Fläche in allen Lagen, in welchen sie ihr wieder begegnet, in geraden Linien schneiden.

Da die Gleichung

$$(k) \qquad Mz^2 + Ny^2 - L = o$$

die Coordinate x nicht enthält, also für jeden Werth von x besteht, so gehört sie einer Fläche, welche von allen auf die Axe der x senkrechten Ebenen in gleichen Ellipsen geschnitten wird, deren Mittelpuncte sämmtlich in der genannten Axe liegen, und deren Hauptaxen in derselben Ordnung den Axen der y und z parallel sind.

Hieraus folgt nothwendig, daß alle auf die Ebene yz senkrechte Schnitte dieser Fläche zur Axe der x parallele gerade Linien geben, wovon man sich auch besonders überzeugen kann, wenn man die Gleichung einer auf der Ebene yz senkrechten Ebene, nämlich $y = az + \alpha$, mit der Gleichung (k) verbindet.

Substituirt man in (k) statt z und y die Ausdrücke

$$-y' \sin.\theta \quad \text{und} \quad x' \sin.\psi + y' \cos.\psi \cos.\theta,$$

wobei ψ und θ die bekannten auf die Position einer durch den Anfangspunct der Coordinaten gelegten Ebene sich beziehenden Winkel sind, so erhält man die Gleichung des durch diese Ebene verursachten und auf sie selbst reducirten Schnittes der Fläche, nämlich

$$(M \sin.\theta^2 + N \cos.\psi^2 \cos.\theta^2)y'^2 + 2N \sin.\psi \cos.\psi \cos.\theta \,.\, x'y' + N \sin.\psi^2 \,.\, x'^2 - L = 0,$$

welche wegen

$$4N^2 \sin.\psi^2 \cos.\psi^2 \cos.\theta^2 - 4(M \sin.\theta^2 + N \cos.\psi^2 \cos.\theta^2) N \sin.\psi^2 = -4MN \sin.\psi^2 \sin.\theta^2,$$

sobald ψ und θ von der Nulle verschieden angenommen werden, immer eine Ellipse anzeigt, und für $\psi = 0$ oder $\theta = 0$ zweien der Axe der x parallelen Geraden gehört.

Es entsteht also unsere Fläche, wenn sich eine Gerade, ihrer anfänglichen Position parallel, längst irgend einer Ellipse bewegt, und heißt deßhalb der elliptische Cylinder. Setzt man $\sqrt{\frac{L}{M}} = c$, $\sqrt{\frac{L}{N}} = b$, so nimmt die Gleichung (k) die Form

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

an. Da diese Gleichung die Grenze ist, welcher sich die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bei dem unendlichen Wachsen von a ohne Ende nähert, so kann man einen elliptischen Cylinder als die Grenze eines Ellipsoids in Bezug auf das unendliche Zunehmen einer der drei Hauptaxen der letzteren Fläche betrachten. Aus den für das Ellipsoid erhaltenen Resultaten läßt sich, dieser Bemerkung gemäß, sogleich folgern, daß, wenn $b > c$ ist, der durch obige Gleichung vorgestellte elliptische Cylinder von jeder der Richtung der Axe b parallelen und gegen die Richtung der Axe c unter einem Winkel, dessen Cosinus $= \frac{c}{b}$ ist, geneigten Ebene in einem Kreise getroffen wird, weßwegen diese Fläche mit dem schiefen Cylinder der Elementar-Geometrie einerlei ist. Für $b = c$ geht sie in den sogenannten senkrechten Cylinder über.

Auf dieselbe Weise wird gezeigt, daß die Gleichung

(l) $$Mz^2 - Ny^2 + L = o$$

eine Fläche ausdrückt, welche durch die Bewegung zweier, ihrer anfänglichen Position paralleler und stets längst einer gegebenen Hyperbel fortschreitender, gerader Linien entsteht, und der hyperbolische Cylinder heißt. Diese Fläche läßt keine kreisförmigen Schnitte zu.

Die Fläche, welcher die Gleichung

(o) $$Mz^2 - Ry - Sx = o$$

gehört, wird von einer Ebene entweder in parallelen geraden Linien, oder in einer Parabel geschnitten, je nachdem diese Ebene der Geraden, deren Gleichungen $z = o$ und $y = \frac{S}{R}x$ sind, parallel ist oder nicht. Alle parallelen Schnitte geben gleich Parabeln. Diese Fläche ist der sogenannte parabolische Cylinder, und wird von einer Geraden beschrieben, welche sich, ihrer anfänglichen Position parallel, längst einer Parabel fortbewegt.

Es hat also eine Gleichung des zweiten Grades zwischen drei veränderlichen Größen entweder 1) gar keine geometrische Bedeutung,

oder sie entspricht 2) einem Puncte,
3) einer geraden Linie,
4) einer Ebene,
5) zweien parallelen Ebenen,
6) zweien sich durchschneidenden Ebenen,
7) einem elliptischen Cylinder,
8) einem hyperbolischen Cylinder,
9) einem parabolischen Cylinder,
10) einem elliptischen Kegel,
11) einem Ellipsoide (einer Kugel),
12) einem Hyperboloide mit ununterbrochener Höhlung,
13) einem Hyperboloide mit abgesonderten Höhlungen,
14) einem elliptischen Paraboloide,
15) einem hyperbolischen Paraboloide.

Dreizehnte Vorlesung.

Über die Bestimmung der Berührungslinien und Normalebenen der Curven, und der Berührungsebenen und Normallinien der krummen Flächen.

Man denke sich durch zwei zu irgend einer krummen Linie gehörigen Puncte, deren Coordinaten in Bezug auf ein rechtwinkliges System x, y, z und $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$ sind, eine Gerade gezogen, so lassen sich die Gleichungen derselben auf dem in der fünften Vorlesung bei der Auflösung der ersten Aufgabe eingeschlagenen Wege angeben. Sie sind, wenn man die Coordinaten eines jeden Punctes der Geraden durch x', y', z' vorstellt:

$$(1) \quad x'-x=\frac{\Delta x}{\Delta z}(z'-z); \quad y'-y=\frac{\Delta y}{\Delta z}(z'-z).$$

Hier kann man die Größen Δx, Δy mittelst der Gleichungen der Curve durch x, y, z und Δz, oder, wenn man will, bloß durch z und Δz darstellen.

Man lasse nun den Punct $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$ sich dem Puncte x, y, z unendlich nähern, oder was dasselbe heißt, Δz unendlich klein werden, wodurch auch Δx und Δy unendlich abnehmen müssen; so nähert sich obige, die Curve schneidende Gerade unendlich einer anderen geraden Linie, welcher offenbar die Gleichungen

$$(2) \quad x'-x=\frac{dx}{dz}(z'-z); \quad y'-y=\frac{dy}{dz}(z'-z)$$

entsprechen. Die letztere Gerade wird die zu dem Puncte x, y, z der Curve gehörende **Berührungslinie** oder **Tangente** genannt.

Die Berechnung der Quotienten $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ aus den gegebenen Gleichungen der Curve wird nach den Regeln der Differenzialrechnung vollzogen, und somit hat die analytische Bestimmung der Tangente einer Curve keine Schwierigkeit.

Man kann den Gleichungen (2), in so ferne man y und z als Functionen von x ansieht, auch die Gestalt

(3) $y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$; $z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x)$

geben.

Liegt die Curve, deren Tangente verlangt wird, ihrer ganzen Ausdehnung nach, auf einer und derselben Ebene, so wähle man diese Ebene zu jener der xy, damit die dritte Coordinate z nicht weiter beachtet zu werden braucht, also eine Gleichung zur analytischen Darstellung der Curve hinreicht. Die Gleichung der zu dem Puncte x, y gezogenen Tangente ist sodann

(4) $$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x).$$

Der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$ gibt hier die trigonometrische Tangente der Neigung der Berührenden gegen die Axe der x an.

Im Allgemeinen sind

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},\ \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},\ \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

die Cosinusse der Winkel, welche die zu dem Puncte x, y, z irgend einer krummen Linie im Raume geführte Tangente mit den Richtungen der x, y, z bildet.

Eine durch den Berührungspunct einer Tangente auf ihr senkrecht stehende Gerade heißt eine Normallinie oder Normale der correspondirenden Curve. Zu jedem Puncte einer Curve sind unzählig viele Normallinien möglich; sie liegen sämmtlich in einer im Berührungspuncte auf die Tangente perpendikulären Ebene, welche die zu diesem Puncte gehörende Normalebene der Curve genannt wird.

Sind x', y', z' die Coordinaten irgend eines Punctes der zu dem Puncte x, y, z einer krummen Linie geführten Normalebene, so ist (fünfte Vorlesung, vierte Aufgabe)

$$\frac{dx}{dz}(x' - x) + \frac{dy}{dz}(y' - y) + z' - z = 0$$

oder

(5) $$(x' - x)\,dx + (y' - y)\,dy + (z' - z)\,dz = 0$$

die Gleichung dieser Ebene.

Bei ebenen Curven wird die in ihrer Ebene auf die Tangente eines Punctes senkrechte Gerade die Normale dieses Punctes genannt. Ihre Gleichung ist

(6) $$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x).$$

Wir erwähnen bei dieser Gelegenheit noch einiger Benennungen, deren man sich in der Lehre von den ebenen Curven zu bedienen pflegt. Die Stücke der Tangente und der Normale zwischen der Abscissenaxe und dem Berührungspuncte heißen vorzugsweise die **Tangente** und **Normale** der Curve; die Stücke der Abscissenaxe hingegen zwischen der Tangente und der Ordinate des Berührungspunctes, und zwischen der Normale und dieser Ordinate, die **Subtangente** und **Subnormale**.

Wie die Gleichung (4) zeigt, ist das Stück der Abscissenaxe zwischen dem Anfangspuncte der Coordinaten und der Tangente, nämlich der Werth von x', wenn $y' = 0$ gesetzt wird, $= x - \frac{y\,dx}{dy}$; dieses, von der Abscisse abgezogen, gibt

$$(7) \qquad \text{die Subtangente} = \frac{y\,dx}{dy}.$$

Eben so folgt aus (5) die Entfernung des Durchschnittspunctes der Normale und der Abscissenaxe vom Anfangspuncte $= x + \frac{y\,dy}{dx}$, und hieraus

$$(8) \qquad \text{die Subnormale} = \frac{y\,dy}{dx}.$$

Da die Tangente mit der Ordinate und Subtangente, und die Normale mit der Ordinate und Subnormale rechtwinklige Dreiecke bilden, wovon die Tangente und die Normale die Hypotenusen sind, so haben wir

$$(9) \qquad \text{die Tangente} = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$$

und

$$(10) \qquad \text{die Normale} = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}.$$

Um diese Formeln auf Beispiele anzuwenden, betrachten wir erstlich eine Ellipse, deren Mittelpunct und größere Hauptaxe der Anfangspunct und die Axe der x sey, so ist die Gleichung dieser Curve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wobei a und b die Hälften der beiden Hauptaxen anzeigen. Hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y};$$

wird dieser Ausdruck in (4) substituirt, so erhält man

$$\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} = 1$$

für die Gleichung der zu dem Puncte x, y gezogenen Tangente der Ellipse.

Die Subtangente der Ellipse ist $= -\frac{a^2 - x^2}{x}$. Das Zeichen — bezieht sich hier auf den Umstand, daß die Lage dieser Subtangente der in der Formel (6) vorausgesetzten entgegengesetzt ist.

Für den Abstand des Durchschnittspunctes der Tangente mit der verlängerten Abscissenaxe vom Mittelpuncte findet man den einfachen Ausdruck $\frac{a^2}{x}$. Die Tangente selbst ist $= \frac{y\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}{b^2 x}$;

ferner die Subnormale $= -\frac{b^2 x}{a^2}$,

und die Normale $= \frac{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}{a^2}$.

Aus der Gleichung der Hyperbel, deren Mittelpunct und Queraxe $2a$ als Anfangspunct der Coordinaten und Abscissenaxe dienen, nämlich

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ergibt sich $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$, folglich

$$\frac{x x'}{a^2} - \frac{y y'}{b^2} = 1$$

als Gleichung der zu dem Puncte x, y gezogenen Tangente.

Die Subtangente ist hier $= \frac{x^2 - a^2}{x}$, die Subnormale $= \frac{b^2 x}{a^2}$, ꝛc.

Der Parabel gehört, in Bezug auf den Scheitel als Anfangspunct der Coordinaten und die Hauptaxe als Abscissenaxe, die Gleichung

$$y^2 = \alpha x,$$

wobei α den Parameter vorstellt. Hieraus ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{2y},$$

also $$y y' = \frac{\alpha(x' + x)}{2}$$

als Gleichung der zur Abscisse x gehörenden Tangente.

Der Werth der Subtangente ist $= 2x$, jener der Subnormale $= \frac{\alpha}{2}$.

Wie wir bereits oben bemerkt haben, ist das Stück der Abscissenaxe zwischen der Tangente eines Punctes einer ebenen Curve und dem Anfangspuncte der Coordinaten $= x - \frac{y\,dx}{dy}$; ferner ist das zwischen dem Anfangspuncte und der Tangente befindliche Stück der Ordinatenaxe $= y - \frac{x\,dy}{dx}$. Nähern sich diese beiden Größen, oder auch nur eine derselben, um so mehr bestimmten Grenzen, je größer x wird, so nähert sich die Tangente der Curve, und daher auch die Curve selbst, bei dem unendlichen Wachsen der Abscisse unendlich einer bestimmten geraden Linie, dergestalt, daß die Entfernung der Curve von dieser Geraden kleiner werden kann, als jede angebbare noch so kleine Linie, ohne jedoch gänzlich zu verschwinden. Eine Gerade von der erwähnten Eigenschaft heißt eine Asymptote in engerer Bedeutung des Wortes. Die Existenz der Asymptoten ebener Curven hängt also von dem Umstande ab, daß

$$x - \frac{y\,dx}{dy} \quad \text{und} \quad y - \frac{x\,dy}{dx}$$

bei dem unendlichen Wachsen von x nicht zugleich unendlich groß werden. Das unendliche Zunehmen einer dieser Größen allein, der ersten oder der zweiten, zeigt eine der Axe der x oder der Axe der y parallele Asymptote an. Durch die genannten Größen wird zugleich die Position der Asymptote bestimmt, den Fall ausgenommen, wenn die Grenzen beider verschwinden, d. h. wenn eine Asymptote durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, in welchem Falle es noch nöthig ist, die Grenze des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ für ein unendlich wachsendes x zu beachten. Sieht man aber auf die Grenze, welcher sich die Gleichung der Tangente, nämlich

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$$

bei dem unendlich groß Werden des x ohne Ende nähert, so fällt diese Unbestimmtheit weg.

Unter den Linien der zweiten Ordnung läßt bloß die Hyperbel Asymptoten zu. Dieß erhellet sogleich aus den Gleichungen der Tangenten dieser Curven. Die Gleichung der Tangente der Hyperbel gibt uns

$$\frac{x'}{a^2} - \frac{y}{x} \cdot \frac{y'}{b^2} = \frac{1}{x},$$

also, in Bezug auf das unendliche Wachsen von x,

$$\frac{x'}{a^2} = \frac{y'}{b^2} \; lim. \; \frac{y}{x}.$$

Es ist aber der Gleichung der Hyperbel zu Folge

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}},$$

$$\text{also} \quad lim. \; \frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a},$$

$$\text{folglich} \quad y' = \pm \frac{b}{a} x'.$$

Es entsprechen daher der Hyperbel zwei im Mittelpuncte derselben sich schneidende und gegen die Queraxe unter gleichen, der Tangente $\frac{b}{a}$ entsprechenden, Winkeln geneigte Asymptoten.

Es sey $$f(x, y, z) = 0$$
die Gleichung einer Fläche. Durch den Punct x, y, z werde auf derselben was immer für eine Linie verzeichnet, so kann man diese Linie als den Durchschnitt der gegebenen Fläche mit einer anderen, deren Gleichung wir durch

$$F(x, y, z) = 0$$

andeuten wollen, betrachten. Bezeichnen wir die partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, welche uns die Gleichung der ersten Fläche darbietet, durch p, q, und jene, welche sich aus der Gleichung der anderen ergeben, durch P, Q, so haben wir für die erste Fläche die Differenzialgleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

und für die zweite

$$dz = P\,dx + Q\,dy.$$

Da hier der Punct x, y, z sowohl der einen als der anderen Fläche gehören soll, so finden nicht mehr zwei independente variable Größen Statt, sondern jede zwei der Veränderlichen x, y, z können als Functionen der dritten betrachtet werden. Die Werthe von $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ ergeben sich aus den zwei letzteren Gleichungen. Es wird nämlich

$$\frac{dx}{dz} = \frac{Q - q}{pQ - qP},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{p - P}{pQ - qP}.$$

Zieht man nun zu der auf der ersteren Fläche verzeichneten Curve in dem Puncte x, y, z eine Tangente, so sind ihre Gleichungen:

$$x' - x = \frac{Q - q}{pQ - qP}(z' - z),$$

$$y' - y = \frac{p - P}{pQ - qP}(z' - z).$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit p, und die zweite mit q, und addirt man sodann die Producte, so erhält man

(11) $$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y).$$

Diese Gleichung ist von den Größen P, Q, und daher auch von der Gestalt der auf der Fläche $f(x, y, z) = 0$ durch den Punct x, y, z gezogenen Curve unabhängig; sie wird daher durch die Werthe der Coordinaten jedes Punctes jeder zu dem Puncte x, y, z gehörenden Tangente der genannten Curven erfüllt, und gehört deßhalb der Fläche, in welcher alle diese Tangenten liegen. Aber die erwähnte Gleichung ist in Bezug auf x', y', z' vom ersten Grade, und drückt somit die Position einer Ebene im Raume aus; es befinden sich demnach alle zu einem bestimmten Puncte irgend einer Fläche geführten Tangenten der auf dieser Fläche durch den genannten Punct verzeichneten Curven in einer und derselben Ebene. Man nennt diese Ebene die zu dem gegebenen Puncte der Fläche gehörende Berührungsebene.

Man kann dieselbe auch als die Grenze betrachten, welcher sich eine durch drei Puncte einer Fläche gelegte Ebene ohne Ende nähert, wenn die Abstände zweier dieser Puncte von dem dritten als fix betrachteten unendlich klein werden. Nimmt man für die drei Puncte diejenigen an, deren Coordinaten x, y, z, ferner $x + \Delta x$, y, $z + \Delta z$ und x, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ sind, und bezeichnet man die Coordinaten eines beliebigen Punctes der Ebene durch x', y', z', so hat man, wenn man die Gleichung dieser Ebene durch

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

vorstellt, da die Ebene durch die genannten Puncte gehen soll, die Gleichungen

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A(x + \Delta x) + By + C(z + \Delta z) + D = 0,$$
$$Ax + B(y + \Delta y) + C(z + \Delta z) + D = 0.$$

Die erste derselben gibt, mit der allgemeinen Gleichung unserer Ebene verbunden,

$$A(x'-x) + B(y'-y) + C(z'-z) = 0,$$

und von jeder der beiden anderen abgezogen,

$$A\Delta x + C\Delta z = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{A}{C} = -\frac{\Delta z}{\Delta x},$$

$$\text{und} \quad B\Delta y + C\Delta z = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{B}{C} = -\frac{\Delta z}{\Delta y};$$

daher nimmt die Gleichung der erwähnten Ebene die Form

$$z' - z = \frac{\Delta z}{\Delta x}(x' - x) + \frac{\Delta z}{\Delta y}(y' - y)$$

an. Bei dem unendlichen Abnehmen von Δz nähern sich die Quotienten $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta y}$ ohne Ende den partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, folglich ist die Gleichung der zu dem Puncte x, y, z gelegten Berührungsebene der Fläche

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

wie oben.

Als Beispiel mag die Gleichung der durch den Punct x, y, z geführten tangirenden Ebene eines Ellipsoids, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, dienen. Man hat hier

$$\frac{dz}{dx} = p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}; \quad \frac{dz}{dy} = q = -\frac{c^2 y}{b^2 z},$$

$$\text{folglich} \quad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1$$

für die verlangte Gleichung. Für die tangirende Ebene eines Hyperboloids findet man eine ähnliche Gleichung.

Das im Berührungspuncte auf die tangirende Ebene einer Fläche errichtete Perpendikel heißt die zu diesem Puncte gehörige Normale, und jede durch dieses Perpendikel gehende Ebene eine Normalebene. Stellen wir die Coordinaten eines Punctes einer Fläche, wie es früher geschehen ist, durch x, y, z, und die Coordinaten jedes Punctes seiner Normale durch x', y', z' vor, so sind die Gleichungen dieser Normale (dritte Vorlesung (11))

$$(12) \qquad x' - x + p(z' - z) = 0,$$
$$y' - y + q(z' - z) = 0.$$

Vierzehnte Vorlesung.

Über die verschiedenen Ordnungen der Berührung der Linien und Flächen.

Die Methode, deren wir uns in der vorhergehenden Vorlesung zur Bestimmung der Tangenten der Curven bedient haben, ist einer Erweiterung fähig, vermöge welcher sie sich der allgemeinen Theorie der gegenseitigen Berührung krummer Linien zum Grunde legen läßt.

Betrachten wir, der größeren Einfachheit wegen, vor der Hand bloß ebene Curven, und beziehen wir dieselben auf zwei in ihrer gemeinschaftlichen Ebene angenommene rechtwinklige Axen.

Es sey

(1) $$y = f(x)$$

die Gleichung irgend einer solchen völlig bestimmten Curve. Setzen wir

(2) $$x = \varphi(t),$$

wobei φ eine beliebige Function der Variablen t anzeigt, und lassen wir die letztere aus ihrem anfänglichen Zustande nach und nach in

$$t + \Delta t, \quad t + 2\Delta t, \quad t + 3\Delta t, \; \ldots \; t + n\Delta t$$

übergehen, wodurch x sich in

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \; \ldots\ldots\ldots, \; x_n,$$

und y, der Gleichung der gegebenen Curve gemäß, sich in

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \; \ldots\ldots\ldots \; y_n$$

verwandle, so wird auf dieser Curve eine Folge von Puncten bestimmt, deren Intervalle von der Größe der Differenz Δt abhängen.

Nun sey

(3) $$Y = F(X)$$

die Gleichung einer Curve, worin n oder noch mehrere unbestimmte Constanten erscheinen, durch deren willkürliche Annahme die Position dieser Curve hinsichtlich der Axen der Coordinaten, die Dimensionen derselben u. d. gl. nach Gefallen modificirt werden können. Da man im Allgemeinen immer im Stande seyn wird, die erwähnten Constanten so zu wählen, daß die Gleichungen

(4) $$y = F(x), \; y_1 = F(x_1), \; y_2 = F(x_2), \; \ldots\ldots \; y_n = F(x_n)$$

Statt finden, so kann die zweite Curve so eingerichtet werden, daß sie durch die Puncte der ersteren, deren Coordinaten

$$x,\ y;\ x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2;\ \ldots\ldots\ x_n,\ y_n$$

sind, hindurchgeht.

Läßt man jetzt Δt unendlich abnehmen, so nähern sich die letzteren n Puncte dem ersten, auf die Coordinaten x, y sich beziehenden, ohne Ende; die zweite Curve aber nähert sich unendlich einer gewissen krummen Linie, welche der durch die Gleichung (1) vorgestellten bloß in dem Puncte x, y begegnet, aber daselbst mit ihr eine gemeinschaftliche Tangente besitzt, die gerade Linie nämlich, welcher sich die durch die Puncte, deren Abscissen x und x_1 sind, gezogene Secante unter obiger Voraussetzung unendlich nähert. Man sagt deßhalb, die letztgenannte Curve stehe mit der gegebenen in dem Puncte x, y in Berührung, und da die Anzahl der den Curven $y = f(x)$ und $Y = F(X)$ außer dem Puncte x, y noch gemeinschaftlichen Puncte auf die Beschaffenheit der gefundenen Berührenden, folglich auch auf die Art der Berührung einen wesentlichen Einfluß ausübt, so unterscheidet man, in Übereinstimmung mit dieser Anzahl, mehrere Ordnungen der Berührung, und nennt somit die in dem obigen Falle sich ergebende, eine Berührung der n^{ten} Ordnung.

Behandelt man die Gleichungen (4) wie die Glieder einer Hauptreihe, wenn man mittelst derselben die ersten Glieder der successiven Differenzreihen aufsucht, so findet man die den Gleichungen (4) völlig gleichgeltenden Gleichungen

$$(5)\quad y = F(x),\ \Delta y = \Delta F(x),\ \Delta^2 y = \Delta^2 F(x),\ \ldots\ \ldots\ \Delta^n y = \Delta^n F(x);$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichung (1)

$$(6)\quad F(x) = f(x),\ \Delta F(x) = \Delta f(x),\ \Delta^2 F(x) = \Delta^2 f(x),\ \ldots\ \ldots\ \Delta^n F(x) = \Delta^n f(x),$$

durch welche die Werthe der in der Gleichung (3) enthaltenen Constanten so bestimmt werden, daß die Curve $Y = F(X)$ die gegebene $y = f(x)$ in den oben angezeigten $n + 1$ Puncten trifft.

Bei dem unendlichen Abnehmen von Δt verwandeln sich die Gleichungen (6) in

$$(7)\quad F(x) = f(x),\ dF(x) = df(x),\ d^2 F(x) = d^2 f(x),\ \ldots\ \ldots\ d^n F(x) = d^n f(x),$$

wobei die Differenziationen so zu verrichten sind, daß $d^2 t = 0$ ist. Um also die Gleichung der unter der allgemeinen Form

$$Y = F(x)$$

begriffenen Curve zu erhalten, welche mit der gegebenen

$$y = f(x)$$

sich in einer Berührung der n^{ten} Ordnung befindet, muß man die in $F(X)$ erscheinenden Constanten, den Gleichungen (7) gemäß, durch x ausdrücken.

Wie diese Deduction zeigt, besteht das Wesen einer Berührung der n^{ten} Ordnung zwischen zwei ebenen Curven darin, daß in Beziehung auf irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem die n ersten Differenzialien der Ordinaten dieser Curven für die Abscisse des Berührungspunctes gleiche Werthe annehmen.

Je höher der Ordnungsexponent der Berührung zweier ebenen Curven ist, desto näher liegen sich dieselben in der Gegend des Berührungspunctes; und zwar ist es nicht möglich zwischen diesen Curven durch ihren Berühtungspunct eine dritte Curve zu verzeichnen, welche mit denselben in einer Berührung von niedrigerer Ordnung steht.

Denn befinden sich die Curven

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad Y = F(X)$$

in dem Puncte, dessen Abscisse x ist, in einer Berührung der n^{ten} Ordnung, und nehmen wir den Unterschied ihrer von dem Berührungspuncte um die Differenz Δx entfernten Ordinaten, so erhalten wir dafür, vorausgesetzt, daß die gemeinschaftliche Tangente der beiden Curven der Axe der y nicht parallel lauft, also $\frac{df(x)}{dx}$ nicht unendlich wird, und in den obigen Betrachtungen $t = x$ oder dx constant ist, wegen

$$F(x) = f(x), \; \frac{dF(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}, \; \frac{d^2F(x)}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \; \ldots\ldots \frac{d^nF(x)}{dx^n} = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

mit Hülfe des Taylor'schen Lehrsatzes

$$F(x+\Delta x) - f(x+\Delta x) = \frac{\Delta x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}[F_{n+1}(x+\Theta\Delta x) - f_{n+1}(x+\theta\Delta x)],$$

wobei Θ, θ die Einheit nicht überschreiten.

Eine Curve $y = \psi(x)$, welche den beiden ersteren in dem Puncte,

dessen Abscisse x ist, begegnet, aber daselbst mit denselben eine Berührung von niedrigerer Ordnung als die oben genannte darbietet, gibt uns

$$F(x+\Delta x)-\psi(x+\Delta x)=\frac{\Delta x^{r+1}}{1.2.3\ldots(r+1)}[F_{r+1}(x+\Theta'\Delta x)-\psi_{r+1}(x+\theta'\Delta x)],$$

wobei $r<n$ ist. Bei den kleinsten Werthen von Δx wird daher offenbar ohne Rücksicht auf die Zeichen

$$F(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)<F(x+\Delta x)-\psi(x+\Delta x),$$

weßwegen es unmöglich ist, daß die dritte Curve zwischen den beiden ersten hindurch gehe.

Es wird nun nicht schwierig seyn, die hier gegebene Theorie der Berührungen ebener Curven auf jene wie immer gestalteter, im Raume sich begegnender, Curven auszudehnen.

Lassen wir anfänglich die beiden Curven $n+1$ Puncte mit einander gemein haben, und sodann diese Puncte sich unendlich nähern, damit die eine als variabel betrachtete Curve dem Zustande einer Berührung der n^{ten} Ordnung mit der anderen ursprünglich gegebenen ohne Ende näher trete, und sehen wir dabei auf die Projectionen, welche diese Curven in den coordinirten Ebenen darbieten, so erhellet sogleich, daß zwischen diesen Projectionen ebenfalls eine Berührung, wenn nicht von höherer, doch wenigstens von derselben Ordnung Statt findet, wie bei den projicirten Curven selbst; und umgekehrt, daß, wenn die Projectionen zweier Curven auf zwei der coordinirten Ebenen, jedes Paar für sich, in einer Berührung einer bestimmten Ordnung stehen, diese Berührung auch zwischen den projicirten Curven selbst besteht.

Die Gleichungen irgend einer gegebenen Curve lassen sich stets auf die Formen

(8) $$y=f(x),\quad z=f'(x),$$

und jene der Curve, welche mit dieser im Puncte x, y, z in einer Berührung der n^{ten} Ordnung stehen soll, auf die Formen

(9) $$Y=F(X),\quad Z=F'(X)$$

bringen. Denn sind in jeder der zwei zusammengehörigen Gleichungen einer Curve alle drei Coordinaten enthalten, so eliminire man ein Mal eine, und das zweite Mal eine andere derselben; hiedurch ergeben sich die obigen Formen.

Da der Projection eines beliebigen Punctes x, y, z auf die Ebene xy dieselben Werthe von x und y zukommen, welche dem projicirten Puncte selbst gehören, so wird der Gleichung $y=f(x)$ auch

durch alle Puncte der Projection der gegebenen Curve auf die Ebene xy Genüge geleistet; oder mit anderen Worten: $y = f(x)$ ist die Gleichung dieser Projection selbst, in so ferne man sie auf ein in der Projectionsebene angenommenes Coordinatensystem bezieht. Eben so ist $z = f'(x)$ die Gleichung der Projection derselben Curve auf die Ebene xz, und dasselbe gilt auch von den Gleichungen der anderen Curve.

Wird nun gefordert, daß zwischen beiden Curven eine Berührung der n^{ten} Ordnung Statt finde, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$F(x) = f(x),\ dF(x) = df(x),\ d^2F(x) = d^2f(x), \ldots \ldots d^nF(x) = d^nf(x),$$

$$F'(x) = f'(x),\ dF'(x) = df'(x),\ d^2F'(x) = d^2f'(x), \ldots \ldots d^nF'(x) = d^nf'(x),$$

mittelst welcher man die in den Gleichungen (9) erscheinenden Constanten, vorausgesetzt, daß sie in hinreichender Anzahl vorhanden sind, dermaßen bestimmen kann, daß wirklich zwischen beiden Curven in dem Puncte x, y, z eine Berührung der n^{ten} Ordnung zu Stande kömmt. Es ist also zum Vorhandenseyn einer solchen Berührung bloß erforderlich, daß für beide Curven sowohl die Coordinaten des Berührungspunctes, als auch die Differenzialien dieser Coordinaten der Reihe nach bis zu jenen der n^{ten} Ordnung mit einander übereinstimmen; daher kann man die erwähnten Constanten bestimmen, wenn man die Gleichungen beider Curven n Male hinter einander differenzirt, und alle nun vorhandenen Gleichungen zusammen bestehen läßt, die gegebenen Gleichungen der Curven mögen obige Formen (8), (9) haben oder nicht.

Man sieht aus dem hier Gesagten ohne weitere Erinnerung, daß zwischen einer geraden Linie und einer Curve im Allgemeinen bloß eine Berührung der ersten Ordnung bestehen kann, denn die Gleichungen einer Geraden im Raume enthalten in ihrer allgemeinsten Form bloß vier beständige Größen, welche demnach eben hinreichen, die Gerade durch einen gegebenen Punct der Curve so gehen zu lassen, daß dort die ersten Differenzialien ihrer Coordinaten mit jenen der Curve übereinstimmen. In besonderen Fällen, nämlich für specielle Puncte der Curve, kann jedoch diese Berührung zu einer höheren Ordnung steigen, wie wir weiterhin zeigen werden.

Stellen wir uns nun vor, zweien in einem Puncte sich begegnenden Flächen gehöre daselbst die nämliche Berührungsebene, d. h. zwischen den Flächen finde in dem genannten Puncte eine Berührung

Statt, und durch den Berührungspunct werde eine Normalebene geführt, so schneidet dieselbe die beiden Flächen in krummen Linien, welche sich in eben diesem Puncte berühren, da sie in demselben die Durchschnittslinie der Normalebene mit der Berührungsebene der Flächen zur gemeinschaftlichen Tangente haben. Ändert die Normalebene ihre Lage, ohne jedoch den Berührungspunct der Flächen zu verlassen, so unterliegt im Allgemeinen die Gestalt jeder der Curven und ihre gegenseitige Annäherung einem Wechsel. Man sagt nun, zwischen den beiden Flächen bestehe eine Berührung der n^{ten} Ordnung, wenn die geringste Ordnungszahl der Berührung je zweier durch einen solchen Normalschnitt erzeugter Curven gleich n ist.

Es seyen

$$(10) \qquad z = f(x, y) \quad \text{und}$$

$$(11) \qquad Z = F(X, Y)$$

die Gleichungen zweier in dem Puncte x, y, z sich berührender Flächen, wovon wir uns hier die erste als völlig bestimmt, die zweite hingegen, der willkürlichen Constanten wegen, welche in ihrer Gleichung vorhanden sind, als unbestimmt denken. Sind x′, y′, z′ die Coordinaten irgend eines Punctes ihrer gemeinschaftlichen Berührungsebene, so ist die Gleichung dieser Ebene sowohl

$$z' - z = \frac{df(x, y)}{dx}(x' - x) + \frac{df(x, y)}{dy}(y' - y),$$

als auch

$$z' - z = \frac{dF(x, y)}{dx}(x' - x) + \frac{dF(x, y)}{dy}(y' - y);$$

weßwegen nebst der, durch den Umstand, daß der Punct x, y, z beiden Flächen zugleich gehört, geforderten Gleichung $F(x, y) = f(x, y)$ noch die Gleichungen

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = \frac{df(x, y)}{dx}, \quad \frac{dF(x, y)}{dy} = \frac{df(x, y)}{dy}$$

bestehen müssen. Wir wollen nun voraussetzen, daß die erwähnte Berührungsebene der Axe der z nicht parallel sey, damit keiner dieser partiellen Differenzialquotienten unendlich werde. Die Gleichung irgend einer durch den Punct x, y, z geführten Ebene hat, wenn x′, y′, z′ die Coordinaten jedes Punctes derselben anzeigen, die Form

$$z' - z = A(x' - x) + B(y' - y),$$

wobei die willkürlichen Größen A, B erst in so fern bestimmte Werthe

erhalten, als die Position dieser Ebene nicht mehr ungewiß ist. Schreiben wir, der Kürze wegen, p und q statt $\frac{df(x,y)}{dx}$ oder $\frac{dF(x,y)}{dx}$, und $\frac{df(x,y)}{dy}$ oder $\frac{dF(x,y)}{dy}$, so wird letztere Ebene eine Normalebene beider Flächen seyn, d. h. auf ihrer gemeinschaftlichen Berührungsebene senkrecht stehen, wenn

$$Ap + Bq + 1 = 0$$

ist, wodurch also nur mehr eine der Größen A, B willkürlich bleibt.

Die Gleichungen der Curve, welche durch eine dem Puncte x, y, z zugehörende Normalebene auf der Fläche (10) hervorgebracht wird, sind, wenn x', y', z' die Coordinaten jedes Punctes dieser Curve andeuten: $z' = f(x', y')$ und $z' - z = A(x' - x) + B(y' - y)$, wobei A und B durch die Bedingungsgleichung $Ap + Bq + 1 = 0$ mit einander zusammenhängen; eben so sind bei ähnlicher Bedeutung von X', Y', Z'

$$Z' = F(X', Y') \text{ und } Z' - z = A(X' - x) + B(Y' - y)$$

die Gleichungen der durch eben dieselbe Normalebene auf der Fläche (11) erzeugten Curve, wobei wieder $Ap + Bq + 1 = 0$ ist.

Stellen wir uns nun vor, aus beiden Systemen dieser Gleichungen seyen nach verrichteter Elimination einer der Größen A, B, z. B. der Größe B, und, indem man x', X' als die independenten Variablen ansieht, deren höhere Differenzialien = 0 gelten, die Werthe der Differenzialquotienten

$$\frac{dy'}{dx'}, \frac{d^2y'}{dx'^2}, \frac{d^3y'}{dx'^3}, \ldots \quad \frac{dz'}{dx'}, \frac{d^2z'}{dx'^2}, \frac{d^3z'}{dx'^3}, \ldots$$

$$\frac{dY'}{dX'}, \frac{d^2Y'}{dX'^2}, \frac{d^3Y'}{dX'^3}, \ldots \quad \frac{dZ'}{dX'}, \frac{d^2Z'}{dX'^2}, \frac{d^3Z'}{dX'^3}, \ldots$$

berechnet, so müssen, wenn zwischen den durch erwähnte Normalebene bei jeder ihrer Positionen auf beiden Flächen hervorgebrachten Curven wenigstens eine Berührung der n^{ten} Ordnung Statt finden soll, die correspondirenden dieser Differenzialquotienten bis zu jenen der n^{ten} Ordnung für beide Flächen, unabhängig von dem Werthe von A, einerlei Werthe erhalten, wenn man die Coordinaten x, y, z des Berührungspunctes an die Stelle der allgemeinen Coordinaten treten läßt. Dadurch erscheinen aber je zwei einander gleichgestellte Differenzialquotienten aus den der Fläche, auf welche sie sich beziehen, entsprechenden Größen

$f(x, y)$, $\frac{df(x,y)}{dx}$, $\frac{df(x,y)}{dy}$, $\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy}$, $\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}$, ꝛc.

$F(x, y)$, $\frac{dF(x,y)}{dx}$, $\frac{dF(x,y)}{dy}$, $\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}$, $\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy}$, $\frac{d^2F(x,y)}{dy^2}$, ꝛc.

auf einerlei Weise gebildet; sie können daher nicht übereinstimmen, wofern nicht, außer den oben bereits angeführten, auch noch die Gleichungen

$$\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}=\frac{d^2f(x,y)}{dx^2},\ \frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy}=\frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy},\ \frac{d^2F(x,y)}{dy^2}=\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}$$

$$\frac{d^3F(x,y)}{dx^3}=\frac{d^3f(x,y)}{dx^3},\ \text{ꝛc.}$$

bis zu jenen, worin Differenzialien der n^{ten} Ordnung erscheinen, realisirt werden. Dieses sind demnach die Bedingungen, welchen die in (11) enthaltenen Constanten genügen müssen, damit die Flächen (10) und (11) am Puncte x, y, z sich in einer Berührung der n^{ten} Ordnung befinden.

Da, sobald diese Bedingungen erfüllt sind, die Differenzialquotienten

$$\frac{dy'}{dx'},\ \frac{d^2y'}{dx'^2},\ \ldots\ \frac{dz'}{dx'},\ \frac{d^2z'}{dx'^2},\ \text{ꝛc. und}\ \frac{dY'}{dX'},\ \frac{d^2Y'}{dX'^2},\ \ldots\ \frac{dZ'}{dX'},\ \frac{d^2Z'}{dX'^2},\ \text{ꝛc.}$$

für $x'=X'=x$ einander beziehungsweise gleich kommen, wenn auch A und B nicht durch die Gleichung $Ap+Bq+1=0$ mit einander in Verbindung stehen, so sieht man, daß überhaupt zwei mit einander in einer Berührung der n^{ten} Ordnung befindliche Flächen, von jeder durch den Berührungspunct gelegten Ebene in Curven geschnitten werden, zwischen welchen wenigstens eine Berührung der n^{ten} Ordnung obwaltet.

Fünfzehnte Vorlesung.

Über die Bestimmung des Krümmungskreises einer Curve.

Es sey die Gleichung einer ebenen Curve für ein auf ihrer Ebene angenommenes rechtwinkliges Coordinatensystem gegeben; bestimmen wir die Position und Größe eines Kreises, welcher mit dieser Curve im Puncte x, y in einer Berührung der ersten Ordnung steht. Sind ξ, v die Coordinaten des Mittelpunctes eines Kreises in dem angenommenen Coordinatensysteme, und ist ρ sein Halbmesser, so ist

(1) $$(x-\xi)^2 + (y-v)^2 = \rho^2$$

die Gleichung desselben. Soll nun der Kreis der Curve in dem gegebenen Puncte begegnen, so muß die Gleichung (1) bestehen, wenn man sich unter x und y die Coordinaten dieses Punctes, folglich y durch x der Gleichung der Curve gemäß bestimmt denkt. Soll überdieß der Kreis sich mit der Curve in einer Berührung der ersten Ordnung befinden, so muß auch noch der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$, sowohl aus der Gleichung der Curve, als auch aus jener des Kreises berechnet und auf den gegebenen Punct bezogen, einerlei Werth erhalten, d. h. die durch Differenziation von (1) entstehende Gleichung

(2) $$(x-\xi)\,dx + (y-v)\,dy = 0$$

muß richtig seyn, wenn man y und $\frac{dy}{dx}$ als durch die Gleichung der Curve bestimmte Functionen von x ansieht, und dabei die letztere Variable mit dem vorgeschriebenen Werthe belegt.

Es wird also der vorgelegten Aufgabe Genüge geleistet, wenn man die Werthe der Constanten ξ, v, ρ den auf den Punct x, y der Curve bezogenen Gleichungen (1) und (2) gemäß wählt. Da hier die Anzahl der Constanten, über welche man verfügen kann, die Anzahl der Gleichungen, an welche sie gebunden sind, übersteigt, so werden sich offenbar unzählig viele Kreise von der geforderten Beschaffenheit angeben lassen.

Es wird am bequemsten seyn, mittelst der Gleichungen (1) und (2) ξ und v durch x, y, dx, dy und ρ auszudrücken. Die zweite Glei-

chung gibt uns

$$x - \xi = -(y - v)\cdot\frac{dy}{dx};$$

substituiren wir diesen Ausdruck für $x - \xi$ in die erste, so haben wir

$$(y - v)^2 \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2 = \rho^2,$$

folglich $y - v = \frac{\rho\, dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$,

wodurch $x - \xi = -\frac{\rho\, dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$

wird. Hat man also die Größe des Halbmessers ρ nach Belieben angenommen, so werden die Coordinaten des Mittelpunctes des Kreises durch die Formeln

$$(3) \qquad \xi = x + \frac{\rho\, dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \quad v = y - \frac{\rho\, dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

gefunden. Wir bemerken hier, daß für jeden Werth von ρ zwei Werthe von ξ und v möglich sind; es gibt also für jeden mit der Curve in Berührung stehenden Kreis noch einen ihm gleichen, die Curve an derselben Stelle berührenden: jedoch befinden sich diese zwei Kreise auf entgegengesetzten Seiten des durch sie berührten Astes der Curve. In der That, sind ξ_1, v_1 die Coordinaten des Mittelpunctes des einen, und ξ_2, v_2 die Coordinaten des Mittelpunctes des andern, so bestehen, wie die Formeln (3) zeigen, wenn man daselbst $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ sowohl positiv als negativ nimmt, die Gleichungen

$$\xi_1 + \xi_2 = 2x, \quad v_1 + v_2 = 2y;$$

aus welchen hervorgeht, daß ξ_1, ξ_2 nicht zugleich kleiner oder größer als x, und v_1, v_2 nicht zugleich kleiner oder größer als y seyn können.

Betrachten wir in der Gleichung (2) ξ und v, der Unbestimmtheit von ρ wegen, als veränderliche Größen, und geben wir dieser Gleichung die Gestalt

$$v - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x),$$

so stimmt dieselbe mit der in der dreizehnten Vorlesung erhaltenen Gleichung (6) überein; es liegen also die Mittelpuncte aller mit einer Curve an einer und derselben Stelle in Berührung stehender Kreise in der zum Berührungspuncte gezogenen Normale, was auch ohne Rechnung aus dem Umstande hätte erschlossen werden können, daß der Kreis und die Curve im Berührungspuncte dieselbe Tangente besitzen.

Es soll nun die zwischen der gegebenen Curve und dem Kreise (1) im Puncte x, y Statt findende Berührung zur zweiten Ordnung gehören.

In diesem Falle müssen die Größen ξ, v, ρ so beschaffen seyn, daß außer den Gleichungen (1) und (2) auch noch das Differenzial der Gleichung (2), oder, wenn man will, das Differenzial der Gleichung

$$x - \xi + (y - v)\frac{dy}{dx} = 0,$$

nämlich die Gleichung

$$(4) \qquad \frac{dx^2 + dy^2}{dx} + (y - v)\, d\frac{dy}{dx} = 0$$

besteht, wenn man die darin erscheinenden Coordinaten und ihre Differenzialien in Bezug auf den Punct x, y des Kreises und der Curve als gleichbedeutend ansieht.

Aus der Gleichung (4) folgt

$$y - v = -\frac{dx^2 + dy^2}{dx \,.\, d\frac{dy}{dx}};$$

mit Hülfe dieses Ausdruckes gibt uns die Gleichung (2)

$$x - \xi = \frac{(dx^2 + dy^2)\,dy}{dx^2 \,.\, d\frac{dy}{dx}},$$

und daher erhalten wir aus (1)

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - v)^2} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^2 \,.\, d\frac{dy}{dx}}.$$

Es werden demnach die Coordinaten des Mittelpunctes des mit der Curve im Puncte x, y in einer Berührung der zweiten Ordnung befindlichen Kreises durch die Formeln

$$(5) \quad \xi = x - \frac{(dx^2 + dy^2)\,dy}{dx^2 \,.\, d\frac{dy}{dx}} = x - \frac{(dx^2 + dy^2)\,dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

$$v = y + \frac{dx^2 + dy^2}{dx \,.\, d\frac{dy}{dx}} = y + \frac{(dx^2 + dy^2)\,dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^2 \,.\, d\frac{dy}{dx}} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

ausgedrückt, und somit ist dieser Kreis sowohl der Größe als Lage

nach völlig bestimmt, d. h. zu jedem Puncte einer Curve gehört bloß ein einziger Kreis, welcher mit derselben in einer Berührung der zweiten Ordnung steht. Man wird nun leicht einsehen, daß es im Allgemeinen nicht möglich ist, einen Kreis anzugeben, dessen Berührung mit einer Curve zu einer höheren Ordnung als zur zweiten gehörte; denn hiezu würde erfordert, daß die drei Constanten ξ, v, ρ auch noch den ferneren Differenzialien der Gleichung (1), also mehr als drei Gleichungen Genüge leisten, was nur in einzelnen Fällen, nämlich nur für besondere Puncte specieller Curven angeht.

In obigen Formeln können sich die zweiten Differenzialien nach Belieben auf ein constant gesetztes erstes Differenzial beziehen oder nicht; sie bieten stets einerlei Resultate dar. Meistens wird $d^2 x = 0$ angenommen; hiedurch nehmen diese Formeln die einfacheren Gestalten

(6)
$$\xi = x - \frac{(dx^2 + dy^2)\, dy}{dx\, d^2 y},$$
$$v = y + \frac{dx^2 + dy^2}{d^2 y},$$
$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2 y}$$

an.

Der durch die Formeln (5) oder (6) bestimmte Kreis steht nach dem, was wir in der vorhergehenden Vorlesung über die Eigenschaften höherer Ordnungen der Berührungen der Curven gesagt haben, mit der vorgelegten Curve an der durch die Coordinaten x, y bezeichneten Stelle in einer innigeren Berührung, als jeder andere Kreis, so daß es nicht möglich ist, daselbst zwischen der Curve und dem ersteren Kreise einen anderen hindurch zu führen. Man kann die Krümmung einer Curve in jedem beliebigen Puncte füglich nach der Krümmung des Kreises beurtheilen, welcher ihr dort unter allen Kreisen am nächsten kommt; daher wird der Kreis, dessen Berührung mit einer Curve zur zweiten Ordnung gehört, der dem Berührungspuncte entsprechende **Krümmungskreis**, sein Halbmesser der **Krümmungshalbmesser**, und sein Mittelpunct der **Krümmungsmittelpunct** der Curve genannt.

Man kann den einem bestimmten Puncte x, y einer Curve entsprechenden Krümmungsmittelpunct als die Grenze betrachten, welcher sich der Durchschnittspunct der Normale des Punctes x, y mit der Normale eines zweiten Punctes der Curve bei dem unendlichen Abneh-

men des Abstandes beider Puncte unendlich nähert. Denn es seyen $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die Coordinaten des zweiten Punctes der Curve; x', y' die Coordinaten irgend eines Punctes der zu dem ersteren, und x'', y'' die Coordinaten irgend eines Punctes der zu dem letzteren gezogenen Normale, so bestehen (dreizehnte Vorlesung (6)) die Gleichungen

$$x' - x + (y' - y) \frac{dy}{dx} = o,$$

$$x'' - (x + \Delta x) + [y'' - (y + \Delta y)] \frac{d(y + \Delta y)}{d(x + \Delta x)} = o.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunctes beider Normalen durch ξ, v, so können wir sowohl x' als x'' gleich ξ, und sowohl y' als y'' gleich v nehmen. Wir haben somit erstlich

$$\xi - x + (v - y) \frac{dy}{dx} = o,$$

welche Gleichung mit (2) einerlei ist, und ferner

$$\xi - (x + \Delta x) + [v - (y + \Delta y)] \frac{d(y + \Delta y)}{d(x + \Delta x)} = o,$$

welche Gleichung, von der vorhergehenden abgezogen,

$$\Delta x + (y - v) \left[\frac{d(y + \Delta y)}{d(x + \Delta x)} - \frac{dy}{dx}\right] + \Delta y . \frac{d(y + \Delta y)}{d(x + \Delta x)} = o$$

oder

$$\Delta x + \Delta y \frac{d(y + \Delta y)}{d(x + \Delta x)} + (y - v)\, \Delta \frac{dy}{dx} = o$$

gibt, woraus man, wenn Δx in den Zustand des unendlichen Abnehmens versetzt wird,

$$dx + \frac{dy^2}{dx} + (y - v)\, d\, \frac{dy}{dx} = o,$$

nämlich die Gleichung (4) erhält. Es sind also die Grenzen, welchen sich ξ und v bei dem unendlichen Abnehmen von Δx ohne Ende nähern, mit den in (5) aufgestellten Werthen der Coordinaten des zum Puncte x, y gehörenden Krümmungsmittelpunctes einerlei, woraus die Richtigkeit der obigen Behauptung erhellet.

Da die Länge der zu dem Puncte x, y einer ebenen Curve gehörenden Normale (dreizehnte Vorlesung (10)) durch die Formel $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$ ausgedrückt wird, so hat man, wenn man diese Länge durch N bezeichnet, und sie in die dritte der Formeln (5) einführt, den Krümmungshalbmesser

(7) $$\rho = \frac{N^3\,dx}{y^3\,d\frac{dy}{dx}},$$

und für $d^2x = 0$,

(8) $$\rho = \frac{N^3\,dx^2}{y^3\,d^2y}.$$

Berechnen wir nun die Größe des Krümmungshalbmessers für irgend einen Punct einer Ellipse, deren Halbaxen a und b sind.

Die Gleichung der Ellipse ist, wenn die Abscissen vom Mittelpuncte aus auf der Axe 2a gezählt werden,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und gibt uns $dy = -\frac{b^2x}{a^2y}\,dx$, also

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2}\,dx^2,$$

und wenn $d^2x = 0$ angenommen wird,

$$d^2y = -\frac{a^2b^2(y - x\,dy)\,dx^2}{a^4y^2} = -\frac{b^4\,dx^2}{a^2y^3},$$

folglich $$\rho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4};$$

wobei jedoch zu bemerken ist, daß die Quadratwurzel aus $(a^4y^2 + b^4x^2)^3$ mit dem Zeichen — genommen werden muß, um ρ, welcher Größe offenbar nur ein positiver Werth beigelegt werden kann, mit dem Zeichen + zu erhalten. Diese in geometrischer Beziehung bedeutungslose Unbestimmtheit des Zeichens der berechneten Größe findet in allen Fällen Statt, in welchen mit Hülfe des pythagorischen Satzes die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes durch die Katheten desselben auf algebraischem Wege ausgemittelt wird, wie es bei der Angabe von ρ durch die Gleichung (1) wirklich der Fall ist. Dieselbe Bemerkung ist auf die in der dreizehnten Vorlesung erhaltenen Formeln (9) und (10) anwendbar. Unter welchen Umständen aber der Quotient $\frac{dy}{dx}$ und sein Differenzial einerlei oder entgegengesetzte Zeichen besitzen, ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels anzeigt, welchen die zur Abscisse x gehörende Tangente einer Curve mit dem positiven Theile der Axe der x bildet, folglich bei dem Wachsen der Abscisse im algebraischen Sinne wächst oder abnimmt,

je nachdem die Curve gegen die Axe der Abscissen convex oder concav ist. Will man bei dem Gebrauche der Formel für den Krümmungshalbmesser einen dieser Fälle auf den positiven Werth desselben beziehen, so wird das Stattfinden des anderen Falles durch das entgegengesetzte Zeichen der genannten Größe angedeutet.

Der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser der Ellipse erleidet durch die Vertauschung von b mit $b\sqrt{-1}$ keine Änderung; daher gilt dieselbe Formel auch für die Hyperbel.

Mit Hülfe des Ausdruckes für die Normale N der Ellipse (dreizehnte Vorlesung) findet man

$$\rho = \frac{N^3}{(\frac{1}{2}\alpha)^2},$$

wobei $\alpha = \frac{2b^2}{a}$ den Parameter der genannten Curve vorstellt. Dieser letztere Ausdruck für ρ ist auch auf die Hyperbel und Parabel anwendbar.

Wenden wir uns jetzt zur Bestimmung der Coordinaten des Krümmungsmittelpunctes und des Krümmungshalbmessers für jeden Punct einer wie immer gestalteten Curve.

Ist ρ der Halbmesser, und sind ξ, v, $\mathfrak{z}$ die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunctes eines Kreises im Raume, so gehören demselben, da man ihn immer als den Durchschnitt einer aus dem Centrum ξ, v, $\mathfrak{z}$ mit dem Halbmesser ρ beschriebenen Kugel mit einer durch dieses Centrum geführten Ebene ansehen kann, die Gleichungen

$$(9) \qquad (x-\xi)^2 + (y-v)^2 + (z-\mathfrak{z})^2 = \rho^2,$$

$$(10) \qquad A(x-\xi) + B(y-v) + z - \mathfrak{z} = 0.$$

Nehmen wir x, y, z gleich für die Coordinaten des Berührungspunctes dieses Kreises mit der gegebenen Curve an, und lassen wir die Berührung beider zur zweiten Ordnung gehören, so gesellen sich zur Bestimmung von ξ, v, $\mathfrak{z}$, ρ zu den obigen Gleichungen noch folgende:

$$(11) \qquad (x-\xi)dx + (y-v)dy + (z-\mathfrak{z})dz = 0,$$

$$(12) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 + (x-\xi)d^2x + (y-v)d^2y + (z-\mathfrak{z})d^2z = 0$$

als das erste und zweite Differenzial der Gleichung (9), und

$$(13) \qquad A\,dx + B\,dy + dz = 0,$$

$$(14) \qquad A\,d^2x + B\,d^2y + d^2z = 0$$

als die beiden Differenzialien der Gleichung (10). Diese geben

$$(15) \quad A = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \quad B = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Durch Verbindung von (10) mit (11) und (12) erhält man

$$(x-\xi)(dx-A\,dz)+(y-v)(dy-B\,dz)=0,$$

$$(x-\xi)(d^2x-A\,d^2z)+(y-v)(d^2y-B\,d^2z)=-(dx^2+dy^2+dz^2),$$

und hieraus

(16) $$x-\xi=$$

$$=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(dy-B\,dz)}{dx\,d^2y-dy\,d^2x-A(dz\,d^2y-dy\,d^2z)-B(dx\,d^2z-dz\,d^2x)}$$

$$y-v=$$

$$=-\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(dx-A\,dz)}{dx\,d^2y-dy\,d^2x-A(dz\,d^2y-dy\,d^2z)-B(dx\,d^2z-dz\,d^2x)}$$

also vermöge (10)

(17) $$z-z=$$

$$=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(B\,dx-A\,dy)}{dx\,d^2y-dy\,d^2x-A(dz\,d^2y-dy\,d^2z)-B(dx\,d^2z-dz\,d^2x)}.$$

Man setze der Kürze wegen

$$dx\,d^2y-dy\,d^2x=Z,\quad dz\,d^2x-dx\,d^2z=Y,\quad dy\,d^2z-dz\,d^2y=X,$$

so findet man durch Verbindung von (15) mit (16) und (17):

(18) $$x-\xi=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(Z\,dy-Y\,dz)}{X^2+Y^2+Z^2},$$

$$y-v=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(X\,dz-Z\,dx)}{X^2+Y^2+Z^2},$$

$$z-z=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(Y\,dx-X\,dy)}{X^2+Y^2+Z^2},$$

woraus sich die Werthe von ξ, v, z leicht ergeben. Führt man die Ausdrücke (18) in die Gleichung (9) ein, so ergibt sich

$$\rho^2=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2}\left[(Y\,dx-X\,dy)^2+(X\,dz-Z\,dx)^2+(Z\,dy-Y\,dz)^2\right]$$

$$=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2}\left[(X^2+Y^2+Z^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)^2\right]$$

Aber, wie die durch X, Y, Z vorgestellten Ausdrücke zeigen, ist

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0,$$

folglich

(19) $$\rho=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2}}$$

$$=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2)-(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)^2}}.$$

Die Ebene, in welcher der zum Puncte x, y, z gehörende Krümmungskreis der Curve liegt, verdient besonders bemerkt zu werden. Sie heißt die Krümmungsebene der Curve, und kommt letzterer an dem Puncte x, y, z näher, als jede andere Ebene. Bezeichnet man die Coordinaten irgend eines Punctes der Krümmungsebene mit x', y', z', so erhält man offenbar ihre Gleichung, wenn man diese Größen in (10) statt ξ, υ, ζ setzt. Sie ist

$$(20)\quad (x'-x)(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+(y'-y)(dz\,d^2x-dx\,d^2z)$$
$$+(z'-z)(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0.$$



Sechzehnte Vorlesung.

Über die zwischen einer krummen Fläche und einer Kugel Statt findende Berührung.

In jedem Puncte einer krummen Fläche, deren Differenzialgleichung

(1) $$dz = p dx + q dy$$

sey, wobei p, q bekannte Functionen von x und y bedeuten, lassen sich unzählige Kugelflächen finden, welche in diesem Puncte mit der Fläche in einer Berührung der ersten Ordnung stehen. Denn soll eine Kugelfläche, deren Mittelpunct den Coordinaten ξ, v, z entspricht, und deren Halbmesser ρ ist, im Puncte x, y, z mit der Fläche (1) eine gemeinschaftliche Berührungsebene besitzen, so wird nichts weiter erfordert, als daß die Gleichung

(2) $$(x-\xi)^2 + (y-v)^2 + (z-z)^2 = \rho^2$$

auch in Bezug auf die erwähnte Fläche Gültigkeit hat, und für den gegebenen Punct die aus der letzteren Gleichung abgeleiteten partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ mit p, q übereinstimmen, d. h. die Gleichungen

(3) $$\begin{aligned} x - \xi + (z-z) p = 0 \\ y - v + (z-z) q = 0 \end{aligned}$$

Statt finden. Dieselben geben

$$x - \xi = -(z-z) p, \quad y - v = -(z-z) q;$$

folglich hat man, wenn man diese Resultate in die Gleichung (2) einführt:

(4) $$z - z = \frac{\rho}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

und daher

(5) $$\begin{aligned} y - v = -\frac{q\rho}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \\ x - \xi = -\frac{p\rho}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Mittelst der Formeln (4), (5) lassen sich die Coordinaten des Mittelpunctes der verlangten Kugel bestimmen, wenn der Halbmesser

derselben bekannt ist; und da hier die Größe ρ an die Erfüllung einer weiteren Bedingung nicht gebunden wird, also nach Belieben angenommen werden darf, so ist obige Behauptung hinreichend begründet.

Da die in den Formeln (4), (5) erscheinende Wurzelgröße beide Zeichen gestattet, so gibt es für jeden Werth von ρ zwei die Fläche (1) im Puncte x, y, z berührende Kugeln, wovon, wie man leicht sieht, die eine diesseits, und die andere jenseits des berührten Stückes der Fläche liegt.

Die Vergleichung der Gleichungen (3) mit den in der dreizehnten Vorlesung gefundenen (12) lehrt, daß die Mittelpuncte aller, eine Fläche in einem gegebenen Puncte berührender, Kugeln sich in der zu dem letzteren Puncte der Fläche gehörenden Normallinie befinden.

Will man wissen, wie groß der Halbmesser einer aus einem gegebenen Puncte beschriebenen Kugelfläche angenommen werden müsse, damit dieselbe eine gegebene Fläche berühre, und an welchem Orte sodann die Berührung Statt findet, so verbinde man die Gleichung der gegebenen Fläche mit den Gleichungen (2) und (3), nachdem man in den letzteren statt p und q die aus der erstgenannten Gleichung folgenden Werthe gesetzt hat. Nur für einen Berührungspunct der beiden Flächen können x, y, z in sämmtlichen Gleichungen einerlei Werthe haben; es lassen sich also diese Größen nebst dem Halbmesser ρ mittelst der erwähnten Gleichungen bestimmen.

Es sey z. B. die gegebene Fläche eine der mit einem Mittelpunct versehenen Flächen der zweiten Ordnung, und das Centrum der Kugel, durch welche dieselbe berührt werden soll, falle mit ersterem Puncte zusammen. Nehmen wir den Anfangspunct der Coordinaten in dem gemeinschaftlichen Mittelpuncte beider Flächen an, so kann die Gleichung der gegebenen Fläche stets auf die Form

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + L = 0$$

gebracht werden, wobei M, N, P, L positive oder negative beständige Größen anzeigen, und gibt uns $p = -\frac{Px}{Mz}$, $q = -\frac{Ny}{Mz}$; ferner ist hier $\xi = 0$, $\upsilon = 0$, $\zeta = 0$, daher haben wir es nebst der vorhergehenden noch mit den Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad x + zp = 0, \quad y + zq = 0$$

zu thun, wovon die zwei letzteren durch die angeführten Werthe von p, q in

$$xz(M-P)=o, \quad yz(M-N)=o$$

übergehen. Diesen Gleichungen leistet, falls keine zwei der Größen M, N, P einander gleich sind, bloß eine der beiden Annahmen $z=o$, oder $x=o$ und zugleich $y=o$, Genüge. Die Gleichung $z=o$ versetzt die Berührungspuncte der gegebenen Fläche der Kugel in die Ebene xy, und da daselbst eine Berührung der Flächen nicht Statt finden kann, wenn sich nicht die Schnitte dieser Flächen mit der Ebene xy, nämlich die Curve $Ny^2+Px^2+L=o$ und der Kreis $y^2+x^2=\rho^2$ berühren, also $\frac{dy}{dx}=-\frac{Px}{Ny}=-\frac{x}{y}$ oder $Pxy=Nxy$, d. h. entweder $x=o$ oder $y=o$ ist: so kann der Aufgabe durch einen in der Ebene xy befindlichen Berührungspunct nur in so ferne entsprochen werden, als derselbe entweder in der Axe der x oder in jener der y liegt. Die Annahme $x=o$, $y=o$ zeigt an, daß der Berührungspunct der Kugel mit der Fläche in der Axe der z sich befindet.

Es kann also, wenn M, N, P sämmtlich von einander verschieden sind, eine aus dem Mittelpuncte einer Fläche der zweiten Ordnung beschriebene Kugel diese Fläche nur in den Puncten berühren, in welchen eine der obigen Axen der x, y, z, nämlich eine der sogenannten Hauptaxen, mit der Fläche zusammentrifft. Man pflegt diese Puncte die Scheitel der Fläche zu nennen. Der Kugel selbst gehören in diesen drei Fällen die den Hälften der betreffenden Hauptaxen gleichen Halbmesser $\sqrt{-\frac{L}{P}}$, $\sqrt{-\frac{L}{N}}$, $\sqrt{-\frac{L}{M}}$. Man sieht, daß für ein Ellipsoid alle drei, für ein Hyperboloid mit ununterbrochener Höhlung nur zwei, und für ein Hyperboloid mit getrennten Höhlungen nur einer derselben reell erscheint.

Sind aber zwei der Größen M, N, P einander gleich, d. h. ist die Fläche der zweiten Ordnung durch Umdrehung einer mit einem Centrum versehenen Curve der zweiten Ordnung um eine ihrer Hauptaxen entstanden, so kann diese Fläche, den Fall eines Hyperboloids mit getrennten Höhlungen ausgenommen, jederzeit durch eine Kugel in allen Puncten der Peripherie eines größten Kreises berührt werden; ein Satz, welcher sich nach den bereits gegebenen Andeutungen aus den obigen Gleichungen mit leichter Mühe ableiten läßt.

Von dem Umstande, daß eine mit einem Mittelpuncte versehene Fläche der zweiten Ordnung von einer aus diesem Puncte beschriebenen Kugel nur in ihren Scheiteln berührt werden kann, läßt sich nützlicher

Gebrauch machen, um zu bestimmen, ob die Gleichung

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dyz + Exz + Fxy + Gz + Hy + Ix + K = 0,$$

wenn in derselben $AF^2 + BE^2 + CD^2 - 4ABC - DEF$ von der Nulle verschieden ist, einem Ellipsoide, oder einem Hyperboloide mit ununterbrochener Höhlung, oder einem Hyperboloide mit getrennten Höhlungen gehöre.

Die Gleichung

$$(6) \quad Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dyz + Exz + Fxy + L = 0,$$

in welcher L die in der neunten Vorlesung (6) angegebene Bedeutung besitzt, gehört nämlich derselben Fläche, nur mit dem Unterschiede, daß die Axen der Coordinaten, ihren früheren Richtungen parallel, in den Mittelpunct der Fläche übertragen worden sind. Die letztere Gleichung gibt uns

$$(2Az + Dy + Ex)\,p + 2Cx + Ez + Fy = 0,$$
$$(2Az + Dy + Ex)\,q + 2By + Dz + Fx = 0;$$

substituiren wir die hiedurch für p und q festgesetzten Werthe in die Gleichungen (3), in so fern wir daselbst ξ, v, z verschwinden lassen, so haben wir

$$(7) \quad (2Az + Dy + Ex)\,x - (2Cx + Ez + Fy)\,z = 0,$$
$$(2Az + Dy + Ex)\,y - (2By + Dz + Fx)\,z = 0.$$

Diese Gleichungen, mit (6) verbunden, geben die Coordinaten der Scheitel der vorgelegten Fläche, mit deren Hülfe sodann die Gleichung

$$(8) \quad z^2 + y^2 + x^2 = \rho^2$$

durch die Werthe, welche ρ dabei erhält, die Größen der dazu gehörenden Halbaxen darbietet. Es ist nicht schwer, hieraus sogleich eine Gleichung für ρ allein abzuleiten. Zu diesem Ende multiplicire man die erste der Gleichungen (7) mit x, die zweite mit y, und füge zur Summe beider die identische Gleichung

$$(2Az + Dy + Ex)\,z^2 - (2Az^2 + Dyz + Exz)\,z = 0$$

hinzu, so erhält man mit Rücksicht auf (6) und (8)

$$(9) \quad (2Az + Dy + Ex)\,\rho^2 + 2Lz = 0,$$

und hieraus mittelst (7)

$$(10) \quad (2Cx + Ez + Fy)\,\rho^2 + 2Lx = 0,$$
$$(2By + Dz + Fx)\,\rho^2 + 2Ly = 0.$$

Sucht man aus jeder dieser Gleichungen den Werth von x, und

substituirt man denselben in (9), so ergibt sich

$$(11)\quad [(2CD - EF)\rho^4 + 2DL\rho^2]y + [(4AC - E^2)\rho^4 + 4(A+C)L\rho^2 + 4L^2]z = 0$$

und $[(DF - 2BE)\rho^2 - 2EL]y + [(2AF - DE)\rho^2 + 2FL]z = 0$;

eliminirt man endlich aus diesen Gleichungen den Quotienten $\frac{y}{z}$, so erhält man die verlangte Gleichung für ρ, nämlich:

$$(12)\quad [AF^2 + BE^2 + CD^2 - 4ABC - DEF]\rho^6 - [4(AB + AC + BC) - D^2 - E^2 - F^2]L\rho^4 - 4(A+B+C)L^2\rho^2 - 4L^3 = 0.$$

Diese Gleichung vom sechsten Grade lauft, wenn man ρ^2 als ihre unbekannte Größe ansieht, auf eine cubische Gleichung hinaus. Die Form derselben hätte sich ohne wirkliche Ausführung der Rechnung aus dem Umstande voraussagen lassen, daß je zwei ihrer Wurzeln einander gleich und entgegengesetzt seyn müssen. Da die Hälften der Hauptaxen einer mit einem Mittelpuncte begabten Fläche der zweiten Ordnung, wenn sie imaginär werden, stets unter den Gestalten $+\lambda\sqrt{-1}$ und $-\lambda\sqrt{-1}$ erscheinen, wobei λ eine reelle Größe ist, was man, weil diese Größen von der Beschaffenheit des gewählten Coordinatensystems nicht abhängen, aus der Gleichung

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + L = 0$$

ersieht, so sind die drei Wurzeln, welche die Gleichung (12), als cubische Gleichung betrachtet, darbietet, nothwendig immer reell. Man kann daher aus der Anzahl der darin vorhandenen Abwechslungen und Folgen der Zeichen leicht entnehmen, ob alle drei dieser Wurzeln, oder nur zwei, oder nur eine, oder keine negativ ist. Im ersten Falle bedeutet die vorgelegte Gleichung im geometrischen Sinne Nichts; im zweiten gehört sie einem Hyperboloide mit getrennten Höhlungen, im dritten Falle einem Hyperboloide mit ununterbrochener Höhlung, endlich im vierten einem Ellipsoide.

Fällt $L = 0$ aus, so gibt die Gleichung (12) bloß $\rho = 0$, entscheidet aber nicht, welcher der beiden hier möglichen Fälle Statt findet, ob nämlich die vorgelegte Gleichung der zweiten Ordnung sich auf einen einzigen Punct, oder ob sie sich auf einen Kegel bezieht. Beide Fälle sind aber ohnehin sehr leicht von einander zu sondern, wenn man untersucht, ob eine, nicht durch den Anfangspunct des der Gleichung

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dyz + Exz + Fxy + L = 0$$

zum Grunde liegenden Coordinatensystems geführte Ebene, imaginäre oder reelle Schnitte darbietet.

Es ist nicht überflüssig zu bemerken, daß man durch Wegschaffung eines der Quotienten $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ mittelst der Gleichungen (8) für den zurückbleibenden eine Gleichung des dritten Grades erhält, deren Wurzeln sämmtlich reell sind, und die Tangenten der Winkel angeben, welche die Projectionen der drei Hauptaxen der oben erwähnten Fläche der zweiten Ordnung auf die dem genannten Quotienten correspondirende Ebene xz oder yz mit der Axe der z bilden; so daß man auch auf diesem Wege die Richtungen der Hauptaxen dieser Fläche ausmitteln könnte, wenn man sich des in der neunten Vorlesung eingeschlagenen nicht bedienen wollte.

Da bei einer Kugel, welche eine gegebene Fläche in einem gegebenen Puncte auf die oben betrachtete Weise berührt, nur eine der in der Gleichung der Kugel enthaltenen vier Constanten willkürlich angenommen werden darf; das Stattfinden einer Berührung der zweiten Ordnung zwischen zwei Flächen aber an die Erfüllung noch dreier Bedingungen, nämlich an die Übereinstimmung der aus der Gleichung der einen Fläche abgeleiteten und auf den Berührungspunct bezogenen Differenzialquotienten $\frac{d^2 z}{d x^2}$, $\frac{d^2 z}{d x\, d y}$, $\frac{d^2 z}{d y^2}$ mit den gleichnamigen aus der Gleichung der anderen Fläche entspringenden Größen gebunden ist: so läßt sich eine Kugel mit einer anderen Fläche im Allgemeinen nicht in eine Berührung einer höheren Ordnung als der ersten, bringen, wenn gleich es an gewissen Flächen einzelne Puncte gibt, in welchen eine innigere Berührung als gewöhnlich zu Stande kommen kann.

Es gibt also zu einem bestimmten Puncte einer krummen Fläche keine Berührungskugel, welche die Krümmungskreise aller durch den genannten Punct auf der Fläche gezogenen Curven in sich enthielte; jedoch liegen die Krümmungskreise derjenigen dieser Curven, welche am angeführten Orte mit einer gemeinschaftlichen Tangente versehen sind, auf einer und derselben Kugel, wie folgende Betrachtungen zeigen werden.

Man denke sich durch den Punct x, y, z einer krummen Fläche auf derselben eine Curve, und zu dieser den dem erwähnten Puncte entsprechenden Krümmungskreis verzeichnet, so überzeugt man sich leicht, daß ein in dem Mittelpuncte dieses Kreises auf seiner Ebene errichtetes

Perpendikel mit der dem Puncte x, y, z der Fläche gehörenden Normale stets in einerlei Ebene sich befindet, und daher diese Normale immer durchschneidet. Es steht nämlich die durch jenes Perpendikel und durch den Punct x, y, z gelegte Ebene auf der zu diesem Puncte geführten Tangente der Curve, welche zugleich die Fläche berührt, senkrecht, und ist deßwegen eine zu dem Puncte x, y, z gehörende Normalebene der Fläche. Eine aus dem Durchschnittspuncte des erwähnten Perpendikels mit der Normale beschriebene Berührungskugel geht also durch die Peripherie des Krümmungskreises der Curve. Bestimmen wir nun den Halbmesser R dieser Kugel.

Ist λ der Winkel, welchen der zu dem Puncte x, y, z gehörende Krümmungshalbmesser ρ mit der zu demselben Puncte gezogenen Normale der Fläche darstellt, so ist offenbar

$$R = \frac{\rho}{\cos.\lambda}.$$

Wendet man die in der vierten Vorlesung gegebenen Formeln (4) auf die in der dreizehnten Vorlesung erhaltenen Gleichungen (12) an, so findet man für die Cosinusse der Winkel, welche die Normale der Fläche mit den Axen der x, y, z bildet, die Ausdrücke:

$$\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

wobei $dz = p\,dx + q\,dy$

als Differenzialgleichung der Fläche selbst gedacht wird.

Sind ferner ξ, υ, ζ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunctes der auf der Fläche verzeichneten Curve, so stellen (Seite 26) die Unterschiede $x-\xi$, $y-\upsilon$, $z-\zeta$
die Projectionen des zu dem Puncte x, y, z gezogenen Halbmessers ρ auf die Richtungen der x, y, z vor, und daher zeigen die Quotienten

$$\frac{x-\xi}{\rho},\quad \frac{y-\upsilon}{\rho},\quad \frac{z-\zeta}{\rho}$$

die Cosinusse der Winkel an, unter welchen dieser Halbmesser gegen die Richtungen der x, y, z geneigt ist. Wir haben daher (zweite Vorlesung (44))

$$\cos.\lambda = \frac{z-\zeta-q(y-\upsilon)-p(x-\xi)}{\rho\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

folglich $$R = \frac{\rho^2\sqrt{p^2+q^2+1}}{z-\zeta-q(y-\upsilon)-p(x-\xi)}.$$

Die Formeln (18), (19) der vorhergehenden Vorlesung geben uns, wenn wir die dortigen Bedeutungen von X, Y, Z beibehalten:

$$\frac{z-\zeta}{\rho^2} = \frac{Y\,dx - X\,dy}{(dx^2+dy^2+dz^2)^2},$$
$$\frac{y-\upsilon}{\rho^2} = \frac{X\,dz - Z\,dx}{(dx^2+dy^2+dz^2)^2},$$
$$\frac{x-\xi}{\rho^2} = \frac{Z\,dy - Y\,dz}{(dx^2+dy^2+dz^2)^2};$$

es ist also

$$R = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^2\sqrt{p^2+q^2+1}}{Y\,dx - X\,dy - q\,(X\,dz - Z\,dx) - p\,(Z\,dy - Y\,dz)}.$$

Nehmen wir, der Bequemlichkeit der Rechnung wegen, $d^2x = o$ an, so haben wir $X = dy\,d^2z - dz\,d^2y$, $Y = -dx\,d^2z$, $Z = dx\,d^2y$. Dieß vorausgesetzt, sey $dy = \omega dx$ die Differenzialgleichung der Projection der auf unserer Fläche verzeichneten Curve in Bezug auf die Ebene xy, so gehören dieser Curve die Gleichungen

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dy = \omega\,dx,$$

und es ist $d^2y = d\omega\,dx$; ferner, wenn wir, der gewöhnlichen Bezeichnung gemäß

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

setzen:

$$dz = (p + q\,\omega)\,dx,$$
$$d^2z = (r + 2s\omega + t\omega^2)\,dx^2 + q\,d\omega\,dx,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(1 + p^2 + 2pq\omega + (1+q^2)\,\omega^2\right)dx^2;$$

also
$$X = (r + 2s\omega + t\omega^2)\,\omega\,dx^3 - p\,d\omega\,dx^2,$$
$$Y = -(r + 2s\omega + t\omega^2)\,dx^3 - q\,d\omega\,dx^2,$$
$$Z = d\omega\,dx^2$$

und

$$Y\,dx - X\,dy - q\,(X\,dz - Z\,dx) - p\,(Z\,dy - Y\,dz) =$$
$$= -(r + 2s\omega + t\omega^2)\left(1 + p^2 + 2q\omega + (1+q^2)\,\omega^2\right)dx^4,$$

folglich

$$(13)\quad R = -\frac{[1 + p^2 + 2pq\omega + (1+q^2)\,\omega^2]\sqrt{p^2+q^2+1}}{r + 2s\omega + t\omega^2}.$$

Für alle auf der Fläche verzeichneten und im Puncte x, y, z einander berührenden Curven hat ω denselben Werth, daher fällt auch für alle diese Curven R gleich groß aus, wodurch obige Behauptung gerechtfertiget ist.

Die Coordinaten des Mittelpunctes der hier betrachteten Kugel ergeben sich aus den Formeln (4) und (5).

Siebzehnte Vorlesung.

Über die verschiedenen Krümmungen der Flächen.

Schneiden wir eine krumme Fläche mittelst einer durch den Punct x, y, z derselben gelegten Normalebene, so entsteht eine Linie, deren Krümmung in dem genannten Puncte uns von der Krümmung, welche die Fläche daselbst in der Richtung des Schnittes besitzt *), eine Vorstellung verschafft. Der Mittelpunct des Krümmungskreises für den Punct x, y, z dieser Linie befindet sich in der Normale der Fläche, und ist mit dem Mittelpuncte der am Ende der vorhergehenden Vorlesung betrachteten Berührungskugel einerlei. Es besteht demnach für den Halbmesser R dieses Krümmungskreises die Formel

$$R = -\frac{(1 + p^2 + 2pq\omega + (1+q^2)\omega^2)\sqrt{p^2+q^2+1}}{r + 2s\omega + t\omega^2},$$

worin ω den Winkel angibt, welchen die Projection der zu dem Puncte x, y, z gezogenen Tangente des Schnittes auf die Ebene xy mit der Axe der x bildet.

Bestimmen wir nun die Werthe von ω, für welche R am größten und am kleinsten ausfällt.

Es ist

$$\frac{dR}{d\omega} = -\frac{\left\{\begin{array}{l}(r + 2s\omega + t\omega^2)(2pq + 2(1+q^2)\omega) \\ \quad -(1+p^2+2pq\omega + (1+q^2)\omega^2)(2s + 2t\omega)\end{array}\right\}\sqrt{p^2+q^2+1}}{(r + 2s\omega + t\omega^2)^2}.$$

Setzen wir $\frac{dR}{d\omega} = 0$, so haben wir die Gleichung

$$(r + 2s\omega + t\omega^2)(pq + (1+q^2)\omega)$$
$$\qquad - (1 + p^2 + 2pq\omega + (1+q^2)\omega^2)(s + t\omega) = 0$$

oder

$$[(1+q^2)s - pqt]\,\omega^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\,\omega$$
$$\qquad - (1+p^2)s + pqr = 0.$$

*) Aus dem Umstande, daß die durch eine und dieselbe Normale einer Fläche gelegten Ebenen im Allgemeinen offenbar verschieden gekrümmte Schnitte erzeugen; auf einer Kugel hingegen diese Schnitte sämmtlich gleich gekrümmt sind, erhellet sogleich die Unmöglichkeit, durch jeden Punct jeder Fläche eine mit ihr in einer Berührung der zweiten Ordnung befindliche Kugel zu verzeichnen.

Der Kürze wegen sey

$$(1+q^2)s - pqt = M, \quad (1+q^2)r - (1+p^2)t = N,$$
$$(1+p^2)s - pqr = P,$$

so gibt uns diese Gleichung für ω die zwei Werthe

$$\omega_1 = \frac{-N + \sqrt{N^2 + 4MP}}{2M}, \quad \omega_2 = \frac{-N - \sqrt{N^2 + 4MP}}{2M}.$$

Um über den Einfluß derselben auf die Beschaffenheit von R zu entscheiden, substituiren wir sie in dem Differenzialquotienten $\frac{d^2R}{d\omega^2}$. Da der obigen Rechnung gemäß

$$\frac{dR}{d\omega} = \frac{-2(M\omega^2 + N\omega - P)\sqrt{p^2+q^2+1}}{(r+2s\omega+t\omega^2)^2}$$

ist, so erhalten wir durch abermaliges Differenziren dieses Ausdruckes

$$\frac{d^2R}{d\omega^2} = \frac{-2(2M\omega + N)\sqrt{p^2+q^2+1}}{(r+2s\omega+t\omega^2)^2}$$
$$+ \frac{8(M\omega^2+N\omega-P)(s+t\omega)\sqrt{p^2+q^2+1}}{(r+2s\omega+t\omega^2)^3}.$$

Nehmen wir hier ω entweder $=\omega_1$ oder $=\omega_2$ an, so verschwindet das Trinom $M\omega^2 + N\omega - P$, und mit ihm der zweite Theil des so eben gefundenen Differenzialquotienten; ferner ist

$2M\omega_1 + N = +\sqrt{N^2+4MP}$ und $2M\omega_2 + N = -\sqrt{N^2+4MP}$; fällt also $\sqrt{N^2+4MP}$ von der Nulle verschieden aus, so erscheint $\frac{d^2R}{d\omega^2}$ für die angeführten Werthe von ω mit entgegengesetzten Zeichen, und deßhalb bietet der eine derselben ein Maximum, und der andere ein Minimum von R dar.

Verschwindet aber $\sqrt{N^2+4MP}$, wodurch in unserem Falle auch $\frac{d^2R}{d\omega^2}$ in die Nulle übergeht, so müssen wir die Einwirkung der genannten Werthe von ω auf den nächsten Differenzialquotienten $\frac{d^3R}{d\omega^3}$ in Erwägung ziehen. Wie die Betrachtung von $\frac{d^2R}{d\omega^2}$ lehrt, kommen in $\frac{d^3R}{d\omega^3}$, das Glied

$$-\frac{4M\sqrt{p^2+q^2+1}}{(r+2s\omega+t\omega^2)^2}$$

ausgenommen, bloß Glieder vor, welche eine der Größen $2M\omega + N$, $M\omega^2 + N\omega - P$ als Factor enthalten, und somit durch den statt ω

zu setzenden speciellen Werth $-\frac{N}{2M}$ vernichtet werden. Da nun, wie man leicht sieht, unter den so eben gemachten Voraussetzungen M nicht gleich Null seyn kann, so erhält hier $\frac{d^3 R}{d\omega^3}$ gewiß einen von der Nulle verschiedenen Werth, und daher findet weder ein Maximum noch ein Minimum Statt.

Betrachtet man also die Curven, welche auf irgend einer Fläche durch Schnitte entstehen, in deren Ebenen eine und dieselbe Normale enthalten ist, nach der Reihe, so findet man entweder ihre Krümmungen an der ihnen gemeinschaftlichen Stelle fortwährend wachsend, bis man zu einer am meisten gekrümmten Curve kömmt, und von dieser wieder angefangen bis zu einer zweiten am wenigsten gekrümmten fortwährend abnehmend, ohne daß dabei mehrere Übergänge von dem Wachsen in das Abnehmen, und umgekehrt Statt finden können. Der Winkel, unter welchem die Richtungen der größten und kleinsten Krümmung gegen einander geneigt sind, läßt sich aus den obigen Werthen von ω_1 und ω_2 berechnen, da diese Größen die trigonometrischen Tangenten der Winkel angeben, welche die Projectionen dieser Richtungen auf die Ebene xy mit der Axe der x darstellen. Allein man kömmt am leichtesten zum Ziele, wenn man die Ebene xy der Berührungsebene des Punctes x, y, z, in welchem sich alle einzelnen Curven auf der Fläche durchkreuzen, parallel legt, weil in diesem Falle der Winkel der Richtungen der hier betrachteten äußersten Krümmungen mit dem Winkel der Projectionen dieser Richtungen auf die Ebene xy übereinstimmt. Da unter dieser Voraussetzung die allgemeine Gleichung der zu dem Puncte x, y, z der Fläche $dz = p\,dx + q\,dy$ geführten Berührungsebene, nämlich

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

offenbar in $z' = z$ oder $z' - z = 0$ übergeht, so hat man hier

$$p = 0, \quad q = 0,$$

$$\text{also} \quad M = s, \quad N = r - t, \quad P = s,$$

und die Gleichung, deren Wurzeln ω_1 und ω_2 sind, verwandelt sich in

$$\omega^2 + \frac{r-t}{s}\,\omega - 1 = 0,$$

$$\text{woraus} \quad \omega_1 \omega_2 = -1$$

$$\text{oder} \quad \omega_1 \omega_2 + 1 = 0$$

folgt. Dieß ist aber, wie wir am Ende der vierten Vorlesung gesehen

haben, die Bedingung, unter welcher zwei auf der Ebene xy gezogene, mit der Axe der x die Winkel *arc. tg.* ω_1 und *arc. tg.* ω_2 bildende, gerade Linien auf einander senkrecht stehen; es wird daher auf jeder Fläche die Richtung der kleinsten Krümmung von jener der größten stets unter einem rechten Winkel durchschnitten.

Will man die diesen Krümmungen entsprechenden Halbmesser, das heißt, den größten und kleinsten Werth der Größe, welche wir durch R bezeichnet haben, auf eine bequeme Weise kennen lernen, so gebe man der obigen Rechnung eine andere Form.

Aus der allgemeinen Formel für R folgt

$$R(r+2s\omega+t\omega^2)+(1+p^2+2pq\omega+(1+q^2)\omega^2)\sqrt{p^2+q^2+1}=0.$$

Differenzirt man diese Gleichung in Bezug auf R und ω, indem man $\frac{dR}{d\omega}=0$ setzt, so erhält man

$$R(s+t\omega)+(pq+(1+q^2)\omega)\sqrt{p^2+q^2+1}=0;$$

welche Gleichung, mit ω multiplicirt, und von der vorhergehenden abgezogen, auf

$$R(r+s\omega)+(1+p^2+pq\omega)\sqrt{p^2+q^2+1}=0$$

führt. Eliminirt man nun aus den zwei letzteren Gleichungen die Größe ω, so findet man

$$(14)\quad (rt-s^2)R^2+[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]R\sqrt{p^2+q^2+1} + (p^2+q^2+1)^2=0;$$

eine Gleichung, deren Wurzeln, welche wir im Folgenden durch R_1 und R_2 bezeichnen wollen, der größte und der kleinste Werth von R sind.

Nimmt man, wie oben, die Ebene xy der zu dem Puncte x, y unserer Fläche geführten tangirenden Ebene parallel an, so muß, wie bekannt, in der so eben dargestellten Gleichung $p=0$ und $q=0$ gesetzt werden. Man hat also

$$(rt-s^2)R^2+(r+t)R+1=0,$$

und daher

$$R_1+R_2=-\frac{r+t}{rt-s^2}.$$

Es sey überdieß die Axe der x einer der Richtungen der beiden Hauptkrümmungen der Fläche parallel, z. B. jener, auf welche sich ω_1 und R_1 beziehen, so verschwinden die Größen ω_1 und $\frac{1}{\omega_2}$, und es folgt aus der allgemeinen Formel für R, welche hier, wegen $p=0$, $q=0$

die Gestalt

$$R = -\frac{1 + \omega^2}{r + 2s\omega + t\omega^2} = -\frac{\frac{1}{\omega^2} + 1}{\frac{r}{\omega^2} + \frac{2s}{\omega} + t}$$

hat,

$$R_1 = -\frac{1}{r}, \quad R_2 = -\frac{1}{t},$$

$$\text{daher} \quad R_1 + R_2 = -\frac{r + t}{rt}.$$

Dieser Ausdruck, mit dem obigen verglichen, zeigt, daß bei der angenommenen Lage des Coordinatensystems auch $s = 0$ wird. Es besteht somit in Hinsicht auf dieses Coordinatensystem für den Krümmungshalbmesser R die Formel

$$R = -\frac{1 + \omega^2}{r + t\omega^2}$$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{R} = -\frac{r}{1 + \omega^2} - \frac{t\omega^2}{1 + \omega^2}.$$

Es sey γ der Winkel, dessen Tangente ω heißt, so ist

$$\frac{1}{1 + \omega^2} = cos.\gamma^2, \quad \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} = sin.\gamma^2;$$

nun ist auch $-r = \frac{1}{R_1}$ und $-t = \frac{1}{R_2}$, folglich findet zwischen den Größen R, R_1, R_2, γ die einfache Gleichung

(15) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} cos.\gamma^2 + \frac{1}{R_2} sin.\gamma^2$$

Statt, welcher man auch die Form

(16) $$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 sin.\gamma^2 + R_2 cos.\gamma^2}$$

geben, und wovon man zur Berechnung des zu einem bestimmten Puncte einer Fläche gehörenden Krümmungshalbmessers R eines Normalschnittes einen nützlichen Gebrauch machen kann, vorausgesetzt, daß R_1 und R_2, nämlich die beiden äußersten Werthe der Krümmungshalbmesser aller durch denselben Punct geführten Normalschnitte, nebst dem Winkel γ der Ebenen, in welchen R und R_1 liegen, gegeben sind.

Wird die Fläche in dem genannten Puncte durch eine gegen die zugehörige Normale unter dem Winkel λ geneigte Ebene geschnitten, so besteht für den Krümmungshalbmesser ρ des Schnittes in diesem Puncte die Formel

(17) $$\rho = \frac{R_1 R_2 cos.\lambda}{R_1 sin.\gamma^2 + R_2 cos.\gamma^2}.$$

Man gelangt zur Kenntniß der Richtungen der zwei Hauptkrümmungen jeder Fläche auch durch folgende Betrachtungen.

Es seyen x', y', z' die Coordinaten irgend eines Punctes der zu dem Puncte x, y, z der Fläche $dz = p\,dx + q\,dy$ gezogenen Normale, so wird diese durch die Gleichungen

$$x' - x + p\,(z' - z) = 0$$
$$y' - y + q\,(z' - z) = 0$$

ausgedrückt. Man denke sich nun zu einem dem Puncte x, y, z unendlich nahe kommenden Puncte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ derselben Fläche ebenfalls eine Normale geführt, so können zwei Fälle eintreten: es liegen entweder beide Normalen zuletzt in einerlei Ebene und schneiden sich, oder es findet das Gegentheil Statt. Ist der erste Fall möglich, so müssen, wenn man unter x', y', z' die Coordinaten des Durchschnittspunctes beider einander unendlich naher Normalen versteht, obige Gleichungen mit ihren bloß in Bezug auf x, y, z genommenen Differenzialien zugleich bestehen können; nämlich es müssen nebst den obigen auch noch die Gleichungen

$$-\,dx - p\,dz + (z' - z)\,dp = 0$$
$$-\,dy - q\,dz + (z' - z)\,dq = 0$$

gelten. Mittelst dreier dieser vier Gleichungen lassen sich, wenn sie keinen Widerspruch enthalten, die Coordinaten x', y', z' des Durchschnittspunctes der erwähnten Normalen angeben; damit aber dieser Widerspruch wegfalle, müssen die gefundenen Werthe der Coordinaten des genannten Punctes der vierten Gleichung Genüge leisten, was nur durch eine schickliche Annahme des zwischen den an sich betrachtet willkürlichen Differenzialien dx, dy bestehenden Verhältnisses möglich gemacht werden kann. Der Quotient $\frac{dy}{dx}$ zeigt aber die Lage der Projection der Verbindungslinie der zwei auf der Fläche gewählten Puncte in der Ebene xy an, folglich lernt man durch die Ausmittelung des angedeuteten Verhältnisses die Richtung kennen, in welcher man von dem Puncte x, y, z der Fläche zu einem nächsten Puncte fortschreiten muß, damit die Normalen dieser Puncte sich bei der unendlichen Annäherung derselben durchschneiden. Man gelangt alsogleich zu der Bedingung, an welche der Quotient $\frac{dy}{dx}$, falls die gemachte Forderung realisirt werden soll, gebunden ist, wenn man aus den zwei letzten Gleichungen $z' - z$ wegschafft. Sie ist

$$(18) \qquad (dy + q\,dz)\,dp - (dx + p\,dz)\,dq = 0.$$

Setzen wir, wie oben, $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$, so haben wir nach verrichteter Substitution dieser Ausdrücke in die so eben erhaltene Gleichung, mit Rücksicht auf $dz = p\,dx + q\,dy$,

$$[pq\,dx + (1 + q^2)\,dy]\,[r\,dx + s\,dy] - [(1 + p^2)\,dx + pq\,dy]\,[s\,dx + t\,dy] = 0$$

oder

$$(19)\quad [(1+q^2)s - pqt]\,\frac{dx^2}{dy^2} + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\,\frac{dy}{dx} - (1+p^2)s + pqr = 0.$$

Dieß ist aber genau dieselbe Gleichung, welche sich oben für ω, unter der Bedingung, daß R ein Größtes oder ein Kleinstes werde, ergab: daher sind die Richtungen der kleinsten und größten Krümmung einer Fläche die einzigen Linien, in welchen zwei einander unendlich nahe Puncte dieser Fläche, deren Normalen sich durchschneiden sollen, angenommen werden dürfen.

Bewegt sich ein Punct auf einer Fläche, sammt der ihm zugehörigen Normale derselben, ohne plötzliche Änderung seiner Richtung, so fort, daß jede neue Position dieser Normale die nächst vorhergehende durchschneidet, so beschreibt er auf der Fläche eine Linie, welche man *eine Krümmungslinie* derselben zu nennen pflegt. Aus dem so eben Gesagten läßt sich leicht folgern, daß durch jeden Punct einer Fläche im Allgemeinen nur zwei Krümmungslinien gehen, deren Richtungen in der Nähe dieses Punctes einander stets unter einem rechten Winkel begegnen.

Drückt man in der Gleichung (19) die Größen p, q, r, s, t mittelst der Gleichung der gegebenen Fläche durch x und y aus, so hat man eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung zwischen x und y vor sich, welche sich leicht in zwei Gleichungen, worin bloß die ersten Potenzen der Differenzialien dieser Variablen erscheinen, zerfällen läßt, durch deren Integration man die Gleichungen der Projectionen der durch irgend einen Punct der Fläche gehenden Krümmungslinien auf die Ebene xy erhält. Sollen diese Gleichungen auf eine individuelle, den Punct der Fläche, für welchen $x = a$ und $y = b$ ist, in sich enthaltende, Krümmungslinie bezogen werden, so muß man die in den betreffenden Integralien befindlichen unbestimmten Constanten so wählen, daß dieselben für die genannten Werthe von x und y bestehen.

Achtzehnte Vorlesung.
Über die Rectification der krummen Linien.

Es sey (Fig. 9, a und b) die Gleichung irgend einer in der Ebene des rechten Winkels xOy verzeichneten Curve in Bezug auf die Axen Ox, Oy gegeben; man soll diese Curve rectificiren, d. h. die Länge eines beliebigen Stückes AB derselben durch die Abscissen $OH = h$ und $OK = k$ seiner Endpuncte ausdrücken.

Nehmen wir, um diese Aufgabe aufzulösen, auf dieser Curve nach Belieben einen Punct M an, dessen Coordinaten OP und MP wir durch x und y vorstellen, so wird, wenn die Abscisse OP um die Differenz $Pp = \Delta x$ wächst, die Ordinate MP in $mp = y + \Delta y$, und der Bogen $AM = s$ in $Am = s + \Delta s$ übergehen, wobei Δy, Δs positive oder negative Differenzen sind, je nachdem die zugehörigen Größen y und s bei der mit x vorgenommenen Änderung wachsen oder abnehmen. Offenbar läßt sich Δx so klein, folglich der Punct m so nahe an M denken, daß y, während M nach m fortschreitet, ununterbrochen wächst oder abnimmt, und der Bogen Mm gegen die Abscissenaxe stets concav (Fig. a) oder stets convex (Fig. b) bleibt. Dieß vorausgesetzt, ziehen wir zu M und m Tangenten, wovon die erstere TM die andere in t und die Richtung der Ordinate pm in n durchschneidet, so ist der Winkel nmt nothwendig ein stumpfer, folglich $tm < tn$, und daher auch $Mt + tm < Mn$. Aber die Länge des Bogens Mm oder Δs ist augenscheinlich größer als jene der Sehne Mm, und kleiner als $Mt + tm$; es fällt also auch Δs zwischen die Geraden Mm und Mn.

Nun haben wir, weil x, y die Coordinaten des Punctes M, und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die Coordinaten des Punctes m sind, die Sehne $Mm = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$; ferner weil n in der durch M gehenden Tangente der Curve liegt, der Gleichung dieser Tangente gemäß, wenn wir np durch Y vorstellen,

$$Y - y = \frac{dy}{dx}\Delta x, \text{ also } Mn = \sqrt{\Delta x^2 + (Y - y)^2} = \Delta x\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}:$$

daher ist

$$\Delta s > \Delta x\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \text{ und } \Delta s < \Delta x\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Bei dem unendlichen Abnehmen von Δx nähert sich der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ohne Ende dem Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$; folglich besteht, wenn wir auf die Differenzialien übergehen, die Gleichung

(1) $$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Man wird hier der Wurzelgröße das Zeichen + oder — beilegen, je nachdem s mit x zugleich wächst, oder nicht, d. h. je nachdem ds in Hinsicht auf dx positiv oder negativ ist.

Es sey nun $y = f(x)$ die Gleichung der zu rectificirenden Curve und $\frac{dy}{dx} = f_1(x)$, also $ds = dx\sqrt{1 + [f_1(x)]^2}$, so ist

(2) $$s = \int dx\sqrt{1 + [f_1(x)]^2};$$

oder, wenn durch wirkliche Integration der rechter Hand des Gleichheitszeichens befindlichen Differenzialformel

$$\int dx\sqrt{1 + [f_1(x)]^2} = F(x)$$

gefunden wird:

(3) $$s = F(x) + Const.$$

Die Constante wird bestimmt, wenn wir bedenken, daß für $x = h$ der Punct M in A fällt, und daher s verschwindet, wodurch uns die Gleichung (3)

$$o = F(h) + Const. \text{ oder } Const. = -F(h),$$

folglich

(4) $$s = F(x) - F(h)$$

gibt. Setzen wir nun hier $x = k$, so haben wir für die zu suchende Länge des Bogens A B den Ausdruck

$$F(k) - F(h).$$

Läßt sich die Gleichung der gegebenen Curve nicht auf die Form $y = f(x)$, wohl aber auf die Form $x = \varphi(y)$ bringen, oder ist die Integration des Differenzials $\int dx\sqrt{1 + [f_1(x)]^2}$ mit Schwierigkeiten verknüpft, so verrichte man obige Rechnung nach der Formel

(5) $$ds = dy\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}},$$

indem man $\frac{dx}{dy}$ als eine Function von y darstellt.

Es sey z. B. die Parabel zu rectificiren. Ihre auf die Hauptaxe

und den Scheitel als Abscissenaxe und Anfangspunct der Coordinaten bezogene Gleichung

$$y^2 = \alpha x \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{\alpha x}$$

gibt uns $dy = \sqrt{\alpha} \,.\, d\sqrt{x} = \frac{\sqrt{\alpha} \,.\, dx}{2\sqrt{x}}$,

$$\text{also } ds = dx\sqrt{1 + \frac{\alpha}{4x}} = \frac{(\alpha + 4x)\,dx}{2\sqrt{\alpha x + 4x^2}},$$

$$s = \int \frac{(\frac{1}{2}\alpha + 4x)\,dx}{2\sqrt{\alpha x + 4x^2}} + \int \frac{\alpha\,dx}{4\sqrt{\alpha x + 4x^2}}$$

und $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha x + 4x^2} + \frac{\alpha}{8}\, l(\alpha + 8x + 4\sqrt{\alpha x + 4x^2})$.

Soll der Bogen s am Scheitel seinen Anfang nehmen, so erhalten wir wegen $F(o) = \frac{\alpha}{8}\, l\alpha$

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha x + 4x^2} + \frac{\alpha}{8}\, l\, \frac{\alpha + 8x + 4\sqrt{\alpha x + 4x^2}}{\alpha}.$$

Für die Ellipse, deren Hauptaxen 2a und 2b als Axen der Coordinaten x und y dienen, besteht die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sie gibt $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, also $ds = \frac{dx\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}{a^2 y}$.

Drückt man nun hier y durch x aus, so hat man eine complicirte irrationale Differenzialformel vor sich, welche keineswegs auf eine rationale Gestalt gebracht, oder sonst auf eine der gewöhnlichen geschlossenen Formen reducirt werden kann. Man muß daher zu Näherungsmethoden seine Zuflucht nehmen. Vorerst aber ist es nöthig, der zu integrirenden Differenzialformel eine einfachere Form zu ertheilen. Die Substitution $x = a\, sin.\, \theta$ verhilft dazu. Durch dieselbe wird

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = b\, cos.\, \theta,$$

$$dx = a\, cos.\, \theta\, d\theta, \quad dy = -b\, sin.\, \theta\, d\theta;$$

folglich, wenn wir s mit θ zugleich wachsend denken:

$ds = d\theta\sqrt{a^2\, cos.\, \theta^2 + b^2\, sin.\, \theta^2}$ und

$$s = \int d\theta\sqrt{a^2\, cos.\, \theta^2 + b^2\, sin.\, \theta^2} = \int \frac{(a^2\, cos.\, \theta^2 + b^2\, sin.\, \theta^2)\, d\theta}{\sqrt{a^2\, cos.\, \theta^2 + b^2\, sin.\, \theta^2}};$$

welcher Ausdruck wegen

$$cos.\, \theta^2 = \frac{1 + cos.\, 2\theta}{2} \quad \text{und} \quad sin.\, \theta^2 = \frac{1 - cos.\, 2\theta}{2}.$$

sich auch unter der Form

$$s = \frac{a^2+b^2}{2}\int\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos.\theta^2+b^2\sin.\theta^2}} + \frac{a^2-b^2}{2}\int\frac{\cos.2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\cos.\theta^2+b^2\sin.\theta^2}}$$

darstellen läßt. Die beiden rechter Hand des Gleichheitszeichens befindlichen Integralien werden am zweckmäßigsten nach folgender von Gauß vorgetragenen Methode behandelt.

Die Substitution

$$\sin.\theta = \frac{2a\sin.\theta_1}{(a+b)\cos.\theta_1^2 + 2a\sin.\theta_1^2}$$

gibt

$$d\sin.\theta = \cos.\theta\, d\theta = \frac{2a[(a+b)\cos.\theta_1^2 + 2b\sin.\theta_1^2]\cos.\theta_1\, d\theta_1}{[(a+b)\cos.\theta_1^2 + 2a\sin.\theta_1^2]^2},$$

$$\cos.\theta = \sqrt{1-\sin.\theta^2} = \frac{\cos.\theta_1\sqrt{(a+b)^2\cos.\theta_1^2+4ab\sin.\theta_1^2}}{(a+b)\cos.\theta_1^2+2a\sin.\theta_1^2},$$

also $$d\theta = \frac{2a[(a+b)\cos.\theta_1^2+2b\sin.\theta_1^2]\,d\theta_1}{[(a+b)\cos.\theta_1^2+2a\sin.\theta_1^2]\sqrt{(a+b)^2\cos.\theta_1^2+4ab\sin.\theta_1^2}}$$

$$\sqrt{a^2\cos.\theta^2+b^2\sin.\theta^2} = \frac{a\sqrt{(a+b)^2\cos.\theta_1^4+4ab\sin.\theta_1^2\cos.\theta_1^2+4b^2\sin.\theta_1^4}}{(a+b)\cos.\theta_1^2+2a\sin.\theta_1^2}$$

$$= \frac{a\sqrt{(a+b)^2\cos.\theta_1^4+4ab\sin.\theta_1^2\cos.\theta_1^2+4b^2\sin.\theta_1^2(\cos.\theta_1^2+\sin.\theta_1^2)}}{(a+b)\cos.\theta_1^2+2a\sin.\theta_1^2}$$

$$= \frac{a[(a+b)\cos.\theta_1^2+2b\sin.\theta_1^2]}{(a+b)\cos.\theta_1^2+2a\sin.\theta_1^2},$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos.\theta^2+b^2\sin.\theta^2}} = \frac{d\theta_1}{\sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2\cos.\theta_1^2+ab\sin.\theta_1^2}};$$

folglich, wenn man der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = a_1,\quad \sqrt{ab} = b_1$$

seyn läßt:

$$\int\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos.\theta^2+b^2\sin.\theta^2}} = \int\frac{d\theta_1}{\sqrt{a_1^2\cos.\theta_1^2+b_1^2\sin.\theta_1^2}};$$

vorausgesetzt, daß die Grenzen, innerhalb welcher das zweite Integral zu nehmen ist, nach jenen des ersten, der zwischen θ und θ_1 bestehenden Verbindung gemäß, eingerichtet werden.

Auf dieselbe Art ergibt sich, wenn θ_2 zu θ_1, a_1, b_1, ferner θ_3 zu θ_2, a_2, b_2 u. s. w. in derselben Beziehung steht, wie θ_1 zu θ, a, b:

$$\int\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos.\theta^2+b^2\sin.\theta^2}} = \int\frac{d\theta_2}{\sqrt{a_2^2\cos.\theta_2^2+b_2^2\sin.\theta_2^2}},$$

$$\int\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos.\theta^2+b^2\sin.\theta^2}} = \int\frac{d\theta_3}{\sqrt{a_3^2\cos.\theta_3^2+b_3^2\sin.\theta_3^2}}$$

u. s. w.,

wobei $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$, $b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$

$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$, $b_3 = \sqrt{a_2 b_2}$

u. s. w.

gesetzt wird.

Ist a die größere, und b die kleinere Halbaxe der Ellipse, so sind die Differenzen

$$a - a_1 = a_1 - b = \tfrac{1}{2}(a - b)$$
$$a - b_1 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{a}\,; \quad b_1 - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{b}$$
$$a_1 - b_1 = \frac{a}{2} - \sqrt{ab} + \frac{b}{2} = \left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

sämmtlich positiv, folglich liegen die Zahlen a_1, b_1 zwischen a und b, und dabei ist $a_1 > b_1$; ferner ist, wie aus der Gleichung

$$a_1 - b_1 = \frac{a - b}{2} - (\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{b}$$

erhellet, $a_1 - b_1 < \frac{a - b}{2}$. Da nun ein Gleiches von a_2, b_2 in Bezug auf a_1, b_1, und von a_3, b_3 in Bezug auf a_2, b_2 u. s. w. gesagt werden kann, so bilden die Zahlen

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots\ldots$$

eine abnehmende, und

$$b,\ b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots\ldots$$

eine wachsende Reihe, wobei die Glieder der ersteren die an den correspondirenden Stellen der zweiten erscheinenden Glieder stets übertreffen, aber die Unterschiede dieser Glieder wegen

$$a_2 - b_2 < \frac{a - b}{2^2},\quad a_3 - b_3 < \frac{a - b}{2^3},\ \text{u. s. w.}$$

zuletzt unendlich klein werden. Es convergiren daher die Glieder beider Reihen sehr schnell gegen eine gemeinschaftliche Grenze A, folglich auch, wie man leicht sieht, die Glieder der Reihe

$$\theta,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \ldots\ldots$$

gegen eine bestimmte, bloß von a, b und θ abhängende Grenze Θ.

Das Integral $\int \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos.\theta^2 + b^2 \sin.\theta^2}}$ ändert, wie oben gezeigt wurde, seine Form nicht, sondern nur die Grenzwerthe seiner Variablen, wenn was immer für correspondirende Glieder der drei angeführten Reihen an die Stelle von a, b, θ treten, daher ist auch noth-

wendig

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 cos.\,\theta^2 + b^2 sin.\,\theta^2}} = \int \frac{d\Theta}{\sqrt{A^2 cos.\,\Theta^2 + A^2 sin.\,\Theta^2}} = \int \frac{d\Theta}{A}$$

$$= \frac{\Theta}{A} + Const.$$

Es läßt sich also dieses Integral durch eine höchst einfache Rechnung mit jeder beliebigen Schärfe bestimmen.

Da θ_1, folglich auch θ_2, θ_3 und Θ mit θ zugleich verschwinden, so haben wir, wenn das Integral für $\theta = 0$ anfangen soll:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 cos.\,\theta^2 + b^2 sin.\,\theta^2}} = \frac{\Theta}{A}.$$

Was das Integral $\int \frac{cos.\,2\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2 cos.\,\theta^2 + b^2 sin.\,\theta^2}}$ betrifft, so gibt uns der oben für $sin.\,\theta$ angenommene Ausdruck, wenn wir in demselben $1 - sin.\,\theta_1^2$ statt $cos.\,\theta_1^2$ setzen,

$$sin.\,\theta = \frac{2a\,sin.\,\theta_1}{a + b + (a - b)\,sin.\,\theta_1^2},$$

woraus die Gleichung

$$\frac{2\,a\,sin.\,\theta_1}{sin.\,\theta} = a + b + (a - b)\,sin.\,\theta_1^2$$

folgt. Ferner ist es nicht schwierig, aus den oben erhaltenen Resultaten die Gleichungen

$$\sqrt{a^2 cos.\,\theta^2 + b^2 sin.\,\theta^2} = a - (a - b)\,sin.\,\theta\,sin.\,\theta_1$$

$$\sqrt{a_1^2 cos.\,\theta_1^2 + b_1^2 sin.\,\theta_1^2} = a\,cot.\,\theta\,.\,tg.\,\theta_1$$

abzuleiten. Multiplicirt man die erste derselben mit $sin.\,\theta\,sin.\,\theta_1$, und die zweite mit $cos.\,\theta\,cos.\,\theta_1$, und subtrahirt man sodann jene von dieser, so findet man, mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\frac{a\,sin.\,\theta_1}{sin.\,\theta}$, nach einer leichten Rechnung,

$$cos.\theta\,cos.\theta_1\sqrt{a_1^2\,cos.\theta_1^2 + b_1^2\,sin.\theta_1^2} - sin.\theta\,sin.\theta_1\sqrt{a^2\,cos.\theta^2 + b^2\,sin.\theta^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(a + b)\,cos.\,2\theta + \tfrac{1}{2}(a - b)\,sin.\,\theta_1^2,$$

welche Gleichung wegen $\frac{d\theta}{\sqrt{a^2 cos.\theta^2 + b^2 sin.\theta^2}} = \frac{d\theta_1}{\sqrt{a_1^2\,cos.\theta_1^2 + b_1^2\,sin.\theta_1^2}}$ in

$$\frac{\tfrac{1}{2}(a + b)\,cos.\,2\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2 cos.\,\theta^2 + b^2 sin.\,\theta^2}} + \frac{\tfrac{1}{2}(a - b)\,sin.\,\theta_1^2\,d\theta_1}{\sqrt{a_1^2\,cos.\,\theta_1^2 + b_1^2\,sin.\,\theta_1^2}} =$$

$$= cos.\,\theta\,cos.\,\theta_1\,d\theta_1 - sin.\,\theta\,sin.\,\theta_1\,d\theta$$

umgestaltet werden kann. Man multiplicire diese letztere mit $2(a - b)$,

und schreibe $4(a_1^2 - b_1^2)$ statt $(a-b)^2$, und $\frac{1}{2}(1 - \cos. 2\theta_1)$ statt $\sin. \theta_1^2$, so hat man

$$\frac{(a^2 - b^2)\cos. 2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 \cos. \theta^2 + b^2 \sin. \theta^2}} = 2(a-b)\, d(\sin. \theta_1 \cos. \theta)$$

$$- \frac{2(a_1^2 - b_1^2)\, d\theta_1}{\sqrt{a_1^2 \cos. \theta_1^2 + b_1^2 \sin. \theta_1^2}} + \frac{2(a_1^2 - b_1^2)\cos. 2\theta_1\, d\theta_1}{\sqrt{a_1^2 \cos. \theta_1^2 + b_1^2 \sin. \theta_1^2}},$$

folglich

$$(a^2 - b^2)\int \frac{\cos. 2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 \cos. \theta^2 + b^2 \sin \theta^2}} = Const. - \frac{2(a_1^2 - b_1^2)\Theta}{A}$$

$$+ 2(a-b)\cos. \theta \sin. \theta_1 + 2(a_1^2 - b_1^2)\int \frac{\cos. 2\theta_1\, d\theta_1}{\sqrt{a_1^2 \cos. \theta_1^2 + b_1^2 \sin. \theta_1^2}};$$

wobei die Grenzen, innerhalb welcher die Integrationen rechter Hand des Gleichheitszeichens zu verrichten sind, durch die Grenzen, auf welche das linker Hand stehende Integral sich bezieht, bestimmt werden. Auf dieselbe Weise läßt sich

$$\int \frac{\cos. 2\theta_1\, d\theta_1}{\sqrt{a_1^2 \cos. \theta_1^2 + b_1^2 \sin \theta_1^2}} \text{ durch } \int \frac{\cos. 2\theta_2\, d\theta_2}{\sqrt{a_2^2 \cos. \theta_2^2 + b_2^2 \sin. \theta_2^2}}$$

ausdrücken, u. s. w., daher ist

$$\int \frac{\cos. 2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 \cos. \theta^2 + b^2 \sin. \theta^2}} =$$

$$= Const. - \frac{[2(a_1^2 - b_1^2) + 2^2(a_2^2 - b_2^2) + 2^3(a_3^2 - b_3^2) + \ldots\ldots]\Theta}{(a^2 - b^2)A}$$

$$+ \frac{2(a-b)\cos. \theta \sin. \theta_1 + 2^2(a_1 - b_1)\cos. \theta_1 \sin. \theta_2 + 2^3(a_2 - b_2)\cos. \theta_2 \sin. \theta_3 + \ldots}{a^2 - b^2}$$

Es sey

$\frac{1}{4}\sqrt{a^2 - b^2} = h$, $\frac{1}{4}\sqrt{a_1^2 - b_1^2} = h_1$, $\frac{1}{4}\sqrt{a_2^2 - b_2^2} = h_2$, u. s. w.,

so ist $\quad h_1 = \frac{h^2}{a_1}$, $\; h_2 = \frac{h_1^2}{a_2}$, $\; h_3 = \frac{h_2^2}{a_3}$, ...

mittelst welcher Gleichungen sich die Größen h_1, h_2, h_3, ... sehr leicht ergeben, da hier die Logarithmentafeln gebraucht werden können, und wir haben

$$\int \frac{\cos. 2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 \cos. \theta^2 + b^2 \sin. \theta^2}} = Const. - \frac{[2h_1^2 + 2^2 h_2^2 + 2^3 h_3^2 + \ldots]\Theta}{h^2 A}$$

$$+ \frac{h_1 \cos \theta \sin. \theta_1 + 2h_2 \cos. \theta_1 \sin \theta_2 + 2^2 h_3 \cos. \theta_2 \sin. \theta_3 + \ldots}{h^2},$$

wobei die Reihen rechter Hand des Gleichheitszeichens sehr schnell convergiren.

Substituirt man diese Ausdrücke in dem oben für s erhaltenen, so hat man die zur allgemeinen Rectification der Ellipse nöthige Formel.

Will man den ganzen Umfang der Ellipse berechnen, deren größere und kleinere Halbaxe a und b sind, so müssen alle Integrationen von $\theta = 0$ bis $\theta = 2\pi$ sich erstrecken. Dann aber nehmen θ_1, θ_2, ꝛc. und Θ genau dieselben äußersten Werthe an, folglich erhält man für den erwähnten Umfang die unendliche Reihe

$$\frac{\pi}{A}\left[a^2 + b^2 - 16(2h_1^2 + 2^2 h_2^2 + 2^3 h_3^2 + \ldots)\right].$$

Es sey nun s ein in dem Puncte x, y, z sich endigender Bogen irgend einer im Raume verzeichneten Curve, und σ die Projection desselben auf die Ebene xy, so liegen s und σ in einer auf der Ebene xy senkrecht stehenden Cylinderfläche (dieses Wort in weiterer Bedeutung genommen), welche alle von den Puncten des Bogens s auf die Ebene xy gehenden Perpendikel in sich enthält, und offenbar einer Ausbreitung in eine ebene Fläche ohne Änderung der Längen von s und σ fähig ist. Dabei verwandelt sich σ in eine gerade Linie, welche als die Abscissenaxe für s betrachtet werden kann, so, daß dem Endpuncte von s nunmehr die rechtwinkligen Coordinaten σ und z entsprechen. Wir haben also der oben für ebene Curven bewiesenen Formel zufolge

$$ds = \sqrt{d\sigma^2 + dz^2}.$$

Aber σ ist in seiner ursprünglichen Gestalt ein Bogen einer ebenen Curve, dessen Endpuncte die rechtwinkligen Coordinaten x und y gehören, und daher

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

es ist demnach

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{6}$$

Drückt man mittelst der Gleichungen der Curve dy und dz bloß durch x und dx aus, so wird die Rectification dieser Curve nach der Formel

$$s = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}$$

vollzogen werden können.

Wir bemerken hier noch, daß mit Hülfe dieses Ausdruckes für ds, die in der fünfzehnten Vorlesung gefundenen Formeln für den auf den Punct x, y, z einer Curve sich beziehenden Krümmungshalbmesser ρ die einfacheren Gestalten

$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - d^2s^2}} \tag{7}$$

$$= \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}$$ annehmen.

Neunzehnte Vorlesung.

Über die Quadratur der ebenen Curven, und über die Complanation und Kubirung der krummen Flächen.

Eine ebene krumme Linie quadriren heißt die Oberfläche einer ebenen Figur berechnen, welche entweder ganz von dieser krummen Linie, oder nur von einem Bogen derselben und von geraden Linien umschlossen wird. Im gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinatensysteme hat man es dabei im Allgemeinen mit einem Vierecke ABKH (Fig. 10) zu thun, wovon eine Seite AB ein Bogen der Curve, und die übrigen Seiten AH, BK, HK die Ordinaten der Endpuncte dieses Bogens und das zwischen ihnen liegende Stück der Abscissenaxe sind.

Um die Oberfläche dieses Viereckes zu finden, nehme man auf dem Bogen AB einen unbestimmten Punct M an, dessen Coordinaten OP und MP durch x und y bezeichnet werden, und lasse die Abscisse x um die Differenz $Pp = \Delta x$ wachsen, so geht die Ordinate y in $mp = y + \Delta y$ über, und die Oberfläche F der Figur AMPH ändert sich um das Stück $MmpP = \Delta F$. Es ist immer möglich Δx so klein, folglich m so nahe an M zu wählen, daß y bei dem Übergange von x in $x + \Delta x$ stets wächst, oder stets abnimmt. Unter dieser Voraussetzung zeigt sich, wenn man aus M und m auf mp und MP die Perpendikel Mt und mn fällt:

$$MmpP > MtpP \quad \text{und} \quad MmpP < nmpP,$$

$$\text{oder} \quad \Delta F > y\Delta x \quad \text{»} \quad \Delta F < (y + \Delta y)\Delta x,$$

$$\text{folglich} \quad \frac{\Delta F}{\Delta x} > y \quad \text{»} \quad \frac{\Delta F}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Da diese Resultate Statt finden, wie klein auch immer Δx seyn mag, so ist offenbar in Bezug auf das unendliche Abnehmen von Δx

$$lim. \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx} = y,$$

also

(1) $$dF = y dx$$

und

(2) $$F = \int y dx;$$

oder, wenn man das Integral $\int y\,dx$, so wie es die Rechnung darbietet, durch $\psi(x)$ andeutet:

(3) $$F = \psi(x) + Const.$$

Die Constante ist hier so zu bestimmen, daß F für $x = OH = h$ verschwindet, daher hat man

(4) $$F = \psi(x) - \psi(h).$$

Ist $OK = k$, so ergibt sich für die Oberfläche der Figur ABKH der Ausdruck

$$\psi(k) - \psi(h).$$

Es sey z. B. Ox die Hauptaxe einer Parabel, welcher α als Parameter gehört, so haben wir $y^2 = \alpha x$, folglich

$$F = \int dx \sqrt{\alpha x} = \sqrt{\alpha}\,.\int x^{\frac{1}{2}} dx = \tfrac{2}{3} x \sqrt{\alpha x} + Const.$$

Wird die Oberfläche der Figur gesucht, welche ein von dem Scheitel der Parabel ausgehender Bogen mit der Hauptaxe und dem von seinem Endpuncte auf dieselbe gefällten Perpendikel bildet, so muß F für $x = 0$ verschwinden. Es ist also in diesem Falle

$$F = \tfrac{2}{3} x \sqrt{\alpha x} = \tfrac{2}{3} x y,$$

d. h. diese Figur nimmt zwei Drittheile des mit ihren zwei geradlinigen Seiten construirten Rechteckes ein.

Für die Ellipse, deren Hauptaxen 2a und 2b als die Axen der Abscissen und Ordinaten dienen, ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, folglich

$$F = \frac{b}{a} \int dx \sqrt{a^2 - x}.$$

Verwandelt sich die Ellipse, indem $a = b$ wird, in einen Kreis, so haben wir für den letzteren

$$F' = \int dx \sqrt{a^2 - x},$$

$$\text{folglich ist} \quad F = \frac{b}{a} F'.$$

Wird demnach aus dem Mittelpuncte der Ellipse mit der Halbaxe a als Halbmesser ein Kreis beschrieben, so verhält sich das von dieser Axe und von zweien auf dieselbe errichteten Perpendikeln begrenzte Stück der Oberfläche der Ellipse zu dem correspondirenden Stücke der Kreisfläche wie b zu a. Die ganze Kreisfläche ist $= \pi a^2$, folglich die ganze Fläche der Ellipse $= \pi a b$; d. h. letztere Fläche ist so groß als jene eines Kreises, dessen Halbmesser dem geometrischen Mittel zwischen den Halbaxen der Ellipse gleich kommt.

Die Formeln (61) und (28) der ein und fünfzigsten und neun und vierzigsten Vorlesung über die Analysis geben

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\,Arc.\,sin.\,\frac{x}{a} + Const.;$$

mithin hat man, wenn man dieses Integral für $x = 0$ verschwinden läßt, für den das Centrum als Eckpunct enthaltenden Theil eines Quadranten der Kreisfläche, welchen die in dem Abstande x vom Centrum auf den einen Halbmesser desselben errichtete Senkrechte von ihm abschneidet, den Ausdruck

$$F' = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\,Arc.\,sin.\,\frac{x}{a},$$

in dessen beiden Gliedern man die Oberfläche des Dreieckes und des Sectors, in welche dieser Theil der Kreisfläche zerlegt werden kann, ohne Mühe erkennt. Man hätte also auch umgekehrt das Integral $\int dx\sqrt{a^2-x^2}$, so wie es ältere Mathematiker thaten, durch wirkliche Betrachtung des Kreises finden können.

Im Allgemeinen heißt eine Differenzialformel $\varphi(x)\,dx$ integriren, im geometrischen Sinne, eine ebene Curve quadriren, welcher im rechtwinkligen Coordinatensysteme die Gleichung $y = \varphi(x)$ gehört. So stellt also z. B. die Integration des Differenzials $\frac{dx}{x}$ die Quadratur der Curve vor, deren Gleichung $y = \frac{1}{x}$ oder $xy = 1$ ist. Diese Gleichung entspricht einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunct als Anfangspunct, und deren Asymptoten als Axen der Coordinaten angenommen worden sind.

Es ist nämlich hier die Größe, welche wir in den Vorlesungen über die Linien der zweiten Ordnung durch $B^2 - 4AC$ bezeichnet haben, $= 1$, also positiv; ferner besteht diese Gleichung, wenn man x und y mit $-x$ und $-y$ verwechselt; auch wird y bei dem unendlichen Wachsen von x unendlich klein, und bei dem unendlichen Abnehmen von x unendlich groß; endlich haben die Querare und die conjugirte Axe gleiche Werthe, denn jede derselben ist $= \sqrt{2}$. Zählt man die Flächenräume von der Ordinate des Punctes 1, 1, oder von der Ordinate des nach der Gegend der positiven Coordinaten zu befindlichen Scheitels der Hyperbel, so ergibt sich für das an der Abscisse x sich endigende Flächenstück der Ausdruck lx. Es stellen daher die natürlichen Logarithmen Flächenräume einer gleichseitigen, auf ihre Asymptoten bezo-

genen Hyperbel vor, und werden deßhalb bisweilen auch hyperbolische Logarithmen genannt.

Es sey nun was immer für eine krumme Fläche gegeben, und $dz = p\,dx + q\,dy$ ihre Differenzialgleichung in Bezug auf drei einander rechtwinklig coordinirte Ebenen, wobei p und q Functionen von x und y anzeigen. Man denke sich zu der Ebene der yz in den Abständen a_1 und a_2, und zu der Ebene der xz in den Abständen b_1 und b_2 parallele Ebenen geführt, so bestimmen dieselben auf der krummen Fläche eine vierseitige Figur, deren Oberfläche wir hier berechnen, oder, wie man zu sagen pflegt, complaniren wollen.

Die Projectionen der vier Eckpuncte dieser Figur auf die Ebene xy haben die Coordinaten

$$a_1, b_1; \quad a_1, b_2; \quad a_2, b_1; \quad a_2, b_2;$$

legt man nun zu der Ebene der yz in der Entfernung x, und zu der Ebene der xz in der Entfernung y eine parallele Ebene, so wird von der erwähnten vierseitigen Figur ein Theil F abgesondert, dessen Eckpuncte, in so fern man sie auf die Ebene xy projicirt, den Coordinaten

$$a_1, b_1; \quad a_1, y; \quad x, b_1; \quad x, y$$

entsprechen. Wächst x um die Differenz Δx, so ändert sich F um die partielle Differenz $\underset{x}{\Delta} F$, welche bei dem unendlichen Abnehmen von Δx in $\frac{dF}{dx} dx$ übergeht. Wächst ferner y um Δy, so erleidet $\underset{x}{\Delta} F$ die Änderung $\underset{y}{\Delta}\underset{x}{\Delta} F = \underset{x,y}{\Delta^2} F$, welche sich bei dem unendlich klein Werden von Δy in

$$\frac{d \cdot \frac{dF}{dx} dx}{dy} dy = \frac{d^2 F}{dx\,dy} dx\,dy$$

verwandelt. Vermag man $\frac{d^2 F}{dx\,dy}$ durch x und y auszudrücken, findet man z. B. dafür den Ausdruck $\varphi(x, y)$, so gibt das bloß in Bezug auf y genommene, und für $y = b_1$ verschwindende Integral $\int \varphi(x, y)\, dy = \psi(x, y)$ den Werth von $\frac{dF}{dx}$, und das bloß in Bezug auf x genommene, und bei $x = a_1$ anfangende Integral $\int \psi(x, y)\, dx = \Psi(x, y)$ den Werth von F. Die zu suchende Oberfläche ist somit $= \Psi(a_2, b_2)$.

Da man bei der Ableitung von $\frac{d^2 F}{dx\,dy}$ aus F auch zuerst y in

$y + \Delta y$, und sodann x in $x + \Delta x$ hätte können übergehen lassen, so ist die Ordnung, in welcher man die hier angedeuteten Integrationen vornimmt, völlig gleichgültig, d. h. es ist

$$F = \int \left(\int \varphi(x, y)\, dy\right) dx = \int \left(\int \varphi(x, y)\, dx\right) dy,$$

wofür man der Kürze wegen bloß

$$F = \int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

schreibt.

Es kömmt also nunmehr bloß auf die Bestimmung von $\frac{d^2 F}{dx\, dy}$ an. Die Differenz $\Delta^2_{x,y} F$ erscheint als eine vierseitige Figur, welche sich um so mehr einem ebenen geradlinigen Vierecke nähert, je kleiner Δx und Δy sind, und bei dem unendlichen Abnehmen dieser Größen offenbar ein solches Viereck zur Grenze hat. Die Projection der Fläche $\Delta^2_{x,y} F$ auf die Ebene der xy ist ein Rechteck, dessen einander anliegende Seiten Δx und Δy sind, dessen Inhalt daher durch das Product $\Delta x\, \Delta y$ ausgedrückt wird. Aber die Oberfläche der Projection einer ebenen Figur auf eine Ebene wird durch das Product dieser Figur mit dem Cosinus ihres Neigungswinkels gegen die Projectionsebene gemessen; daher haben wir, wenn λ den Winkel anzeigt, welchen die zum Puncte x, y, z der gegebenen krummen Fläche gehörende Berührungsebene mit der Ebene xy bildet, bei dem Übergange von Δx und Δy in die Differenzialien dx und dy:

$$dx\, dy = \frac{d^2 F}{dx\, dy}\, dx\, dy \;.\; \cos.\lambda.$$

Der Winkel λ kömmt jenem gleich, unter welchem die zum Puncte x, y, z der krummen Fläche gezogene Normale gegen die Richtung der z geneigt ist; es ist also

$$\cos.\lambda = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

folglich

(5) $$\frac{d^2 F}{dx\, dy} = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$$

und

(6) $$F = \int\int dx\, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1},$$

wobei die beiden Integrationen in beliebiger Ordnung innerhalb der Grenzen $x = a_1$, $x = a_2$ und $y = b_1$, $y = b_2$ zu verrichten sind.

Man denke sich nun auf der Ebene xy ein Viereck verzeichnet,

wovon zwei Seiten geradlinig sind, und auf der Axe der x, in den Entfernungen a_1 und a_2 vom Anfangspuncte der Coordinaten, senkrecht stehen; die anderen Seiten aber zweien auf die Gleichungen $y = f'(x)$ und $y = f''(x)$ sich beziehenden Curven als Äste zugehören: so beschreibt eine längs dem Umfange dieses Viereckes sich bewegende, und dabei die genannte coordinirte Ebene stets senkrecht treffende Gerade auf der gegebenen krummen Fläche $dz = p dx + q dy$ eine vierseitige Figur, welche sich ebenfalls nach der so eben erklärten Methode complaniren läßt. Denn zwei Paare zu den Ebenen yz und xz in den Abständen x, $x + dx$ und y, $y + dy$ paralleler Ebenen bestimmen auf dieser Fläche ein mit dx und dy zugleich unendlich abnehmendes Viereck, welches man als das zweite Differenzial desjenigen Theiles F der zu complanirenden Fläche betrachten kann, dessen vier Eckpuncten nach den Richtungen der x und y die Coordinaten

$$a_1,\ f'(a_1);\quad a_1,\ f''(a_1);\quad x,\ f'(x);\quad x,\ f''(x)$$

entsprechen; vorausgesetzt, daß man die Differenziation zuerst in Bezug auf x, und hernach in Bezug auf y vorgenommen hat. Man erhält also den Werth von F, wenn man zuerst das Integral des Differenzials $dx\,dy\sqrt{p^2 + q^2 + 1}$ in Bezug auf y, und zwar innerhalb der Grenzen $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ nimmt, und sodann das gefundene Resultat weiterhin so integrirt, daß es für $x = a_1$ verschwindet. Setzt man nach verrichteter Integration $x = a_2$, so hat man den Inhalt des zu complanirenden Flächenstückes. In diesem Falle, auf welchen, als den allgemeineren, der vorhin behandelte zurückgeführt werden kann, ist die Ordnung, in welcher man die Integrationen bewerkstelliget, nicht willkürlich, sondern durch die Natur der Sache selbst gegeben.

Es bedarf wohl kaum einer Erinnerung, daß die zwei krummen Seiten der Projection der zu complanirenden Fläche auf die Ebene xy Äste einer und derselben Curve seyn können. Ist diese Curve eine in sich selbst zurückkehrende, so kann man sie selbst statt des auf der Ebene xy verzeichneten Viereckes nehmen, wobei also die geraden Seiten desselben gänzlich verschwinden, und a_1, a_2 die Abscissen der die erwähnte Curve berührenden oder der äußersten Ordinaten vorstellen.

Kann eine krumme Fläche durch Umdrehung einer ebenen Curve um eine in ihrer Ebene befindliche Gerade, welche wir für die Axe der x ansehen wollen, erzeugt werden, so läßt sich das zwischen zweien auf

dieser Geraden senkrecht stehenden Ebenen enthaltene Stück der Fläche auf eine einfache Weise complaniren. Es seyen a_1, a_2 die Entfernungen der beiden letztgenannten Ebenen vom Anfangspuncte der Coordinaten, ferner $y = \varphi(x)$ die Gleichung der die Fläche beschreibenden Curve, in so ferne diese in der Ebene xy sich befindet; so begegnet eine in dem Abstande x vom Anfangspuncte auf die Axe der x senkrechte Ebene der Fläche in einem Kreise, dessen Halbmesser y ist. Zwischen dieser Ebene und einer zweiten, ebenfalls auf der Axe der x senkrechten, und der ersteren sich unendlich nähernden, liegt ein unendlich abnehmender Theil der zu complanirenden Fläche, welcher, im Geiste der Methode der Grenzen, als die Seitenfläche eines gemeinen abgekürzten senkrechten Kegels betrachtet, und wenn wir den Abstand der beiden Ebenen dx nennen, dem bekannten Lehrsatze der Elementargeometrie gemäß, durch

$$\pi(y + y + dy)\,ds = 2\pi y\,ds$$

vorgestellt werden kann, wobei $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist. Wir haben somit für die zu berechnende Fläche den Ausdruck

$$(7)\qquad 2\pi\int y\,ds = 2\pi\int \varphi(x)\sqrt{1 + \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2}\,.\,dx,$$

wobei das Integral für $x = a_1$ verschwinden und bis $x = a_2$ sich ausdehnen muß.

Stellen wir uns vor, ein auf der Ebene xy errichtetes Perpendikel bewege sich längs dem Umfange der Flächenstücke, welche wir oben F und $\frac{d^2F}{dx\,dy}\,dx\,dy$ genannt haben, so entstehen über dieser coordinirten Ebene zwei an der gegebenen krummen Fläche sich endigende Säulen, deren körperliche Inhalte, der Beziehung zufolge, in welcher sie gegen einander erscheinen, durch S und $\frac{d^2S}{dx\,dy}\,dx\,dy$ bezeichnet werden können. Die Säule $\frac{d^2S}{dx\,dy}\,dx\,dy$ ist nach der Methode der Grenzen offenbar als ein Prisma zu betrachten, dem das Rechteck $dx\,dy$ als Grundfläche, und die Ordinate z als Höhe gehört; daher besteht die Gleichung

$$\frac{d^2S}{dx\,dy}\,dx\,dy = z\,dx\,dy,$$

aus welcher

$$(8)\qquad S = \iint z\,dx\,dy$$

folgt. Die hier angedeuteten Integrationen sind in derselben Ord-

nung und innerhalb derselben Grenzen zu verrichten, wie in der Formel (6).

Läßt sich die Oberfläche Φ jedes einzelnen einer bestimmten Folge paralleler ebener Querschnitte des durch eine gegebene krumme Fläche begrenzten Raumes als eine Function der Entfernung x dieses Schnittes von einem fixen Puncte darstellen, so ist der körperliche Inhalt des durch zwei Ebenen, deren Entfernungen von diesem Puncte a_1 und a_2 sind, und durch die krumme Fläche begrenzten Raumes

(9) $$= \int \Phi \,.\, dx,$$

wobei sich die Integration von $x = a_1$ bis $x = a_2$ erstreckt. Denn der unendlich abnehmende Raum, welchen die in den Abständen x und $x + dx$ vom fixen Puncte durch die Fläche geführten ebenen Schnitte bestimmen, kann als ein Prisma betrachtet werden, dessen Basis Φ, und dessen Höhe dx ist.

So gibt z. B. jeder auf die Axe der x senkrechte Schnitt eines Ellipsoids, dem die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gehört, eine Ellipse, deren den Axen der y und z parallele Hauptaxen $2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ und $2c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ sind. Die Fläche Φ dieser Ellipse wird demnach durch das Product der Hälften dieser Linien mit der Zahl π gemessen, oder es ist

$$\Phi = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \text{ folglich}$$

$$\int \Phi\, dx = \pi bc \int \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) + Const.$$

Um den Inhalt des ganzen Ellipsoids zu erhalten, muß das Integral innerhalb der Grenzen $-a$ und $+a$ genommen werden, mithin ist derselbe $= \frac{4}{3}.\pi abc$.

Für den durch die Umdrehung der ebenen Curve $y = \varphi(x)$ um die Axe der x beschriebenen Raum ist, wenn die Schnitte senkrecht gegen die Axe der x geführt werden:

$$\Phi = \pi y^2;$$

folglich die zur Kubirung desselben dienliche Formel:

(10) $$\int \Phi\, dx = \pi \int y^2 dx = \pi \int [\varphi(x)]^2 dx.$$

Zwanzigste Vorlesung.

Über die Übertragung einiger in den vorhergehenden Vorlesungen gefundenen Formeln auf ein Polarcoordinatensystem.

Bei der analytischen Betrachtung gewisser ebenen Curven kömmt man in die Lage von einem Polarcoordinatensysteme, dessen Basis mit der Ebene der vorliegenden Curve zusammenfällt, Gebrauch zu machen. Es wird nämlich die Beschaffenheit einer Curve oft mit Vortheil durch eine Gleichung zwischen der Länge r des von einem fixen in dieser Ebene gewählten Puncte (dem Pole) an die Curve gezogenen Radiusvectors und der Abweichung η des letzteren von einer durch den genannten Punct gehenden fixen Geraden (der Axe) ausgedrückt. Hiebei ist man in die Nothwendigkeit versetzt, die Bestimmung der Lage der Tangente, der Größe des Krümmungshalbmessers, die Rectification und Quadratur der ebenen Curven auf dieses Coordinatensystem zu gründen, weßwegen wir uns in gegenwärtiger Vorlesung mit der Einführung der Polarcoordinaten in die zu erwähnten Zwecken für ein rechtwinkliges Coordinatensystem bereits bekannten Formeln beschäftigen werden.

Zu diesem Ende denken wir uns die Gleichung der in der Frage stehenden Curve mittelst rechtwinkliger Coordinaten x, y in einem Systeme gegeben, dessen Anfangspunct mit dem Pole, und dessen Axe der Abscissen x mit der Polaraxe übereinstimmt, so haben wir offenbar

(1) $$x = r \cos.\eta, \quad y = r \sin.\eta,$$

folglich

(2) $$dx = dr \cos.\eta - r\,d\eta \sin.\eta, \quad dy = dr \sin.\eta + r\,d\eta \cos.\eta.$$

Die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die zu dem Puncte x, y der Curve gezogene Berührende mit der Abscissenaxe darstellt, wird bekanntlich durch den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt; es ist also die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der zu dem Puncte r, η gehörenden Berührenden gegen die Polaraxe

(3) $$= \frac{dr \sin.\eta + r\,d\eta \cos.\eta}{dr \cos.\eta - r\,d\eta \sin.\eta}.$$

Es sey λ der Winkel, unter welchem diese Berührende dem Radiusvector r begegnet. Legen wir der Formel den Fall zu Grunde, in welchem dieser Winkel als der Unterschied der von der Richtung der y mit der Berührenden und dem Radiusvector gebildeten Winkel erscheint, so haben wir, weil $\frac{dx}{dy}$ die trigonometrische Tangente des ersteren, und $\frac{x}{y}$ jene des letzteren darstellt:

$$tg.\lambda = \frac{\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dy}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y\,dy + x\,dx}.$$

Nun ist

$$y\,dx - x\,dy = -x^2 d\frac{y}{x} = -r^2 \cos.\eta^2\, d\,tg.\eta = -r^2 d\eta$$

und $y\,dy + x\,dx = \frac{1}{2} d(y^2 + x^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r\,dr$;

also

$$(4) \qquad tg.\lambda = -\frac{r\,d\eta}{dr}.$$

Hier erhält $tg.\lambda$ das Zeichen $-$, weil, sobald dx und dy einerlei Zeichen besitzen, d. h. x und y zugleich wachsen oder abnehmen, r bei dem Wachsen von η abnimmt, oder umgekehrt, wovon man sich durch Betrachtung einer Figur leicht überzeugt.

Stellt s einen im Puncte x, y oder r, η sich endigenden Bogen der Curve vor, so ist, wie wir in der achtzehnten Vorlesung gezeigt haben, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Wir haben nun wegen (2)

$$dx^2 = dr^2 \cos.\eta^2 - 2\,r\,dr\,d\eta \sin.\eta \cos.\eta + r^2 d\eta^2 \sin.\eta^2,$$
$$dy^2 = dr^2 \sin.\eta^2 + 2\,r\,dr\,d\eta \sin.\eta \cos.\eta + r^2 d\eta^2 \cos.\eta^2,$$

folglich

$$(5) \qquad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\eta^2}$$

und

$$(6) \qquad s = \int dr \sqrt{1 + \frac{r^2 d\eta^2}{dr^2}} = \int d\eta \sqrt{\frac{dr^2}{d\eta^2} + r^2}.$$

Die erste Formel setzt voraus, daß $d\eta$ durch r und dr, und die zweite, daß r und dr durch η und $d\eta$ ausgedrückt seyen.

Für den zum Puncte x, y gehörenden Krümmungshalbmesser ρ besteht die Formel

$$\rho = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Die Gleichungen (2) geben uns

$$d^2x = d^2r\cos.\eta - 2dr\,d\eta\sin.\eta - r\,d\eta^2\cos.\eta - r\,d^2\eta\sin.\eta,$$
$$d^2y = d^2r\sin.\eta + 2dr\,d\eta\cos.\eta - r\,d\eta^2\sin.\eta + r\,d^2\eta\cos.\eta,$$

mithin

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = -r\,d^2r\,d\eta + 2dr^2\,d\eta + r^2d\eta^3 + r\,dr\,d^2\eta$$

und

$$(7)\qquad \rho = \frac{(dr^2 + r^2d\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{r\,dr\,d^2\eta + r^2d\eta^3 + 2dr^2d\eta - r\,d^2r\,d\eta}.$$

Man kann sich die Berechnung des Ausdruckes für $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ erleichtern, wenn man die Abscissenaxe x auf der Richtung des Radius-vectors r senkrecht oder $\eta = \frac{\pi}{2}$ annimmt. Hiedurch wird wegen $\sin.\eta = 1$ und $\cos.\eta = 0$:

$$dx = -r\,d\eta, \qquad\qquad dy = dr,$$
$$d^2x = -2dr\,d\eta - r\,d^2\eta, \quad d^2y = d^2r - r\,d\eta^2,$$

woraus sogleich der oben für $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ aufgestellte Ausdruck folgt.

Der Nenner der Formel (7) läßt sich auch auf die Gestalt

$$2d\eta(dr^2 + r^2d\eta^2) + r\,dr\,d^2\eta - r^2d\eta^3 - r\,d^2r\,d\eta$$

bringen. Multiplicirt man ihn in diesem Zustande mit $r\,dr$, so ergibt sich das Product

$$2r\,dr\,d\eta(dr^2 + r^2d\eta^2) + r^2dr^2d^2\eta - r^3dr\,d\eta^3 - r^2dr\,d^2r\,d\eta =$$
$$= 2r\,dr\,d\eta(dr^2 + r^2d\eta^2) + r^2d^2\eta(dr^2 + r^2d\eta^2)$$
$$- r^4d\eta^2d^2\eta - r^3dr\,d\eta^3 - r^2dr\,d^2r\,d\eta$$
$$= (dr^2 + r^2d\eta^2)(2r\,dr\,d\eta + r^2d^2\eta)$$
$$- r^2d\eta(r^2d\eta\,d^2\eta + r\,dr\,d\eta^2 + dr\,d^2r).$$

Allein es ist $\quad dr^2 + r^2d\eta^2 = ds^2,$

folglich $\quad dr\,d^2r + r\,dr\,d\eta^2 + r^2d\eta\,d^2\eta = ds\,d^2s;$

ferner $\quad 2r\,dr\,d\eta + r^2d^2\eta = d(r^2d\eta):$

daher ist der Nenner in der Formel (7)

$$= \frac{ds^2d(r^2d\eta) - r^2d\eta\,ds\,d^2s}{r\,dr} \quad \text{und}$$

$$\rho = \frac{r\,dr\,.\,ds^3}{ds^2d(r^2d\eta) - r^2d\eta\,ds\,d^2s}$$
$$= \frac{r\,dr}{\dfrac{d(r^2d\eta)}{ds} - \dfrac{r^2d\eta\,d^2s}{ds^2}},$$

d. h.

(8) $$\rho = \frac{r\,dr}{d\,.\,\frac{r^2\,d\eta}{ds}}.$$

Bei dem Gebrauche der Formeln (7) und (8) wird man, wie es der Rechnung am zuträglichsten scheint, eines der Differenzialien dr, $d\eta$, ds als constant behandeln.

Es sey im Polarcoordinatensysteme die Oberfläche F eines von zwei Radienvectoren und dem zwischen denselben enthaltenen Bogen der Curve begrenzten Sectors zu finden. Einer dieser Radienvectoren, welcher gegen die Polaraxe unter dem Winkel η geneigt ist, heiße r, und gehe, indem η um die Differenz $\Delta\eta$ wächst, in $r + \Delta r$ über, wobei sich zugleich die Fläche F um ΔF ändert; so werden, wenn wir aus dem Pole mit den Halbmessern r und $r + \Delta r$ Kreisbogen beschreiben, bis sie mit den Richtungen von $r + \Delta r$ und r zusammentreffen, die Längen dieser Kreisbogen, da $\Delta\eta$ ein zwischen den Geraden r und $r + \Delta r$ mit der Längeneinheit als Halbmesser beschriebener Kreisbogen ist, durch die Producte $r\Delta\eta$ und $(r + \Delta r)\,\Delta\eta$, folglich die Oberflächen der durch diese Kreisbogen begrenzten Sectoren durch $\frac{1}{2}r^2\Delta\eta$ und $\frac{1}{2}(r + \Delta r)^2\,\Delta\eta$ vorgestellt. Bei dem unendlichen Abnehmen von $\Delta\eta$ ist zuletzt gewiß stets

$$\Delta F > \tfrac{1}{2}r^2\Delta\eta \quad \text{und} \quad \Delta F < \tfrac{1}{2}(r + \Delta r)^2\,\Delta\eta,$$

$$\text{folglich} \quad lim.\ \frac{\Delta F}{\Delta \eta} = \frac{dF}{d\eta} = \tfrac{1}{2}r^2$$

oder

(9) $$dF = \tfrac{1}{2}r^2\,d\eta$$

und

(10) $$F = \tfrac{1}{2}\int r^2\,d\eta,$$

wobei man die Integration innerhalb der gehörigen Grenzen verrichten muß.

Das Polarcoordinatensystem dringt sich bei der analytischen Betrachtung der sogenannten Spirallinien von selbst auf.

Man kann nämlich jede ebene Curve durch die Bewegung eines Punctes beschrieben denken, welcher auf einer geraden Linie nach einem bestimmten Gesetze fortschreitet, während sich diese Gerade um einen in ihr befindlichen fixen Punct in einerlei Ebene dreht. Nimmt man den genannten fixen Punct zum Pole, und eine beliebige Position der Geraden zur Axe an, so wird das Bewegungsgesetz des die Curve beschrei-

benden Punctes durch die Relation ausgedrückt, welche zwischen den von demselben auf der beweglichen Geraden zurückgelegten Wegen, und den zugehörigen Abweichungen der Geraden von der Axe herrscht. Läßt sich dieses Bewegungsgesetz an mehreren von einander abgesonderten Puncten realisiren, so besteht die Curve aus mehreren von einander abgesonderten Ästen.

Gestattet das erwähnte Gesetz der beweglichen Geraden unzählige Umläufe um den Pol, so windet sich die von dem bewegten Puncte beschriebene Curve unzählige Male um den Pol herum, und heißt sodann eine Spirale.

Die einfachste Spirale ist die archimedische. Bei derselben sind die von dem bewegten Puncte auf der Geraden durchlaufenen Wege den Winkeln, um welche sich diese Gerade von ihrer anfänglichen Position entfernt hat, direct proportionirt. Ihre Gleichung ist

$$r = a + b\eta,$$

wobei r den Radiusvector eines Curvenpunctes, η den Abweichungswinkel desselben von seiner anfänglichen Lage, a den anfänglichen Werth des Radiusvectors, und b den Weg anzeigt, welchen der die Curve beschreibende Punct zurückgelegt hat, sobald der Drehungswinkel η der Einheit gleich geworden ist.

Da man den Winkel η sowohl im positiven, wie auch im negativen Sinne in das Unendliche wachsen lassen kann, und dabei r in demselben Sinne unendlich zunimmt, so erscheint diese Spirale, man mag sie nun nach der einen oder nach der anderen Richtung verfolgen, mit unzähligen sich immer mehr und mehr vergrößernden Windungen versehen. Sie geht dabei stets durch den Pol selbst, weil r für $\eta = -\frac{a}{b}$ verschwindet. Eine durch den Pol gezogene Gerade durchschneidet die Spirale in unzähligen Puncten, deren Radienvectoren nach der Reihe

$r_1 = a + b\eta,\ r_2 = a + b(\eta + 2\pi),\ r_3 = a + b(\eta + 4\pi),$ ꝛc.

sind, und

$$r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = \text{ꝛc.} \ldots\ldots = 2b\pi$$

geben. Es nimmt also der dieser Spirale fortwährend folgende Radiusvector, so oft er einen Umlauf vollendet hat, um die von seiner Lage unabhängige Größe $2b\pi$, nämlich um die Länge der Peripherie des mit dem Halbmesser b verzeichneten Kreises, zu.

Wählt man jene Gerade zur Polaraxe, für welche $\eta = -\frac{a}{b}$ ist, d. h. setzt man in der Gleichung der archimedischen Spirale $\eta - \frac{a}{b}$ statt η, so erhält dieselbe die einfachere Form

$$r = b\eta.$$

Da hier $dr = b\,d\eta$ ist, so findet man die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die zu dem Puncte r, η gezogene Berührende mit dem Radiusvector macht, das ist, den Ausdruck

$$\frac{r\,d\eta}{dr} = \frac{b\eta\,d\eta}{b\,d\eta} = \eta.$$

Das zwischen dem Pole und dieser Berührenden enthaltene Stück des im Pole auf den Radiusvector errichteten Perpendikels, welches man die Subtangente der Curve im Polarcoordinatensysteme zu nennen pflegt, ist also hier $= r\eta$, nämlich dem mit dem Radiusvector zwischen der Axe und der Curve beschriebenen Kreisbogen gleich.

Das Integral $\int \frac{1}{2} r^2\,d\eta$ erhält bei dieser Spirale den Werth

$$\int \tfrac{1}{2} b^2 \eta^2\,d\eta = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} b^2 \eta^3 + Const. = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} r^2 \eta + Const.$$

Läßt man das Integral für $\eta = 0$ verschwinden, wodurch $Const. = 0$ wird, so ergibt sich die Fläche, welche der Radiusvector an der Spirale durchlauft, wenn er sich von der Axe um den Winkel η entfernt $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} r^2 \eta$, nämlich dem dritten Theile des dem Halbmesser r und dem Winkel η entsprechenden Kreissectors gleich.

Unter den übrigen Spirallinien verdienen noch erwähnt zu werden die hyperbolische und die logarithmische Spirale.

Die Gleichung der ersteren ist $r = \frac{a}{\eta}$; in derselben verhalten sich nämlich die Radienvectoren verkehrt wie ihre Abweichungen von der Axe. Da hier $r\eta = a$ ist, so sieht man, daß jeder aus dem Pole zwischen der Axe und der Curve beschriebene Kreisbogen einerlei Länge a hat, folglich eine der Axe in dem Abstande a parallel laufende Gerade eine Asymptote der Spirale seyn muß. Diese Curve nähert sich dem Pole in unzähligen Windungen, ohne ihn je zu erreichen, weil bei dem unendlichen Wachsen von η der Radiusvector r unendlich abnimmt, ohne jedoch gänzlich zu verschwinden. Obige Gleichung gibt $dr = -\frac{a\,d\eta}{\eta^2}$, folglich $\frac{r\,d\eta}{dr} = -\eta$, und daher den numerischen

Werth der Subtangente $= r\eta = a$, welcher also bei der hyperbolischen Spirale unveränderlich ist.

Der logarithmischen Spirale gehört die Gleichung $\eta = log.\, r = a l r$, wobei a den Modulus der durch *log.* vorgestellten Logarithmen bezeichnet, oder $r^a = e^\eta$. Läßt man den Winkel η im negativen Sinne unendlich zunehmen, so wird r unendlich klein, nie aber $= 0$; daher macht auch diese Spirale um den Pol unzählige stets enger werdende Windungen, ohne jedoch mit demselben zusammen zu kommen. Hier ist $d\eta = \frac{a\,dr}{r}$, folglich $\frac{r\,d\eta}{dr} = a$; es begegnen daher die Radienvectoren aller Puncte dieser Curve den entsprechenden Berührungslinien unter dem nämlichen Winkel, dessen Tangente der Modulus des Systems ist, auf welches sich die Spirale bezieht. Bei der Spirale dieser Art, für welche die Gleichung $\eta = l r$ Statt findet, ist dieser Winkel ein halber Rechter.

Die logarithmische Spirale läßt eine einfache Rectification zu. Für sie ist nämlich die Länge jedes Bogens

$$s = \int dr \sqrt{1 + \frac{r^2\,d\eta^2}{dr^2}} = \int dr \sqrt{1 + a^2} = (r + Const.) \sqrt{1 + a^2}.$$

Soll s für $r = h$ verschwinden, so ist

$$s = (r - h)\sqrt{1 + a^2}.$$

Wird h unendlich klein, so ergibt sich $lim.\, s = r\sqrt{1 + a^2}$. Verfolgt man also die Länge der logarithmischen Spirale von einem bestimmten Puncte derselben gegen den Pol hin, so nähert sich diese Länge, der unendlich vielen Windungen ungeachtet, einer endlichen Grenze.

Der Gebrauch der Polarcoordinaten ist aber auch in anderen Fällen nützlich. Wir wollen hier nur noch die Polargleichungen der Kegelschnittslinien anführen, wenn ein Brennpunct zum Pole, und die durch denselben gehende Hauptaxe zur Polaraxe gewählt wird.

Bei der Ellipse, deren größere Halbaxe $= a$ und die kleinere $= b$ ist, wird, wie wir in der achten Vorlesung gezeigt haben, der aus dem Brennpuncte zu einem Curvenpuncte, welchem die auf der Axe $2a$ aus dem Mittelpuncte gezählte Abscisse x entspricht, geführte Radiusvector allgemein durch die Gleichung

$$r = a - \varepsilon x$$

ausgedrückt, in der ε den Bruch $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, oder die sogenannte Excentricität vorstellt. Die Entfernung des Brennpunctes von dem Mittelpuncte der Ellipse ist $= \sqrt{a^2 - b^2}$ oder $= a\varepsilon$; nennen wir nun den Winkel, welchen der Radiusvector r mit der Axe 2a bildet, η, so haben wir

$$x - r\cos.\eta = a\varepsilon;$$

folglich, wenn wir mittelst dieser Gleichung aus der vorigen x wegschaffen,

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos.\eta}$$

für die Polargleichung der Ellipse.

Auf ähnlichem Wege erhält man die Polargleichung der Hyperbel

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 - \varepsilon\cos.\eta}.$$

Für die Parabel sey α der Parameter und x die Abscisse auf der Hauptaxe vom Scheitel aus gezählt, so ist der Radiusvector

$$r = x + \frac{\alpha}{4}.$$

Aber die Abscisse des Brennpunctes ist $\frac{\alpha}{4}$, folglich haben wir

$$r\cos.\eta = x - \frac{\alpha}{4}$$

und $$r = \frac{\alpha}{2(1 - \cos.\eta)}.$$

Ein und zwanzigste Vorlesung.

Über einige besondere Puncte ebener Curven.

Die Geometer pflegen bei der Untersuchung der Gestalt einer Curve ihre Aufmerksamkeit vorzüglich auf jene Puncte zu richten, in welchen dieselbe von der gewöhnlichen Form einer einfachen Biegung abweicht. Diese sind bei ebenen Curven, mit welchen wir uns hier allein beschäftigen wollen, die sogenannten Wendungspuncte, die Rückkehrpuncte und die vielfachen Puncte.

Wenn die Gerade, welche eine krumme Linie in einem bestimmten Puncte berührt, in eben diesem Puncte durch die Curve dergestalt hindurchgeht, daß die demselben zunächst liegenden Puncte der Curve auf entgegengesetzten Seiten jeder durch ihn gezogenen Geraden sich befinden, so heißt dieser Berührungspunct ein Wendungspunct der Curve. Ein solcher ist der Punct N (Fig. 11) der Curve HNK.

Aus der gegebenen Erklärung folgt, daß, wenn ein Punct einer Curve ein Wendungspunct seyn soll, von den beiden in demselben aneinander grenzenden Theilen der Curve der eine seine concave, und der andere seine convexe Seite gegen jede nicht durch diesen Punct geführte Gerade kehren, und überdieß, in so fern die letztere als Abscissenaxe betrachtet wird, die Curve sowohl für die Abscissen, welche zunächst kleiner, als auch für jene, welche zunächst größer sind, als die Abscisse des genannten Punctes, reelle Ordinaten darbieten müsse.

Da der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$, mit gehöriger Berücksichtigung seines Zeichens, die trigonometrische Tangente des Winkels angibt, welchen die zu dem Puncte x, y einer Curve geführte Berührungslinie mit der Richtung der positiven x bildet, und dieser Winkel bei dem Wachsen von x ab- oder zunimmt, je nachdem der Bogen der Curve, in welchem sich der Punct x, y befindet, gegen die Axe der x concav oder convex erscheint; so wird der genannte Differenzialquotient in Bezug auf einen Wendungspunct offenbar ein Maximum oder ein Minimum. Auch kann man umgekehrt sagen, jeder Werth von x, welcher $\frac{dy}{dx}$ zu einem Maximum oder Minimum macht, gehöre jederzeit einem Wendungspuncte, denn es müssen unter dieser Voraussetzung für den

genannten Werth von x die beiden Substitutionen $x + \Delta x$ und $x - \Delta x$, wenigstens hinsichtlich der kleinsten Werthe von Δx, reelle Werthe von y herbeiführen.

Alle Werthe von x, durch welche der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$ in den Zustand des Maximums oder Minimums versetzt wird, sind Wurzeln einer der Gleichungen $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{0}$; jedoch läßt sich dieser Satz bekanntlich nicht umkehren.

Man wird also nach verrichteter Auflösung dieser Gleichungen unter den reellen Werthen des x, denen reelle y correspondiren, diejenigen, welche Wendungspuncte der vorgelegten Curve anzeigen, mit Rücksicht auf oben ausgesprochene Bedingungen, ausscheiden. Von den Werthen der Abscisse x, durch welche auch noch einige der an $\frac{d^2y}{dx^2}$ unmittelbar sich anschließenden höheren Differenzialquotienten in die Nulle übergehen, sind nur diejenigen beizubehalten, in Bezug auf welche der letzte dieser Folge verschwindender Differenzialquotienten von gerader Ordnung ist. Statt zu untersuchen, ob ein obigen Gleichungen genügender Werth von x auf ein Maximum oder Minimum des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ führt, kann man sogleich unmittelbar nachsehen, ob, wie es die Natur eines Wendungspunctes fordert, die Curve an der durch dieses x bezeichneten Stelle ihre Tangente durchschneidet, d. h. ob die Abscissen $x + \Delta x$ und $x - \Delta x$ bei den kleinsten Werthen von Δx Ordinaten besitzen, wovon die einen kleiner und die anderen größer sind, als die denselben Abscissen zugehörigen Ordinaten der erwähnten Tangente.

Da die Gleichung jeder geraden Linie zur ersten Ordnung gehört, folglich die Differenzialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, etc. für die Tangente des Punctes x, y einer Curve jederzeit verschwinden, so sieht man, daß die Tangente mit der Curve an allen Stellen, an welchen $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist, in einer Berührung der zweiten Ordnung, ferner an allen Stellen, an welchen überdieß noch $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ ist, in einer Berührung der dritten Ordnung steht, u. s. w. Man nennt die Puncte einer Curve, in Bezug auf welche für die Abscissen $x + \Delta x$ und $x - \Delta x$ bei den kleinsten Werthen von Δx reelle Ordinaten Statt finden, und

nebst $\frac{d^2 y}{d x^2}$ auch noch einige der höheren Differenzialquotienten $\frac{d^3 y}{d x^3}$, $\frac{d^4 y}{d x^4}$, ꝛc. gleich Null werden, Schlangenpuncte, und zwar sichtbare oder unsichtbare, je nachdem in denselben wirklich eine Wendung der Curve erfolgt oder nicht. Schlangenpuncte entstehen immer, wenn zwei oder mehrere Wendungspuncte eines Curvenastes durch Modificationen der Constanten, welche auf die Gestalt der Curve Einfluß haben, einander unendlich nahe gebracht, und zuletzt in einem Puncte vereinigt werden können; sie werden dabei unsichtbar, wenn die Anzahl der zusammenfallenden Wendungspuncte gerade, und sie bleiben sichtbar, wenn die Anzahl dieser Puncte ungerade ist.

Endlich bemerken wir noch, daß für alle Puncte, welche $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ geben, der Krümmungshalbmesser unendlich groß wird, und für jene Puncte, in Bezug auf welche $\frac{d^2 y}{d x^2}$ die Form $\frac{1}{0}$ erhält, der Krümmungshalbmesser verschwindet. In beiden Fällen läßt die Curve an der genannten Stelle keinen Kreis zu, dessen Berührung mit ihr zur zweiten Ordnung gehörte; sondern es kommen im ersten Falle die Berührungskreise der Curve um so näher, je größer, und im zweiten, je kleiner ihre Halbmesser werden.

Ein Rückkehrpunct oder eine Spitze heißt jener Punct, in welchem zwei gegen einander nicht concave Äste einer Curve sich endigen. Diese Äste kehren also in der Nähe ihres Vereinigungspunctes entweder ihre convexen Seiten gegen einander, in welchem Falle eine Spitze der ersten Art Statt findet (wie im Puncte N, Fig. 12), oder es ist die convexe Seite des einen Astes gegen die concave des andern gewendet, wodurch eine Spitze der zweiten Art gebildet wird (N in Fig. 13).

Zwei Äste einer Curve können sich in einem Puncte nicht endigen, ohne daselbst eine gemeinschaftliche Tangente zu besitzen. Denn man nehme die Ordinatenaxe des rechtwinkligen Coordinatensystems, auf welches man die Curve bezieht, so an, daß in der Nähe des gedachten Punctes jeder der beiden Äste von den, wenn es nöthig ist, verlängerten Ordinaten des andern geschnitten wird, so muß, wenn in der Gleichung der Curve $y = f(x)$ die an sich betrachtet offenbar vielförmige Function $f(x)$ durch gehörige Wahl der Werthe ihrer mehrdeutigen Bestandtheile auf einen dieser Äste beschränkt wird, und α die Abscisse

des Vereinigungspunctes beider Äste vorstellt, für die kleinsten Werthe von ω eine der beiden Größen $f(\alpha+\omega)$, $f(\alpha-\omega)$ reell, die andere aber imaginär ausfallen, und die reelle dieser Größen sowohl in dem gegenwärtigen Zustande, als auch, wenn man sie durch Änderung eines mehrdeutigen Bestandtheiles auf den zweiten Ast überträgt, für $\omega=0$ denselben Werth darbieten. Deßhalb kommt in dem Ausdrucke für $f(\alpha+\omega)$ nothwendig eine Wurzelgröße von der Form $\omega^{\frac{m}{n}}$ vor, worin der Bruch $\frac{m}{n}$ positiv, und unter seiner einfachsten Gestalt mit einem geraden Nenner versehen ist. Nun stimmt aber der Werth, welchen der Differenzialquotient $\frac{df(x)}{dx}$ für $x=\alpha$ erhält, offenbar mit jenem überein, welchen der Differenzialquotient $\frac{df(\alpha+\omega)}{d\omega}$ für $\omega=0$ annimmt; ferner entstehen bei dem Differenziren in Bezug auf ω aus Radikalgrößen, unter welchen ω erscheint, wieder Radikalgrößen mit derselben Wurzel, welche daher, wenn man $\omega=0$ setzt, entweder verschwinden, oder unendlich groß werden: es findet also für $\frac{df(x)}{dx}$ bei der Annahme $\omega=0$ in Bezug auf die beiden genannten Äste der Curve entweder derselbe endliche, oder ein unendlicher Werth, und demnach in beiden Fällen einerlei Tangente Statt.

Da man durch fortgesetztes Differenziren jeder mit einem positiven gebrochenen Exponenten versehenen Potenz einer veränderlichen Größe zuletzt auf Potenzen dieser Variablen kömmt, welche negative Exponenten an sich tragen, und daher bei dem Verschwinden der Grundgröße unendlich wachsen; so wird man aus den so eben vorgetragenen Bemerkungen ohne Mühe den Schluß ziehen, daß die Glieder der Reihe der Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^4y}{dx^4},\ \ldots\ldots$$

für jeden Rückkehrpunct einer ebenen Curve, von irgend einer Stelle angefangen, fortwährend unendlich große Werthe erhalten. Bestimmt man also für sämmtliche aufeinander folgende Differenzialien der Ordinate y einer gegebenen Curve die Werthe der Abscisse x, durch welche die diesen Differenzialien correspondirenden Quotienten unendlich zunehmen, so lernt man sicher alle Puncte der Curve kennen, in welchen dieselbe Spitzen haben kann.

Dieser allgemeine Satz läßt sich, was die Spitzen der ersten Art betrifft, noch darauf beschränken, daß für diese der Differenzialquotient $\frac{d^2 y}{d x^2}$ nothwendig verschwindet, oder unendlich groß erscheint. In der That, ist die Axe der y der gemeinschaftlichen Tangente beider eine Spitze der ersten Art bildender Äste einer Curve nicht parallel, so findet man in der Nähe dieser Spitze, wenn die genannte Tangente nicht zugleich die Axe der x ist, den einen Ast gegen die Axe der x concav und den anderen convex, und wenn die Abscissenaxe mit der Tangente der Spitze übereinstimmt, beide Äste gegen diese Axe convex; aber das Zeichen des in Bezug auf x genommenen Differenzials $d\,\frac{d y}{d x}$ ist dem Zeichen des Quotienten $\frac{d y}{d x}$ gleich oder davon verschieden, je nachdem sich die Curve im Puncte x, y gegen die Axe der x convex oder concav zeigt: folglich besitzt der Differenzialquotient $\frac{d^2 y}{d x^2}$ für zwei zu einerlei Abscisse gehörige, der Spitze noch so nahe liegende, Puncte stets zwei dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe. An der Spitze selbst fallen beide Werthe dieses Differenzialquotienten in einen zusammen, durch welchen, indem man auf der Curve über die Spitze hinaus fortschreitet, der Übergang des genannten Quotienten aus dem positiven Zustande in den negativen erfolgt: es verschwindet also daselbst entweder der Zähler oder der Nenner des für $\frac{d^2 y}{d x^2}$ bestehenden Ausdruckes, wodurch die ausgesprochene Behauptung gerechtfertiget ist.

Für die Spitzen der zweiten Art gilt diese Folgerung nicht, denn bei denselben findet kein Übergang von $\frac{d^2 y}{d x^2}$ aus dem positiven Zustande in den negativen Statt.

Hat die Axe der y eine zur Tangente des Punctes x, y parallele Lage, so wird, da diese Tangente auf der Axe der x senkrecht steht, $\frac{d y}{d x}$ unendlich groß. Dieser Punct kann, der Gleichung $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{0}$ ungeachtet, ein gewöhnlicher seyn (wie N in Fig. 14). Ob er es ist, oder ein Wendungspunct (Fig. 15), oder eine Spitze (Fig. 16, 17), kann durch die Betrachtung der den Abscissen $x + \Delta x$ und $x - \Delta x$ für unendlich abnehmende Werthe von Δx entsprechenden Ordinaten leicht entschieden werden.

Um daher die Spitzen der ersten Art einer Curve $y = f(x)$ zu

entdecken, wird man die Gleichungen $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ und $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{0}$ auflösen, und diejenigen Werthe von x beibehalten, welche keine Wendungspuncte oder Schlangenpuncte geben. Man wird aber durch Betrachtung der Nachbarpuncte sich versichern müssen, ob die gefundenen Absciſſen wirklich Spitzen der erstern Art gehören. Fällt $\frac{dy}{dx}$ durch dieselben nicht unendlich groß aus, so zeigen diese Absciſſen gewiß besondere Puncte an.

Die Lehre von den größten und kleinsten Werthen der Functionen einer veränderlichen Größe kann durch die Theorie der hier betrachteten besonderen Puncte der ebenen Curven sehr anschaulich gemacht werden.

Betrachtet man eine Function, wie $f(x)$, als die der Absciſſe x entsprechende Ordinate einer ebenen Curve, so wird diese Function ein Maximum oder ein Minimum, sobald die Tangente der Curve in dem durch diese Coordinaten bestimmten Puncte (N in Fig. 18) der Axe der x parallel lauft, und keine Wendung Statt findet, wozu erforderlich ist, daß $\frac{df(x)}{dx}$ verschwindet, und der erste nicht verschwindende unter den höheren Differenzialquotienten $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, ꝛc. zu einer geraden Ordnung gehört. Die Ordinate ist unter diesen Umständen im algebraischen Sinne, in welchem negative Größen, in Beziehung auf die Gesammtheit aller, um so größer sind, je weniger ihre numerischen Werthe betragen, ein Maximum, wenn die Curve auf der Seite der positiven Ordinaten gegen die Axe der Absciſſen concav (Fig. 18, a), oder auf der Seite der negativen Ordinaten gegen diese Axe convex erscheint (Fig. 18, b), und ein Minimum, wenn das Gegentheil eintritt (Fig. 18, c und d). Im ersten Falle ist der erwähnte erste nicht verschwindende Differenzialquotient negativ, und im zweiten positiv. Alle diese Ergebnisse stimmen mit den Resultaten der fünf und vierzigsten Vorlesung über die Analysis vollkommen überein.

Es kann aber auch die Function $f(x)$ durch Werthe von x in den Zustand des Maximums oder Minimums versetzt werden, für welche der Differenzialquotient $\frac{df(x)}{dx}$ unendlich groß erscheint. In diesem Falle zeigt sich an den zugehörigen Puncten der Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, stets eine Spitze der erstern Art (Fig. 16, a und b).

Ein vielfacher Punct einer Curve heißt jener, durch welchen mehrere Äste derselben hindurchgehen, sie mögen sich daselbst schneiden oder berühren.

Schneiden sich mehrere Äste einer Curve, so gehören der Curve in dem Durchschnittspuncte mehrere Tangenten, während sie in jedem der übrigen Puncte bloß eine zuläßt. Es sey nun $F(x, y) = o$ die Gleichung der Curve, und, was durch Wegschaffung der etwa vorhandenen Wurzelgrößen immer bewirkt werden kann, $F(x, y)$ eine rationale Function von x und y, so sind in dem Resultate der Differenziation dieser Gleichung, nämlich in

$$Pdx + Qdy = o,$$

P und Q ebenfalls rationale Functionen von x und y, und somit bietet der Quotient $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$ für jedes Paar zusammengehöriger Werthe von x und y bloß einen Werth dar. Setzt man statt x und y die Coordinaten eines Durchschnittspunctes mehrerer Äste der Curve, so muß $\frac{dy}{dx}$ eben so viele verschiedene Werthe annehmen, was wegen der rationalen Form des Bruches $-\frac{P}{Q}$ nur in so fern möglich ist, als derselbe in die unbestimmte Größe $\frac{o}{o}$ übergeht, oder was dasselbe heißt, als der obigen Differenzialgleichung durch diese Substitution unabhängig von dem Werthe des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ Genüge geleistet wird.

Stehen zwei Äste einer Curve in dem Puncte x, y in einer Berührung der n^{ten} Ordnung, so erhält für diesen Punct jeder der Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

bloß einen, $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ aber zwei Werthe. Durch fortgesetztes Differenziiren der Gleichung $Pdx + Qdy = o$, in so fern man dx als constant behandelt, kommt man auf eine Gleichung von der Form

$$Ndx^{n+1} + Qd^{n+1}y = o,$$

wobei Q dieselbe Function bedeutet, wie früher, und N ebenfalls eine rationale Function von x und y ist. Diese letztere Gleichung gibt für $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ den rationalen Bruch $-\frac{N}{Q}$, welcher nur in dem Falle zwei

verschiedene Größen darzustellen vermag, wenn sowohl N als Q verschwindet. Es muß also wegen der ersten Differenzialgleichung auch P gleich Null werden, folglich $\frac{dy}{dx}$ für den Berührungspunct beider Äste gleichfalls die Form $\frac{o}{o}$ annehmen.

Um daher die vielfachen Puncte einer Curve zu entdecken, bringe man ihre Gleichung auf eine rationale Gestalt, differenzire dieselbe, und setze die Coefficienten beider Differenzialien gleich Null. Die beiden hiedurch erhaltenen Gleichungen bieten, in Verbindung mit der Gleichung der Curve, die Coordinaten aller vielfachen Puncte dar. Jedoch sind nicht alle so bestimmten Puncte der Curve nothwendig vielfache. Um hierüber zu entscheiden, muß die Beschaffenheit der Curve in der Nähe des fraglichen Punctes untersucht werden, was keinen Schwierigkeiten unterliegt. Sowohl zu diesem Zwecke, als auch zur Bestimmung der Anzahl der in einem vielfachen Puncte sich begegnenden Äste ist es nützlich, auf die Anzahl der reellen Werthe zu sehen, welche der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$ in Bezug auf den fraglichen Punct erhält. Nimmt man die höheren Differenzialien der vorgelegten Gleichung, bis man auf eine Differenzialgleichung kommt, welcher durch die Coordinaten des erwähnten Punctes, nicht unabhängig von dem Werthe des Quotienten $\frac{dy}{dx}$, Genüge geleistet wird, so hat man die zur Bestimmung von $\frac{dy}{dx}$ nöthige Gleichung.

Erweitert man den Begriff eines vielfachen Punctes, indem man ihn für einen mehreren Ästen einer Curve gemeinschaftlichen Punct erklärt, so kann man auch die Rückkehrpuncte als vielfache betrachten.

Noch verdienen die sogenannten conjugirten oder zugeordneten Puncte gewisser Curven einer Erwähnung. Dieß sind isolirte, außerhalb der Äste einer Curve befindliche Puncte, deren Coordinaten der Gleichung der Curve Genüge leisten. Ist x die Abscisse eines solchen Punctes, und $y = f(x)$ die Gleichung der Curve, so müssen für die kleinsten Werthe von Δx, $f(x + \Delta x)$ und $f(x - \Delta x)$ imaginär werden. Dieß kann aber, wie die Entwickelung von $f(x + \Delta x)$ mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes zeigt, nur dann geschehen, wenn in der Reihe

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$$

sich imaginäre Glieder vorfinden. Bringt man nun die Gleichung der Curve auf die rationale Form $F(x, y) = o$, wodurch auch $\frac{dy}{dx}$ rational erscheint, so muß für die Coordinaten eines zugeordneten Punctes $\frac{dy}{dx}$ die Form $\frac{o}{o}$ erhalten.

Man findet nicht selten für die conjugirten Puncte, wenn $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ reell sind, reelle Subtangenten und reelle Krümmungshalbmesser. Die Formeln für diese Größen passen aber auf den vorliegenden Fall gar nicht, weil die Entwickelung dieser Formeln stillschweigend voraussetzt, daß $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ bei den kleinsten Werthen von Δx reell ist.

Zur Erläuterung der hier vorgetragenen Sätze mögen folgende Beispiele genügen.

Der Anfangspunct der Coordinaten für die Curven, deren allgemeine Gleichung $y = x^m$ ist, erscheint nach Beschaffenheit des ganzen oder gebrochenen rationalen Exponenten m bald als gewöhnlicher Punct, bald als Wendungspunct, bald als Spitze der ersten Art, wobei die Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ theils zugleich verschwinden, theils aber der letztere allein, oder auch beide unendlich werden. Die Curve $y = x^2 + \sqrt{x^5}$ zeigt im Anfangspuncte der Coordinaten eine Spitze der zweiten Art, ferner die Curve $y = x\sqrt{1 - x}$ einen doppelten, die Curve $y = x\sqrt{x - 1}$ hingegen einen conjugirten Punct.

Zwei und zwanzigste Vorlesung.

Über die Abwickelung ebener Curven.

Denken wir uns um eine ebene Curve einen vollkommen biegsamen und unausdehnbaren Faden gelegt, und denselben, während sein freies Ende stets nach einer die Curve berührenden geraden Linie ausgespannt erhalten wird, von der Curve entfernt; so beschreibt der Endpunct desselben eine krumme Linie, von welcher man sagt, sie sey durch **Abwickelung** oder **Evolution** der gegebenen Curve erzeugt worden, oder sie sey eine **Evolvente** dieser letzteren, die man, in Bezug auf jene, die **abgewickelte** Linie oder die **Evolute** zu nennen pflegt.

Hier bietet sich nun sogleich die Frage dar, wie man aus der gegebenen Gleichung der abgewickelten Curve die Gleichung der durch Abwickelung entstandenen finden könne.

Um diese Frage zu beantworten, seyen x, y die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punctes der unbekannten Curve, ferner ξ, v die auf die nämlichen Axen sich beziehenden Coordinaten des Punctes, in welchem das an dem ersteren sich endigende geradlinige Stück des Fadens von der gegebenen Curve ausgeht, so haben wir, weil der Punct x, y in der dem Puncte ξ, v zugehörigen Tangente der abgewickelten Curve enthalten ist:

$$(1) \qquad y - v = (x - \xi)\frac{dv}{d\xi}.$$

Bezeichnet λ die Länge des durch die genannten Puncte begrenzten Stückes des Fadens, und σ den bereits abgewickelten Bogen der gegebenen Curve, so ist, da λ und σ offenbar stets um gleiche Differenzen zunehmen, $d\sigma = d\lambda$; folglich findet man, wenn man die Gleichung (1) mit der Gleichung

$$(2) \qquad (x - \xi)^2 + (y - v)^2 = \lambda^2$$

verbindet, die zwei Gleichungen

$$x - \xi = \pm\frac{\lambda\, d\xi}{d\lambda}, \quad y - v = \pm\frac{\lambda\, dv}{d\lambda},$$

aus welchen man, nachdem man mittelst der Gleichung der abgewickel-

ten Curve v und λ durch ξ ausgedrückt hat, nur ξ wegzuschaffen braucht, um die Gleichung der Evolvente zu haben. Welches der beiden Zeichen $\pm$ beizubehalten ist, muß durch Erwägung der Zeichen der Differenzen $x - \xi$, $y - v$ entschieden werden. Die Betrachtung der Figur lehrt, daß $x - \xi$ und $y - v$ negativ sind, wenn ξ, v, λ zugleich wachsen; daher haben wir

$$(3) \qquad x = \xi - \frac{\lambda d\xi}{d\lambda}, \quad y = v - \frac{\lambda dv}{d\lambda}.$$

Was die Größe λ betrifft, so ergibt sich aus $d\lambda = d\sigma$ im Allgemeinen

$$\lambda = \sigma + Const.$$

Die Constante richtet sich nach der Länge des geradlinigen Fadenstückes an der Stelle, wo die Abwickelung beginnt, oder wo $\sigma = 0$ ist. Durch Veränderung dieser Constante lassen sich zu jeder gegebenen Curve unzählige Evolventen darstellen.

Wie man sieht, geht die hier vorgetragene Auflösung der vorgelegten Aufgabe nur bei solchen Evoluten an, deren Rectification man in seiner Gewalt hat.

Eine, nebst anderen vorzüglichen Eigenschaften, besonders ihrer Abwickelung wegen merkwürdige Curve ist die sogenannte **Cykloide** oder Radlinie. Sie wird durch jeden Punct des Umfanges eines auf einer geraden Linie sich fortwälzenden Kreises beschrieben. Ein Kreis wälzt sich aber auf einer geraden Linie, wenn alle Puncte der Peripherie desselben nach und nach mit der geraden Linie so in Berührung kommen, daß die Länge jedes Bogens dem Stücke der Geraden gleich ist, mit dessen Endpuncten die Endpuncte des Bogens zusammenfielen.

Aus dieser Erklärung erhellet, daß die Cykloide aus unendlich vielen einander gleichen Bögen besteht, welche mit der geradlinigen Bahn des Erzeugungskreises in Puncten zusammentreffen, deren jeder von seinem Nachbar um die Länge der Peripherie dieses Kreises entfernt ist.

Wenn der die Cykloide beschreibende Punct O (Fig. 19) seine größte Entfernung von der Geraden AB, auf welcher sich der Kreis wälzt, erlangt hat, so steht der durch ihn gehende Durchmesser OC auf dieser Geraden senkrecht. Die Curve ist auf beiden Seiten der OC gleich gestaltet. Man nennt daher diese Gerade eine **Axe**, und den Punct O einen **Scheitel** der Cykloide.

Es seyen OP $= x$ und MP $= y$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes M der Cykloide, in so fern die Axe OC als Abscissenaxe, und der Scheitel O als Anfangspunct derselben betrachtet wird; ferner sey a der Halbmesser des Erzeugungskreises, so haben wir, wenn wir diesen Kreis in die Position GMH versetzen, in welcher sich der Punct O in M befand, den Bogen

MG oder NC = der Geraden AG,

folglich durch Subtraction desselben von der mit der halben Peripherie ONC gleichlangen AC,

GC oder MN = dem Bogen ON $= a\, Arc. cos. \frac{a-x}{a}$.

Nun ist auch $NP = \sqrt{OP \,.\, PC} = \sqrt{2ax - x^2}$; folglich, da MN und NP zusammengenommen die Ordinate MP ausmachen;

$$y = \sqrt{2ax - x^2} + a\, Arc. cos. \frac{a-x}{a};$$

und dieß ist die Gleichung der Cykloide.

Sie gibt uns

$$dy = dx \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

und $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{\frac{2a}{x}}$,

also $s = \sqrt{2a} \,.\, \int dx \,.\, x^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2ax} + Const.$

Lassen wir das Integral für $x = o$ anfangen, so wird $Const. = o$, und wir haben

$$s = 2\sqrt{2ax}.$$

Stellt s den Bogen OM vor, so ist $\sqrt{2ax}$ der Ausdruck für die Sehne ON des Erzeugungskreises; daher ist der genannte Bogen doppelt so lang, als diese Sehne.

Legen wir nun um den Bogen AO der Cykloide einen Faden, und untersuchen wir die Beschaffenheit der von dem Puncte O desselben bei der Abwickelung beschriebenen Curve.

In diesem Falle ist, wenn wir die in den obigen Formeln gebrauchten Bezeichnungen annehmen:

$$v = \sqrt{2a\xi - \xi^2} + a\, Arc. cos. \frac{a-\xi}{a}, \quad dv = d\xi \sqrt{\frac{2a-\xi}{\xi}},$$

$$\lambda = 2\sqrt{2a\xi}, \quad d\lambda = d\xi \sqrt{\frac{2a}{\xi}};$$

also vermöge den Formeln (3):

$$x = -\xi,$$
$$y = v - 2\sqrt{2a\xi - \xi^2},$$

oder

$$y = -\sqrt{2a\xi - \xi^2} + a\,Arc.\,cos.\,\frac{a-\xi}{a}$$
$$= -\sqrt{-2ax - x^2} + a\,Arc.\,cos.\,\frac{a+x}{a}.$$

Setzen wir in dieser letzteren Gleichung

$$-x = 2a - x', \quad y = \pi a - y',$$

so erhalten wir

$$\pi a - y' = -\sqrt{2ax' - x'^2} + a\,Arc.\,cos.\,\frac{x'-a}{a};$$

also wegen $\pi - Arc.\,cos.\,\frac{x'-a}{a} = Arc.\,cos.\,\frac{a-x'}{a}$

$$y' = \sqrt{2ax' - x'^2} + a\,Arc.\,cos.\,\frac{a-x'}{a}.$$

Da diese Gleichung mit jener, von welcher wir ausgingen, der Form nach genau übereinstimmt, so entsteht durch die bei dem Scheitel beginnende Abwickelung einer Cykloide wieder eine ihr gleiche Cykloide, deren Scheitel in Bezug auf die Axe der ersteren die Coordinaten $-2a$ und πa gehören.

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (3) mit $d\xi$, die zweite mit dv, und addirt man die Producte, so ergibt sich wegen $d\xi^2 + dv^2 = d\lambda^2$

$$(x - \xi)\,d\xi + (y - v)\,dv = -\lambda d\lambda.$$

Aus der Gleichung (2) folgt aber

$$(x - \xi)(dx - d\xi) + (y - v)(dy - dv) = \lambda d\lambda,$$

daher hat man, wenn man die beiden letzteren Gleichungen addirt.

$$(x - \xi)\,dx + (y - v)\,dy = 0$$

$$\text{oder} \quad v - y = -(\xi - x)\,\frac{dx}{dy}.$$

Diese Gleichung gibt zu erkennen, daß der Punct ξ, v in der zum Puncte x, y gehörenden Normallinie der durch Abwickelung hervorgebrachten Curve sich befindet, welche Eigenschaft auch durch die Gleichung $\frac{dy}{dx} = -\frac{d\xi}{dv}$ ausgedrückt wird.

Differenzirt man nun die Gleichung $x - \xi + (y - v)\frac{dy}{dx} = 0$, so erhält man

$$dx - d\xi + (dy - dv)\frac{dy}{dx} + (y - v)\, d\frac{dy}{dx} = 0,$$

welche Gleichung sich wegen $d\xi + dv\frac{dy}{dx} = 0$ auf

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dx} + (y - v)\, d\frac{dy}{dx} = 0$$

reducirt. Mittelst der gegenwärtig vorhandenen Gleichungen wird man in den Stand gesetzt, $y - v$, folglich auch $x - \xi$ und λ bloß durch Differenzialien der Größen x und y darzustellen. Aber diese Gleichungen stimmen mit den Gleichungen (1), (2), (4) der fünfzehnten Vorlesung genau überein; daher sind ξ und v nothwendig die Coordinaten des dem Puncte x, y entsprechenden Krümmungsmittelpunctes der Evolvente, und λ ist der dadurch bedingte Krümmungshalbmesser.

Die Evolute einer jeden Curve enthält demnach die Mittelpuncte sämmtlicher mit dieser Curve in einer Berührung der zweiten Ordnung befindlichen Kreise in sich, oder, wie man sich kurz auszudrücken pflegt, die Evolute ist der g e o m e t r i s c h e O r t der Krümmungsmittelpuncte der Evolvente.

Die Bestimmung der Curve, durch deren Abwickelung eine vorgeschriebene Curve entsteht, wird, wie aus dem Gesagten erhellet, vollzogen, wenn man aus den Gleichungen

$$(4) \qquad \xi = x - \frac{ds^2\, dy}{dx\, d^2y}, \quad v = y + \frac{ds^2}{d^2y}$$

(fünfzehnte Vorlesung (6)) und aus der zwischen x und y gegebenen Gleichung der Evolvente diese Coordinaten wegschafft. Die dadurch zwischen ξ und v sich ergebende Gleichung gehört der Evolute. Es ist daher die Bestimmung der Evolute aus der Evolvente eine leichtere Aufgabe als die umgekehrte, da erstere unabhängig von aller Integration aufgelöst werden kann.

Man kann sich der Formeln (4) auch bedienen, um aus der Gleichung der Evolute jene der Evolvente abzuleiten. Man substituire nämlich diese Ausdrücke für ξ und v in der zwischen den letztgenannten Coordinaten gegebenen Gleichung der Evolute, so hat man eine Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zwischen x und y, deren Integration auf die Gleichung der Evolvente führt. Hiebei dringt sich uns sogleich die Bemerkung auf, daß das allgemeine Integral dieser Diffe-

renzialgleichung zwei unbestimmte Constanten enthalten wird, während doch die Natur der vorgelegten Aufgabe nur eine solche Constante zuläßt, deren Werth sich nach der Länge des geradlinigen Stückes des Fadens bei dem Anfange der Abwickelung richtet. Folgende Betrachtungen werden diese Schwierigkeit lösen.

Es sey

(5) $$f(\xi, v) = 0$$

die gegebene Gleichung der Evolute, also

(6) $$f\left(x - \frac{ds^2\, dy}{dx\, d^2y},\; y + \frac{ds^2}{d^2y}\right) = 0$$

die Differenzialgleichung der Evolvente. Diese letztere erhält durch Differenziation eine Form, unter welcher ihre vollständige Integration sich auf eine leichte Art zu Stande bringen läßt. Stellen wir nämlich das Differenzial der Gleichung (5) durch

$$P d\xi + Q dv = 0$$

vor, so haben wir, wegen

$$d\xi = dx - \frac{dy}{dx}\, d\frac{ds^2}{d^2y} - \frac{ds^2}{dx} = -\frac{dy^2}{dx} - \frac{dy}{dx}\, d\frac{ds^2}{d^2y}$$
$$= -\frac{dy}{dx}\left(dy + d\frac{ds^2}{d^2y}\right)$$

und $dv = dy + d\frac{ds^2}{d^2y}$

(7) $$(Q dx - P dy)\left(dy + d\frac{ds^2}{d^2y}\right) = 0$$

als das Resultat der Differenziation der Gleichung (6), welches in die zwei Gleichungen

(8) $$dy + d\frac{ds^2}{d^2y} = 0$$

(9) $$Q dx - P dy = 0$$

zerfällt. Aus der Gleichung (8) folgt durch Integration

(10) $$y + \frac{ds^2}{d^2y} = A$$

$$\text{oder } (y - A)\, d^2y + ds^2 = 0,$$

wobei A eine Constante bedeutet. Um diese Gleichung weiter zu behandeln, sey der in der fünf und fünfzigsten Vorlesung über die Analysis ertheilten Anleitung gemäß $dy = p\,dx$; also, da hier durchgehends dx als constant behandelt wurde, $d^2y = dp\,dx$ und

$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (1 + p^2)\, dx^2$, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$(y - A)\, dp + (1 + p^2)\, dx = 0;$$

oder, wenn man dieselbe mit $\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$ multiplicirt, in

$$(y - A) \frac{p\, dp}{\sqrt{1 + p^2}} + dy \sqrt{1 + p^2} = 0,$$

d. h. in $d\,.\,(y - A)\sqrt{1 + p^2} = 0$,

woraus sich $(y - A)\sqrt{1 + p^2} = B$

also $p = \frac{\sqrt{B^2 - (y - A)^2}}{y - A}$ und $dx = \frac{(y - A)\, dy}{\sqrt{B^2 - (y - A)^2}}$

ergibt, wobei B eine zweite Constante anzeigt. Integrirt man die letztere Gleichung abermals, so findet man

$$x = \sqrt{B^2 - (y - A)^2} + C$$

oder

(11) $$(x - C)^2 + (y - A)^2 = B^2,$$

wobei C eine dritte Constante ist. Diese Gleichung ist nun das allgemeine Integral der Gleichung (6); allein, da in demselben drei Constanten erscheinen, während die Natur der Integration einer solchen Differenzialgleichung bloß zwei unbestimmte Constanten erheischt, so müssen diese Constanten durch eine Bedingungsgleichung mit einander verknüpft seyn. Dieß ist in der That der Fall; denn aus der Gleichung (11) folgt

$$(x - C)\, dx + (y - A)\, dy = 0,$$

welche Gleichung mit Rücksicht auf (10) in

(12) $$x - C - \frac{ds^2\, dy}{dx\, d^2y} = 0 \quad \text{oder} \quad C = x - \frac{ds^2\, dy}{dx\, d^2y}$$

übergeht. Verbindet man (12) und (10) mit (6), so hat man

$$f(C, A) = 0.$$

Es stellt also die Gleichung (11) einen Kreis dar, dessen Mittelpunct auf der gegebenen Curve (5) sich befindet, und dieser genügt der Differenzialgleichung (6) als allgemeines Integral.

Aber offenbar haben wir auf diesem Wege die Auflösung der vorgelegten Aufgabe nicht erhalten; wir müssen uns daher dieserwegen zur Gleichung (9) wenden. In dieser Gleichung sind P und Q zunächst

Functionen von ξ und v, also vermöge der Formeln (4) Functionen von x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$. Eliminirt man nun aus der Gleichung (9) mittelst der Gleichung (6) den Differenzialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, so ergibt sich eine Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$ ohne willkürliche Constante, welche zwar als ein erstes Integral von (6) zu betrachten ist, aber jedoch nur eine besondere Auflösung dieser Differenzialgleichung darbietet. Die weitere Integration dieser besonderen Auflösung führt auf eine mit einer willkürlichen Constante versehene endliche Gleichung zwischen x und y, welche der Evolvente gehört.

Um über die Bestimmung der Evolute einer Curve einen besonderen Fall vor Augen zu legen, betrachten wir die Curve, durch deren Abwickelung die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ entsteht.

Wir haben hier

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}{a^2 y},$$

folglich den Formeln (4) gemäß

$$\xi = x\left[1 - \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^4 b^2}\right] = \frac{(a^2 - b^2)\, x^3}{a^4},$$

$$v = y\left[1 - \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^2 b^4}\right] = -\frac{(a^2 - b^2)\, y^3}{b^4}$$

und

$$a^{\frac{1}{3}}\,\xi^{\frac{1}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{x}{a}, \quad b^{\frac{1}{3}}\,v^{\frac{1}{3}} = -(a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{y}{b};$$

also mit Rücksicht auf die Gleichung der Ellipse:

$$a^{\frac{2}{3}}\,\xi^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\,v^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}},$$

welches die Gleichung der Evolute der Ellipse ist.

Noch verdient die Evolute der logarithmischen Spirale eine Erwähnung. Die Gleichung dieser Spirale, in Bezug auf ein Polarcoordinatensystem, ist, wie bereits in der zwanzigsten Vorlesung gesagt wurde, $\eta = a\,l\,r$, wobei r den Radiusvector irgend eines Punctes derselben, und η seine Neigung gegen die Polarare anzeigt, aus welcher $d\eta = \frac{a\,dr}{r}$ und $ds = dr\sqrt{1 + a^2}$ erhalten wird. Mittelst dieser Werthe finden wir den zum Puncte r, η gehörenden

Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{r\,dr}{d \,.\, \frac{r^2\,d\eta}{ds}} = \frac{r\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

Aber a ist die Tangente, daher $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ der Sinus des Winkels, welchen die zu dem Puncte r, η gezogene Berührungslinie mit dem Radiusvector, oder ein auf diesen Radiusvector errichtetes Perpendikel mit der Normale des genannten Punctes bildet; geht daher das erwähnte Perpendikel durch den Pol, so trifft es die Normale genau im Krümmungsmittelpuncte, und schneidet, wenn man es als Radiusvector der Evolute der vorgelegten Spirale betrachtet, die ihm entsprechende Berührungslinie dieser Evolute stets unter dem Winkel, dessen Tangente a ist; woraus erhellet, daß einer logarithmischen Spirale sie selbst, nur in anderer Lage, als Evolute zugehört.

Drei und zwanzigste Vorlesung.

Über die Trajectorien und Einhüllungslinien ebener Curven.

Den Namen Trajectorie führt jede Linie, welche alle unter einer gemeinschaftlichen Gleichung begriffenen Linien nach einem vorgeschriebenen Gesetze durchschneidet.

Es sey nämlich

(1) $$f(x, y, a) = 0$$

die Gleichung irgend einer auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Curve, worin eine unbestimmte Constante a entweder unmittelbar, oder mittelbar, d. i. dadurch erscheint, daß man andere darin vorkommende beständige Größen als gegebene Functionen von a ansieht. Ertheilt man nun der Constante a stufenweise alle Werthe, deren sie fähig ist, so bietet die Gleichung (1) ein System gleichartiger Curven dar, welche, wenn es sich um die Ausmittelung einer Trajectorie handelt, durch eine Linie so geschnitten werden sollen, daß die Coordinaten jedes einzelnen Durchschnittspunctes einer durch die Beschaffenheit der vorgelegten Aufgabe festgesetzten Bedingungsgleichung Genüge leisten.

Alle in dieser Bedingungsgleichung enthaltenen, von den Coordinaten x, y eines solchen Durchschnittspunctes abhängenden, und auf die in diesem Puncte von der Trajectorie getroffene Curve sich beziehenden Größen lassen sich mit Hülfe der Gleichung (1) durch x, y, und a ausdrücken; man kann daher die erwähnte Bedingungsgleichung in jedem einzelnen Falle stets auf die Form

(2) $$\varphi\left(x, y, a, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0$$

bringen, in welcher die Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ durch die bis jetzt noch unbekannte Gleichung der Trajectorie bestimmt gedacht werden.

Nun stehen zur Auffindung der letztgenannten Gleichung zwei Wege offen, aus welchen man nach Beschaffenheit der Umstände den bequemeren wählen kann.

Der eine gründet sich auf die Bemerkung, daß die beiden Gleichungen (1) und (2), wenn in der letzteren alle von der Natur der Trajectorie abhängenden Größen durch x, y dargestellt wären, für jedes einzelne a die Coordinaten des Punctes angeben würden, in welchem die Trajectorie der diesem Werthe des a entsprechenden, der Gleichung (1) unterworfenen, Curve begegnet. Leitet man daher aus den Gleichungen (1) und (2) nach den bekannten Eliminations-Methoden eine dritte Gleichung ab, in welcher a nicht vorhanden ist, so gehört dieselbe allen Durchschnittspuncten der Trajectorie mit den erwähnten Curven zugleich, d. h. sie ist die Gleichung der Trajectorie selbst, welche man jedoch, falls sie eine Differenzialgleichung ist, noch zu integriren hat.

Der andere Weg besteht darin, daß man die Gleichung (1), in so fern man a als eine veränderliche, von x abhängende Größe betrachtet, für die Gleichung der Trajectorie ansieht, und aus derselben die Werthe der in (2) vorkommenden Größen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... durch x, a und $\frac{da}{dx}$, $\frac{d^2a}{dx^2}$, ... ausdrückt, wodurch man eine Differenzialgleichung zwischen a und x erhält, deren Integration auf eine endliche Gleichung zwischen x und a führt, welche die Gleichung (1), nach verrichteter Elimination von a, in die verlangte Gleichung der Trajectorie umstaltet.

Es sey z. B. eine Curve zu finden, welche alle durch die Gleichung (1) vorgestellten Linien unter einem gegebenen Winkel schneidet.

Der Winkel, unter welchem sich zwei Curven begegnen, stimmt mit dem Winkel überein, welchen die zu ihrem Durchschnittspuncte gezogenen Berührenden mit einander darstellen, und dieser letztere Winkel ist immer dem Unterschiede der Winkel gleich, unter welchen diese Berührenden gegen die Richtung der positiven Abscissen geneigt sind.

Nennen wir nun, wie oben, die Coordinaten des Durchschnittspunctes der Trajectorie mit einer der Curven, x und y; umgeben wir ferner das Zeichen des Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, wenn derselbe auf die geschnittene Curve sich bezieht, mit Klammern, um ihn dadurch von dem der Trajectorie zugehörigen Differenzialquotienten zu unterscheiden; bezeichnen wir endlich die trigonometrische Tangente des unveränderlichen Winkels zwischen der Trajectorie und jeder der von ihr durchschnittenen Curven mit c, so haben wir die Bedingungsgleichung

$$(3)^* \qquad \frac{\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}} = c$$

oder

$$(4) \quad \left[c + \left(\frac{dy}{dx}\right)\right] dx + \left[c\left(\frac{dy}{dx}\right) - 1\right] dy = 0.$$

Differenziren wir die Gleichung (1), und schaffen wir mittelst eben derselben aus dem gefundenen Differenzial die Constante a weg, so erhalten wir $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ bloß durch x und y ausgedrückt, wodurch sich die Gleichung (4) sogleich in die Differenzialgleichung der Trajectorie verwandelt. Hält man es aber für zweckmäßiger, zuerst eine Gleichung zwischen a und einer der Größen x, y darzustellen, so muß man $\frac{dy}{dx}$ aus (1) ableiten, indem man a als eine veränderliche Größe behandelt.

Um beide Methoden an einem besonderen Falle anschaulich zu machen, suchen wir die Gleichung der Curve, welche alle in einem Puncte sich durchkreuzenden geraden Linien unter dem Winkel, dessen Tangente c ist, schneidet.

Nehmen wir den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct dieser Geraden zum Anfangspuncte der Coordinaten, so ist ihre Gleichung

$$y = ax.$$

Diese gibt uns $\left(\frac{dy}{dx}\right) = a = \frac{y}{x}$, wodurch wir mittelst (4) die Differenzialgleichung

$$\left(c + \frac{y}{x}\right) dx + \left(\frac{cy}{x} - 1\right) dy = 0$$

oder $(cx + y)\, dx + (cy - x)\, dy = 0$ erhalten.

Da dieß eine homogene, nicht unmittelbar integrable Differenzialgleichung ist, so gehört ihr, wie in der vier und fünfzigsten Vorlesung über die Analysis gezeigt worden ist, der integrirende Factor $\frac{1}{c(x^2 + y^2)}$ oder auch $\frac{1}{x^2 + y^2}$, und man findet nach der Formel (100) der drei und fünfzigsten Vorlesung über die Analysis die Integralgleichung

$$c\, l\sqrt{x^2 + y^2} + Arc.\, tg. \frac{x}{y} = Const.,$$

welche mit folgender

$$c\,l\sqrt{x^2+y^2} = Arc.\,tg.\,\frac{y}{x} + Const.$$

einerlei ist. Transformirt man die rechtwinkligen Coordinaten in Polarcoordinaten, indem man $x = r\,cos.(\eta - Const.)$, $y = r\,sin.(\eta - Const.)$, also $Arc.\,tg.\,\frac{y}{x} + Const. = \eta$ und $x^2 + y^2 = r^2$ setzt, so hat man die Gleichung

$$\eta = c\,l\,r,$$

welche einer logarithmischen Spirale gehört. In der That besitzt diese Curve die Eigenschaft, sämmtliche von ihrem Pole ausgehende Radienvectoren unter demselben Winkel zu schneiden, wie in der zwanzigsten Vorlesung gezeigt worden ist.

Nimmt man aber in der obigen Rechnung $\left(\frac{dy}{dx}\right) = a$ und $\frac{dy}{dx} = a\,dx + x\,da$, so erhält man die Differenzialgleichung

$$c\,(a^2+1)\,dx + (c\,a - 1)\,x\,da = 0$$

$$\text{oder}\quad \frac{c\,dx}{x} + \frac{(c\,a - 1)\,da}{a^2+1} = 0,$$

deren Integral

$$c\,l\,x\sqrt{a^2+1} - Arc.\,tg.\,a = Const.$$

ist, welches, nach der Substitution von $\frac{y}{x}$ statt a, ebenfalls auf die Gleichung

$$c\,l\sqrt{x^2+y^2} = Arc.\,tg.\,\frac{y}{x} + Const.$$

führt.

Soll die Trajectorie alle an die Gleichung (1) gebundenen Linien unter einem rechten Winkel treffen, d. h. soll sie, wie man zu sagen pflegt, eine orthogonale Trajectorie seyn, so hat man statt (3) die Bedingungsgleichung

$$(5)\qquad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} = 0,$$

auf welche die oben gegebenen Methoden anzuwenden sind.

So wird die orthogonale Trajectorie aller mit derselben Hauptaxe und demselben Scheitel versehenen Parabeln $y^2 = a\,x$ wegen $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a}{2y} = \frac{y}{2x}$ durch die Differenzialgleichung $2x\,dx + y\,dy = 0$ ausgedrückt, deren Integral $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = Const.$ jede Ellipse, deren Mittelpunct und kleinere Hauptaxe in den Scheitel und in die Hauptaxe

der Parabeln fällt, und deren kleinere Hauptaxe zur größeren sich wie die Kathete eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes zur Hypotenuse verhält, für die verlangte Trajectorie erklärt.

Man kann die Evolvente einer Curve als die orthogonale Trajectorie der zu dieser Curve geführten Tangenten betrachten, und dem zu Folge die Gleichung der Evolvente aus jener der Evolute auch nach der hier vorgetragenen Methode ableiten.

Besteht die Bedingung, welcher die Trajectorie der gegebenen Curven Genüge leisten soll, darin, daß das für einen bestimmten Werth von x verschwindende und bis zur Abscisse des Durchschnittspunctes ausgedehnte Integral

$$\int \varphi (x, a)\, dx$$

für alle geschnittenen Curven einerlei Werth A annimmt, so muß man, wenn man, mit Rücksicht auf die vorgeschriebenen Grenzen, $\int \varphi (x, a) = \Phi (x, a)$, $\frac{d\varphi (x, a)}{da} = \psi (x, a)$ und $\int \psi (x, a)\, dx = \Psi (x, a)$ setzt, eine der Gleichungen

$$(6) \qquad \Phi (x, a) = A$$

oder

$$(7) \qquad \varphi (x, a)\, dx + \Psi (x, a)\, da = 0$$

mit (1) verbinden. Zu der Gleichung (7) gelangt man, wenn man die Gleichung (6), mit Rücksicht auf die in der drei und fünfzigsten Vorlesung über die Analysis gegebene Formel (102), in so fern man sowohl x als auch a als veränderliche Größen behandelt, differenzirt.

Unter der Einhüllungslinie eines Systems gleichartiger Curven verstehen wir eine Linie, welche alle diese Curven zugleich berührt.

Es sey die Gleichung der Einhüllungslinie für alle ebenen Curven zu finden, welche unter der oben betrachteten Gleichung

$$(1) \quad f(x, y, a) = 0$$

enthalten sind, vorausgesetzt, daß der Übergang einer dieser Curven in die andere durch Änderung des Werthes der Constante a erfolgt.

In Bezug auf den Punct, in welchem die Einhüllungslinie eine der erwähnten Curven berührt, müssen nicht nur allein die Werthe von x und y, sondern auch jene des Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ für die einhüllende und eingehüllte Linie übereinstimmen, d. h. es muß die Glei-

chung (1) nebst ihrem Differenzial

(8) $$P dx + Q dy = 0,$$

sobald man der Größe a sowohl in (1) als auch in den Functionen P und Q den gehörigen Werth beilegt, auf die Einhüllungslinie übertragen werden können. Eliminirt man daher aus (1) und (8) die Constante a, so leidet die dadurch entstehende Gleichung

(9) $$\mathfrak{P} dx + \mathfrak{Q} dy = 0,$$

in der $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ von a frei sind, auf alle Puncte der Einhüllungslinie Anwendung, und ist demnach die Differenzialgleichung dieser Linie. Integrirt man aber dieselbe, so erhält man, der bekannten Theorie der Differenzialgleichungen gemäß, die Gleichung (1) zu ihrem allgemeinen Integrale, in welcher a die durch die Integration hinzugekommene unbestimmte Constante vorstellt. Es kann also die endliche Gleichung der Einhüllungslinie nur eine besondere Auflösung der Differenzialgleichung (9) seyn.

Um dieß in ein helleres Licht zu setzen, denken wir uns aus der Gleichung (8) a gesucht, wodurch sich dafür ein Ausdruck von der Form

(10) $$a = \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

ergibt, und substituiren wir denselben in (1), so haben wir die Differenzialgleichung

(11) $$f\left[x, y, \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right] = 0,$$

wofür wir, der Kürze wegen, $f(x, y, \psi) = 0$ schreiben wollen, welche Gleichung mit (9) nothwendig einerlei ist. Differenziren wir diese Gleichung abermal, so erhalten wir, wie man leicht sieht,

$$\mathfrak{P} dx + \mathfrak{Q} dy + \frac{df}{d\psi} \cdot d\psi = 0,$$

welche Gleichung sich wegen (9) auf

(12) $$\frac{df}{d\psi} d\psi = 0$$

reducirt. Dieß ist eine Differenzialgleichung der zweiten Ordnung; derselben wird Genüge geleistet, wenn man entweder

$$d\psi = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{df}{d\psi} = 0$$

seyn läßt. Die erstere Gleichung gibt nach verrichteter Integration $\psi = a$, wobei a eine willkürliche Constante ist; man kömmt also wieder auf die Gleichung (10) zurück, welche deßhalb ein erstes Integral der

Differenzialgleichung (12) darstellt. Aber die Gleichung (11) ist der Natur der hier angestellten Rechnung gemäß auch ein erstes Integral derselben Differenzialgleichung; man findet daher das letzte Integral, wenn man aus (11) mittelst (10) den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, oder, da dieser bloß in der Function ψ erscheint, diese Function wegschafft, wodurch man wieder die Gleichung (1) vor sich hat.

Man kann daher die Gleichung der verlangten Einhüllungslinie nur durch Behandlung der Gleichung $\frac{df}{d\psi} = 0$ erwarten. Dieß ist bereits eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung; eliminirt man mittelst derselben aus (11) den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, so gelangt man zu der Gleichung der Einhüllungslinie. Aber diese Elimination verrichten heißt offenbar eben so viel, als aus $f(x, y, a) = 0$ und $\frac{df(x, y, a)}{da} = 0$ die Größe a wegschaffen; daher wird man, wie aus der sechs und fünfzigsten Vorlesung über die Analysis erhellet, auf die besondere Auflösung der Differenzialgleichung (9) geführt.

In der That fordert die Beschaffenheit der Einhüllungslinie, daß, wenn die Gleichung (1) auf sie angewendet wird, a als eine variable Größe der Differenziation unterliege, wodurch sich, mit Rücksicht auf (9), die Gleichung $\frac{df(x, y, a)}{da} = 0$ darbietet.

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man die Einhüllungslinie als die Grenze ansieht, welcher sich der Inbegriff aller zwischen den Durchschnittspuncten je zweier auf einander folgenden eingehüllten Curven liegender Bogen ohne Ende nähert, während die Intervalle, in welchen diese Curven an einander gereiht sind, ohne Ende abnehmen. In so fern man in einem solchen Durchschnittspuncte von einer Curve auf die nächste übergeht, ändert sich bloß a, nicht aber x und y, weßhalb die Gleichung $\frac{df(x, y, a)}{da} = 0$ für jeden einzelnen Werth von a nur den Berührungspuncten der Einhüllungscurve mit einer der eingehüllten Curven zukömmt.

Sucht man aus der Gleichung (9) den Werth des Differenzialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, so gehören demselben für die Einhüllungscurve und die von ihr berührte eingehüllte verschiedene Werthe; dieser Quotient

nimmt daher in Bezug auf die Einhüllungscurve die Form $\frac{0}{0}$ an, was der Lehre von den besonderen Auflösungen der Differenzialgleichungen gemäß ist.

Als Beispiel der hier vorgetragenen Theorie diene die Bestimmung der Curve, welche von einer der Länge nach unveränderlichen Geraden, deren Enden sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen, in allen Lagen berührt wird.

Nimmt man die Schenkel des rechten Winkels für die Axen der Coordinaten an, und bezeichnet man die Länge der Geraden durch A, und den Winkel, unter welchem sie in einer bestimmten Lage gegen die Axe der x geneigt ist, durch a, so ist ihre Gleichung

$$y = (A \cos. a - x)\, tg.\, a = A \sin. a - x\, tg.\, a.$$

Differenzirt man diese Gleichung bloß in Bezug auf a, so erhält man

$$A \cos. a - \frac{x}{\cos. a^2} = 0, \text{ folglich } \cos. a = \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$\text{und } y = A\left(1 - \frac{x}{A \cos. a}\right) \sin. a = A\left[1 - \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}},$$

$$\text{folglich } \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \text{ oder } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}},$$

welches die Gleichung der verlangten Curve ist. Sie hat Ähnlichkeit mit der Gleichung der Evolute der Ellipse, mit welcher die so eben betrachtete Curve in einer leicht zu entdeckenden Beziehung steht.

Befinden sich in der allgemeinen Gleichung einer Folge von Curven zwei von einander unabhängige Constanten, so kann man, während die eine, um dieses System von Curven zu erzeugen, alle Werthe, deren sie fähig ist, erhält, die andere so wählen, daß die Einhüllungslinie sämmtlicher Curven mit denselben in einer Berührung der zweiten Ordnung steht.

Ist

$$(13) \qquad f(x, y, a, b) = 0$$

die allgemeine Gleichung der eingehüllten Curven, so wird die Gleichung der Einhüllungslinie durch Integration der besonderen Auflösung einer Differenzialgleichung der zweiten Ordnung gefunden, welche Differenzialgleichung entsteht, wenn man aus der Gleichung (13) und aus dem ersten und zweiten Differenzial derselben die Constanten a, b weg-

schafft. Diese besondere Auflösung kann entweder durch den Umstand gefunden werden, daß für sie der aus der Differenzialgleichung der zweiten Ordnung abgeleitete Quotient $\frac{d^3 y}{d x^3}$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, oder auch, sie ist, wie sich auf dem oben betretenen Wege zeigen läßt, das Resultat der Elimination von a, b und $\frac{d b}{d a}$ aus (13) und aus den Gleichungen

$$(14) \qquad \frac{d f}{d x} d x + \frac{d f}{d y} d y = 0,$$

$$\frac{d f}{d a} d a + \frac{d f}{d b} d b = 0,$$

$$\left(\frac{d^2 f}{d x\, d a} d x + \frac{d^2 f}{d y\, d a} d y\right) d a + \left(\frac{d^2 f}{d x\, d b} d x + \frac{d^2 f}{d y\, d b} d y\right) d b = 0;$$

welche sich ergeben, wenn man sowohl die Gleichung (13) als auch ihr gewöhnliches Differenzial in Bezug auf a und b differenzirt. Als Beleg zu dem Gesagten dient die am Ende der vorhergehenden Vorlesung vorgenommene Bestimmung der Evolvente einer Curve. Diese ist nämlich die Einhüllungslinie aller Kreise, deren Mittelpuncte auf der Evolute liegen, und welche mit dieser Einhüllungslinie in einer Berührung der zweiten Ordnung sich befinden.

Vier und zwanzigste Vorlesung.

Über die cylindrischen, konischen und Rotations-Flächen.

Unter einer *cylindrischen Fläche* versteht man im Allgemeinen jede Fläche, welche von allen ihr begegnenden, einer bestimmten geraden Linie parallelen Ebenen in geraden Linien, welche der ersteren parallel sind, geschnitten wird. Eine solche Fläche wird daher durch die Bewegung einer geraden Linie beschrieben, welche einer gegebenen fixen Geraden stets parallel bleibt. Soll einer cylindrischen Fläche ein bestimmtes Bildungsgesetz zum Grunde liegen, so muß sich durch alle auf derselben möglichen geraden Linien irgend eine, an ein bestimmtes Gesetz gebundene, Curve führen lassen; oder was dasselbe ist, es muß die diese Fläche beschreibende Gerade einer Curve folgen, deren Gleichungen angegeben werden können.

Hier bietet sich nun die Aufgabe dar, die Gleichung einer cylindrischen Fläche mit Hülfe der Gleichungen

(1) $$x = az, \quad y = bz$$

einer durch den Anfangspunct der Coordinaten gezogenen Geraden, welcher die diese Fläche beschreibende Gerade stets parallel seyn soll, und der Gleichungen

(2) $$F(x, y, z) = o, \quad f(x, y, z) = o$$

der Curve, durch welche die bewegliche Gerade in jeder ihrer Lagen hindurchgeht, darzustellen.

Um diese Aufgabe aufzulösen, bezeichnen wir durch x, y, z die Coordinaten irgend eines Punctes der cylindrischen Fläche, und durch x', y', z' die Coordinaten des Punctes, in welchem die durch den ersteren Punct mit der Geraden (1) parallel gezogene Gerade die Curve (2) trifft, so haben wir (fünfte Vorlesung, zweite Aufgabe) die Gleichungen

(3) $$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z'),$$
$$F(x', y', z') = o, \quad f(x', y', z') = o,$$

welche für die Coordinaten x, y, z jedes in der hier betrachteten cylindrischen Fläche befindlichen Punctes zugleich Statt finden müssen.

Drei dieser Gleichungen bestimmen x', y', z', sobald x, y, z

gegeben sind; substituirt man die Werthe von x', y', z', welche sie darbieten, in die vierte Gleichung, so erhält man eine Bedingungsgleichung zwischen x, y, z, an welche diese Coordinaten gebunden sind, wofern sämmtliche Gleichungen (3) zugleich bestehen sollen. Diese Bedingungsgleichung, welche, wie man sieht, das Resultat der Elimination von x', y', z' aus (3) ist, drückt also die Natur der in der Frage stehenden Fläche aus.

Gibt man den beiden ersteren der Gleichungen (3) die Formen

$$x' - az' = x - az, \quad y' - bz' = y - bz,$$

so fällt es in die Augen, daß die Elimination von x', y', z' aus den Gleichungen (3) auf eine Endgleichung von der Gestalt

$$(4) \qquad \varphi(x - az, \; y - bz) = 0$$

führt, welcher demnach die Gleichung jeder cylindrischen Fläche unterliegt. Auch gehört umgekehrt jede Gleichung, welche sich auf die Form (4) bringen läßt, einer cylindrischen Fläche. Denn wählt man die zwei willkürlichen Größen x, z so, daß $x - az = \alpha$ wird, wobei α eine beliebige beständige Größe anzeigt, so ergibt sich vermöge (4) auch für $y - bz$ ein beständiger Werth β. So oft dieser reell ausfällt, deuten die Gleichungen $x - az = \alpha$, $y - bz = \beta$ auf eine Folge von Puncten der Fläche (4) hin, welche in einer zur Geraden $x = az$, $y = bz$ parallelen Linie liegen, wodurch die Fläche (4) nothwendig für eine cylindrische erklärt wird.

Aus der Gleichung (4) folgt

$$(5) \qquad y - bz = \psi(x - az).$$

Differenzirt man diese letztere, so hat man

$$(6) \qquad dy - b\,dz = \psi_1(x - az)(dx - a\,dz),$$

wobei die durch ψ_1 bezeichnete Function zu der Function ψ in der durch die Gleichung $\frac{d\psi(u)}{du} = \psi_1(u)$ ausgedrückten Relation steht. Betrachtet man z als eine Function der independenten Variablen x und y, und hebt man aus der Gleichung (6) die Ergebnisse der partiellen Differenziationen in Bezug auf x und y heraus, so findet man

$$(7) \qquad -b\frac{dz}{dx} = \psi_1(x - az)\left(1 - a\frac{dz}{dx}\right).$$

$$1 - b\frac{dz}{dy} = -\psi_1(x - az) \cdot a\frac{dz}{dy}.$$

Durch Verbindung dieser Gleichungen kann man die Function

$\psi_1(x - az)$ gänzlich beseitigen. Man kömmt hiedurch auf die Gleichung mit partiellen Differenzialien

$$(8)\qquad a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1,$$

welche die Natur einer cylindrischen Fläche, deren erzeugende Gerade der Geraden $x = az$, $y = bz$ parallel ist, abgesehen von der Beschaffenheit der die Bewegung dieser erzeugenden Geraden leitenden Curve (2), allgemein darstellt.

Die Gleichung (8) erscheint sogleich, sobald man den gemeinsamen Charakter aller cylindrischen Flächen, welche auch immer ihre Leitungscurven seyn mögen, in die Sprache der Analysis übersetzt.

Man kann nämlich die Natur der cylindrischen Flächen, im Einklange mit der am Eingange dieser Vorlesung aufgestellten Definition, dadurch unzweideutig festsetzen, daß man sie als die Flächen erklärt, deren Berührungsebenen sämmtlich mit einer fixen Geraden (1) parallel sind. Nennen wir nun die Coordinaten des Punctes der Cylinderfläche, zu welchem eine Berührungsebene gelegt wird, x, y, z, und bezeichnen wir die Coordinaten irgend eines anderen Punctes dieser Ebene durch x', y', z', so besteht für dieselbe die Gleichung

$$z' - z = (x' - x)\frac{dz}{dx} + (y' - y)\frac{dz}{dy}$$

(dreizehnte Vorlesung (11)), und die Bedingung des Parallelismus mit der Geraden (1) ist, der in der fünften Vorlesung erhaltenen Gleichung (10) gemäß,

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1,$$

wie wir es vorausgesagt haben. Integriren wir diese Gleichung mit partiellen Differenzialien, so kommen wir auf die Gleichung (5) zurück. Diese Operation wird am schnellsten nach der in der sieben und fünfzigsten Vorlesung über die Analysis gelehrten Lagrange'schen Methode vollzogen. Schaffen wir nämlich aus der vorliegenden Differenzialgleichung mittelst der Relation $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$ den Quotienten $\frac{dz}{dy}$ weg, so ergibt sich

$$dy - b\,dz = (a\,dy - b\,dx)\frac{dz}{dx},$$

$$\text{d. i.}\quad d(y - bz) = d(ay - bx)\frac{dz}{dx}.$$

Es sey nun die willkürliche Größe $\frac{dz}{dx}$ eine Function von $ay-bx$, welche, mit $d(ay-bx)$ multiplicirt, nach verrichteter Integration $\varphi(ay-bx)$ gebe, so haben wir

$$y - bz = \varphi(ay - bx).$$

Wäre in dieser Rechnung $\frac{dz}{dx}$ weggeschafft worden, so hätte sich

$$x - az = \Phi(ay - bx)$$

ergeben; es besteht daher auch die Gleichung

$$y - bz = \psi(x - az),$$

in welcher ψ eine willkürliche Function anzeigt, welche erst durch die besondere Beschaffenheit der durch diese Gleichung vorgestellten Fläche näher bestimmt wird.

Liegt die Gerade (1), welche die Lage der die cylindrische Fläche beschreibenden Geraden festsetzt, in der Ebene xy, so gehören ihr die Gleichungen

(9) $$y = \alpha x, \quad z = 0,$$

wobei α eine beständige Größe ist, und es erhalten somit a und b in (1) unendliche Werthe. Jedoch läßt sich die obige Rechnung diesem Falle leicht anpassen. An die Stelle der Gleichungen (3) treten hier die Gleichungen

(10) $$y - y' = \alpha(x - x'), \quad z = z',$$
$$F(x', y', z') = 0, \quad f(x', y', z') = 0,$$

und die Gleichungen (4) und (5) werden durch

(11) $$\varphi(y - \alpha x, z) = 0 \quad \text{oder} \quad z = \psi(y - \alpha x)$$

ersetzt, woraus die partielle Differenzialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + \alpha \frac{dz}{dy} = 0$$

folgt. Diese stimmt mit (8) gut überein; denn die Gleichungen (1) geben $ay = bx$ oder $y = \frac{b}{a} x$, daher ist für unseren gegenwärtigen Fall $\alpha = \frac{b}{a}$. Theilt man die Gleichung (8) durch a, und schreibt man α statt $\frac{b}{a}$, so hat man, sobald a unendlich wächst, die Gleichung (12) vor sich.

Die Gleichung (8) kann mit Vortheil zur Untersuchung angewen-

det werden, ob eine gegebene Gleichung einer cylindrischen Fläche gehört oder nicht; man suche nämlich aus dieser Gleichung die den Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ zugehörenden Ausdrücke, und substituire dieselben in die Gleichung (8). Die in der Frage stehende Fläche ist nur dann cylindrisch, wenn man a und b so zu bestimmen vermag, daß durch die erwähnte Substitution eine identische Gleichung erzeugt wird.

Suchen wir z. B. die Bedingungen auf, unter welchen die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen drei Variablen x, y, z, nämlich

(13) $Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dyz + Exz + Fxy + Gz + Hy + Ix + K = o$,

im rechtwinkligen Coordinatensysteme einer cylindrischen Fläche gehört.

Diese Gleichung gibt uns

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2Cx + Ez + Fy + I}{2Az + Dy + Ex + G}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{2By + Dz + Fx + H}{2Az + Dy + Ex + G};$$

wir haben daher, wenn wir diese Ausdrücke in die Gleichung (8) einführen:

$$a(2Cx + Ez + Fy + I) + b(2By + Dz + Fx + H) \\ + 2Az + Dy + Ex + G = o$$

oder

$$(2Ca + Fb + E)x + (Fa + 2Bb + D)y + (Ea + Db + 2A)z \\ + Ia + Hb + G = o;$$

welche Gleichung nur in so fern eine identische ist, als die vier Gleichungen

(14) $2Ca + Fb + E = o, \quad Ea + Db + 2A = o,$
$Fa + 2Bb + D = o, \quad Ia + Hb + G = o$

mit einander bestehen. Sucht man aus zweien derselben a und b, und substituirt man die gefundenen Werthe in die beiden anderen, so erhält man zwei der folgenden vier Gleichungen:

(15) $AF^2 + BE^2 + CD^2 - 4ABC - DEF = o,$
$(DF - 2BE)G + (DE - 2AF)H + (4AB - D^2)I = o,$
$(EF - 2CD)G + (4AC - E^2)H + (DE - 2AF)I = o,$
$(4BC - F^2)G + (EF - 2CD)H + (DF - 2BE)I = o.$

Sind also die Coefficienten der Coordinaten in der Gleichung (13) so beschaffen, daß sie nicht wenigstens zweien dieser Gleichungen Genüge leisten, so stellt die Gleichung (13) keine cylindrische Fläche dar.

Die erste der Gleichungen (15) ist im Allgemeinen eine nothwendige Folge jedes Paares der übrigen; so entspringt z. B. die erste Glei-

chung immer aus der zweiten und dritten, den einzigen Fall ausgenommen, wenn DG = 2AH und EG = 2AI, also auch EH = DI ist, in welchem die zweite und dritte Gleichung Statt finden können, ohne die erste nach sich zu ziehen. Ein Gleiches gilt auch von den andern Verbindungen der drei letzten der Gleichungen (15). Wie aus der in früheren Vorlesungen angestellten Untersuchung der Bedeutung der Gleichung (13) erhellet, sind die so eben angedeuteten Fälle die einzigen, in welchen zwei der Gleichungen (15) realisirt werden können, ohne daß die Gleichung (13) einer cylindrischen Fläche entspricht. Es ist also, damit die Gleichung (13) die verlangte Bedeutung habe, nöthig, daß die erste und noch eine andere der Gleichungen (15) realisirt werde.

Wir bemerken nur noch, daß die Gleichungen (14) die Bedingung aussprechen, unter welcher eine der in der neunten Vorlesung erhaltenen Gleichungen (3) eine Folge der beiden anderen ist.

So wie es hier mit den cylindrischen Flächen geschehen ist, lassen sich auch die konischen oder Kegelflächen auf allgemeine Gleichungen zurückführen.

Die konischen Flächen werden von allen durch einen bestimmten Punct gelegten Ebenen in geraden Linien geschnitten, und entstehen daher durch die Bewegung einer stets durch einen fixen Punct gehenden Geraden. Dieser Punct heißt der Scheitel. Das Bildungsgesetz jeder einzelnen dieser Flächen hängt von der Curve ab, an welche die bewegliche Gerade gebunden ist.

Wir erhalten die partielle Differenzialgleichung, welche die Natur der konischen Flächen auf die allgemeinste Weise darstellt, wenn wir den Umstand, daß bei diesen Flächen jede tangirende Ebene durch den Scheitel geht, berücksichtigen. Sind x, y, z die Coordinaten eines Punctes einer konischen Fläche, und a, b, c die Coordinaten ihres Scheitels, so befindet sich derselbe in der zu dem ersteren Puncte geführten Berührungsebene, wenn die Gleichung

$$(16) \qquad c - z = (a - x)\frac{dz}{dx} + (b - y)\frac{dz}{dy}$$

besteht, welche demnach die verlangte Gleichung ist.

Lassen sich a, b, c so wählen, daß diese Gleichung durch jene einer Fläche für jedes x, y, z erfüllt wird, so ist diese Fläche eine konische, und a, b, c sind die Coordinaten ihres Scheitels.

Soll z. B. die Gleichung (13) eine Kegelfläche ausdrücken, so

muß die Gleichung

$$(a-x)(2Cx+Ez+Fy+I)+(b-y)(2By+Dz+Fx+H) \\ +(c-z)(2Az+Dy+Ex+G)=o,$$

oder was dasselbe ist, die Gleichung

$$(2Ca+Fb+Ec+I)x+(Fa+2Bb+Dc+H)y+(Ea+Db+2Ac+G)z \\ +Ia+Hb+Gc+2K=o$$

identisch werden, wozu die Gleichungen

$$(17)\quad \begin{aligned} 2Ca+Fb+Ec+I&=o,\\ Fa+2Bb+Dc+H&=o,\\ Ea+Db+2Ac+G&=o,\\ Ia+Hb+Gc+2K&=o \end{aligned}$$

erforderlich sind. Die ersten drei derselben stimmen, wenn man a, b, c mit ξ, υ, ζ vertauscht, mit den Gleichungen (3) der neunten Vorlesung überein, und geben daher die dortigen Ausdrücke (4) als Werthe von a, b, c. Substituirt man dieselben in die vierte Gleichung, so hat man, wenn L die an dem angeführten Orte gewählte Bedeutung besitzt, $L=o$ als Bedingungsgleichung für die in der Frage stehende Beschaffenheit der Gleichung (13). Zugleich sieht man, daß der *Scheitel der Kegelfläche ihr Mittelpunct ist.*

Sind $F(x, y, z)=o$, $f(x, y, z)=o$ die Gleichungen der Curve, welcher die eine konische Fläche beschreibende Gerade folgt, und sind x', y', z' die Coordinaten des Punctes, in welchem die durch den Scheitel a, b, c und durch den Punct x, y, z der Kegelfläche geführte Gerade die Curve trifft, so bestehen die Gleichungen

$$(18)\quad x'-a=\frac{x-a}{z-c}(z'-c),\quad y'-b=\frac{y-b}{z-c}(z'-c),$$
$$F(x', y', z')=o,\quad f(x', y', z')=o.$$

Die konische Fläche wird durch das Resultat der Elimination von x', y', z' aus denselben analytisch dargestellt. Ihre Gleichung erscheint daher unter der Form

$$(19)\qquad \varphi\left(\frac{x-a}{z-c},\ \frac{y-b}{z-c}\right)=o,$$

welche das Integral der Differenzialgleichung (16) ist, und auf dem oben betretenen Wege direct gefunden werden kann.

Die Rotationsflächen, welche durch alle auf eine bestimmte Gerade senkrechten Ebenen in Kreisen, deren Mittelpuncte in dieser

Geraden liegen, geschnitten werden, folglich durch Umdrehung einer mit dieser Geraden unveränderlich verbundenen Curve um dieselbe entstehen, besitzen die allgemeine Eigenschaft, daß ihre Normallinien durch die Rotationsaxe gehen, woraus sich die Differenzialgleichung dieser Flächen leicht ableiten läßt.

Es seyen

(20) $$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

die Gleichungen der Rotationsaxe, ferner x', y', z' die Coordinaten eines Punctes der zu dem Puncte x, y, z der Rotationsfläche geführten Normale, so gehören derselben die Gleichungen

$$x' - x + (z' - z)\frac{dz}{dx} = 0, \quad y' - y + (z' - z)\frac{dz}{dy} = 0.$$

Damit diese Normale mit der Axe (20) zusammentreffe, muß (vierte Vorlesung (6)) die Gleichung

(21) $$(\beta - y + bz)\frac{dz}{dx} - (\alpha - x + az)\frac{dz}{dy} + a(\beta - y) - b(\alpha - x) = 0$$

bestehen, welche demnach die Natur der Rotationsflächen ohne Rücksicht auf die sie erzeugenden Curven allgemein charakterisirt.

Wir können von der Gleichung (21) Gebrauch machen, um die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen drei Variablen einer Rotationsfläche entspricht. Zu diesem Ende substituiren wir die aus der Gleichung (13) sich ergebenden Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ in (21), und ordnen das Resultat dieser Operation nach den Potenzen und Producten von x, y, z, so haben wir eine Gleichung, welche nur dann für alle Werthe dieser Coordinaten besteht, wenn die Gleichungen

(22) $$\begin{array}{r|l} F - Eb = 0 & 2(B - C) + Ea - Db = 0 \\ F - Da = 0 & 2(A - C)b + Fa - D = 0 \\ Da - Eb = 0 & 2(A - B)a - E + Fb = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (F - Eb)\alpha + (Ea - 2C)\beta - H + Gb &= 0 \\ (Db - 2B)\alpha + (F - Da)\beta - I + Ga &= 0 \\ (D - 2Ab)\alpha + (2Aa - E)\beta + Ha - Ib &= 0 \\ (Gb - H)\alpha + (I - Ga)\beta &= 0 \end{aligned}$$

Statt finden. Die ersten zwei derselben geben

(23) $$a = \frac{F}{D}, \quad b = \frac{F}{E},$$

welche Werthe auch der dritten Gleichung Genüge leisten; mit Rücksicht auf dieselben erhält man aus der siebenten und achten

$$(24)\qquad \alpha = \frac{(DI - GF)\,E}{(DF - 2BE)\,D},\quad \beta = \frac{(HE - GF)\,D}{(EF - 2CD)\,E}.$$

Substituirt man die hier gefundenen Werthe in die übrigen Gleichungen, so findet man keine anderen als die drei Bedingungsgleichungen

$$(25)\qquad \begin{aligned} 2(A - B)EF - (E^2 - F^2)D &= 0, \\ 2(A - C)DF - (D^2 - F^2)E &= 0, \\ 2(B - C)DE - (D^2 - E^2)F &= 0, \end{aligned}$$

wovon jede wieder aus den beiden anderen folgt; soll daher die Fläche (13) eine Rotationsfläche seyn, so müssen zwei der Gleichungen (25) realisirt werden. Die Lage der Rotationsaxe $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ wird durch die Formeln (23) und (24) bestimmt.

Um das Integral der Differenzialgleichung (21) zu erhalten, bilde man die in der sieben und fünfzigsten Vorlesung über die Analysis abgeleiteten Differenzialgleichungen (4). Sie sind in dem vorliegenden Falle

$$(\beta - y + bz)\,dy + (\alpha - x + az)\,dx = 0;$$
$$(\alpha - x + az)\,dz + [a(\beta - y) - b(\alpha - x)]\,dy = 0.$$

Multiplicirt man die erste derselben mit a, und addirt man sie sodann zur zweiten, so erhält man nach verrichteter Division der Summe durch $\alpha - x + az$:

$$a\,dz + b\,dy + dz = 0,\ \text{woraus}\ ax + by + z = Const.$$

folgt; hiedurch verwandelt sich die erste Gleichung in

$$(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy + z\,dz = 0,$$

woraus sich $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = Const.$ ergibt.

Es ist daher

$$(26)\qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \varphi(ax + by + z)$$

das verlangte Integral, in welchem φ eine willkürliche Function anzeigt.

Man gelangt zu demselben unmittelbar, wenn man sich die Rotationsfläche durch einen veränderlichen Kreis erzeugt denkt, dessen Mittelpunct auf der Geraden $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ fortschreitet, dessen Ebene auf dieser Geraden stets senkrecht bleibt, und dessen Peripherie immer durch eine gegebene Curve hindurch geht.

Fünf und zwanzigste Vorlesung.

Über die Einhüllungsflächen.

Wenn eine Fläche in jedem ihrer Puncte eine der Position und Gestalt nach veränderliche Fläche berührt, so sagt man, sie hülle das System der auf diese Weise entstehenden einzelnen Flächen ein. Wir wollen uns in gegenwärtiger Vorlesung mit der Auffindung der Gleichung der Einhüllungsfläche beschäftigen, vorausgesetzt, daß das Bildungsgesetz des Systems der eingehüllten Flächen gegeben ist.

Es sey

(1) $$f(x, y, z, a) = 0$$

die Gleichung einer Fläche, worin unmittelbar oder mittelbar die beständige Größe a vorkomme, von welcher die Position und die Dimensionen dieser Fläche abhängen. Man stelle sich vor, die Größe a erhalte stufenweise alle Werthe, deren sie fähig ist, so entspringt aus der Gleichung (1) eine Reihe von Flächen, wovon zwei bestimmte unmittelbar auf einander folgende sich im Allgemeinen in einer gewissen Curve schneiden, welche den Curven, worin die Berührungspuncte der Einhüllungsfläche aller unter der Gleichung (1) enthaltenen Flächen mit den beiden so eben genannten liegen, um so näher kommt, je weniger diese letzteren Flächen von einander abweichen. Man erhält demnach für jeden bestimmten Werth von a die Gleichungen der Curve, in welcher die Fläche (1) von der dem Inbegriffe aller Werthe von a correspondirenden Einhüllungsfläche berührt wird, wenn man die Gleichung

$$f(x, y, z, a + da) = 0$$

mit (1) verbindet, an deren Stelle man auch den Unterschied beider Gleichungen, und folglich auch die Gleichung

(2) $$\frac{df(x, y, z, a)}{da} = 0$$

mit (1) in Verbindung bringen kann.

Eliminirt man mittelst der Gleichungen (1) und (2) die Größe a, welche die Position der so eben betrachteten Curve auf der Einhüllungsfläche bedingt, so erscheint eine Gleichung zwischen x, y und z, welche jeder einzelnen Curve dieser Art, folglich auch dem geometrischen Orte aller, nämlich der Einhüllungsfläche selbst gehört.

Jede Curve, in welcher die Einhüllungsfläche irgend eine der eingehüllten Flächen berührt, nennt Monge, dem die Theorie der Flächen überhaupt ihre gegenwärtige Gestalt verdankt, die Charakteristik der Einhüllungsfläche in Bezug auf diese bestimmte Eingehüllte. Man kann sich die Einhüllungsfläche offenbar durch die Bewegung der nach einem gewissen Gesetze fortschreitenden und im Allgemeinen veränderlichen Charakteristik erzeugt vorstellen.

Betrachten wir drei auf einander folgende, einander unendlich sich nähernde eingehüllte Flächen, so werden sich die Durchschnittslinien der mittleren mit den beiden andern, da sie sich auf einer und derselben Fläche, nämlich auf der mittleren befinden, im Allgemeinen einander begegnen, und, bei ihrer unendlichen Annäherung an den Zustand zweier unmittelbar auf einander folgenden Charakteristiken, zuletzt sich berühren. Ein Berührungspunct zweier einander nächsten Charakteristiken besitzt die Eigenschaft, daß die Coordinaten desselben bei dem Übergange von der ersten Charakteristik auf die zweite keiner Änderung unterliegen; differenzirt man daher die beiden Gleichungen (1) und (2) in Bezug auf a, von welcher Größe die Position der durch diese Gleichungen vorgestellten Charakteristik abhängt, während man x, y, z als unveränderlich behandelt, so wird zu den bereits vorhandenen Gleichungen noch eine, nämlich

$$(3) \qquad \frac{d^2 f(x, y, z, a)}{d a^2} = 0$$

hinzugefügt, wodurch man in den Stand gesetzt wird, für jede einzelne Charakteristik, d. h. für jeden einzelnen Werth von a, die Coordinaten des ihr mit der nächstfolgenden gemeinschaftlichen Punctes anzugeben.

Alle Puncte dieser Art liegen im Allgemeinen in einer eigenen auf der Einhüllungsfläche befindlichen Curve, zu deren Gleichungen man gelangt, wenn man aus je zweien der Gleichungen (1), (2), (3) die Größe a wegschafft, und welche wir nach Monge die Wendungscurve der Einhüllungsfläche nennen wollen, da in dieser Curve zwei verschiedene Parthien der genannten Fläche auf ähnliche Art sich vereinigen, wie dieß in einem Wendungs- oder Rückkehrpuncte bei zwei Ästen einer Curve der Fall ist.

Hat endlich die Einhüllungsfläche eine solche Beschaffenheit, daß sich auf ihr drei nächste Charakteristiken vorfinden, welche sich in einem Puncte begegnen, so findet man die Coordinaten dieses Punctes, nebst

dem ihm entsprechenden Werthe von a, wenn man die Gleichung (3) noch ein Mal in Beziehung auf a differenzirt, und mit Hülfe der Gleichungen (1), (2), (3) und der so eben erhaltenen

$$(4) \qquad \frac{d^3 f(x, y, z, a)}{d a^3} = 0$$

die Werthe von x, y, z und a bestimmt. Der erwähnte Punct, dessen Existenz an die Realität der Größen x, y, z, a gebunden ist, erscheint im Allgemeinen als Wendungs- oder Rückkehrpunct der Wendungscurve, und verdient deßhalb immer eine sorgfältige Beachtung.

Wir haben jetzt gezeigt, wie aus der allgemeinen Gleichung der eingehüllten Flächen die Gleichungen der Einhüllungsfläche und ihrer Charakteristik und Wendungscurve abgeleitet werden; gehen wir nun auf die Ableitung ihrer Differenzialgleichungen über.

Wir müssen aber zuvor noch auf den Umstand aufmerksam machen, daß sich in der Function $f(x, y, z, a)$ außer a noch mehrere Constanten befinden können, welche, bei der Bildung der Einhüllungsfläche für alle der Gleichung $f(x, y, z, a) = 0$ unterworfenen Flächen, als gegebene Functionen von a betrachtet werden. So kommen z. B., wenn es sich um die Einhüllungsfläche für alle Kugeln, deren Mittelpuncte auf einer bestimmten Curve liegen, handelt, zwei oder auch drei Constanten, nämlich die Coordinaten jedes einzelnen Mittelpunctes in Betrachtung, welche Constanten durch die Gleichungen dieser Curve mit einander in Verbindung stehen. Ändert sich der Halbmesser jeder Kugel, bei dem Übergange zur nächsten, nach einem vorgeschriebenen Gesetze, so hat man es noch mit einer vierten Constante zu thun.

Die Differenzialgleichungen, deren Auffindung wir hier beabsichtigen, sollen von den Formen der zwischen diesen Constanten obwaltenden Verknüpfungen frei seyn, damit sie nicht bloß für eine individuelle, sondern für alle nach einem gemeinschaftlichen Bildungsgesetze entstehenden Einhüllungsflächen gelten; sie werden daher nebst der Differenziation der Gleichung (1) noch die Elimination aller der auf diese Verknüpfungen sich beziehenden Größen erheischen, und deßhalb, wenn die Anzahl der zu beseitigenden Größen beträchtlicher ist, auch zu höheren Ordnungen sich erheben.

Um mit einem Falle zu beginnen, in welchem bloß Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zum Vorschein kommen, nehmen wir an, in der Function $f(x, y, z, a)$ befinde sich nebst a nur noch eine

von a abhängende Constante $\varphi(a)$, d. h. die Gleichung (1) habe die Form

(5) $$f(x, y, z, \varphi(a), a) = 0,$$

welche der Kürze wegen durch $f=0$ angedeutet werde. Diese ursprünglich auf jede der eingehüllten Flächen sich beziehende Gleichung gehört auch der Einhüllungsfläche, wenn man nur nebst x, y, z auch a als veränderlich ansieht. Da unter der letzteren Beziehung $\frac{df}{da} = 0$ ist; ferner von den drei Variablen x, y, z zwei, z. B. x und y als von einander unabhängig erscheinen, in Hinsicht auf welche abgesondert differenzirt werden kann; so erhält man, auch wenn die Gleichung (5) der Einhüllungsfläche zugeschrieben wird, die beiden Gleichungen

(6) $$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0.$$

Ist die Form der Function $\varphi(a)$ gegeben, so reicht eine dieser Gleichungen zur Wegschaffung von a hin; ist aber $\varphi(a)$ an sich noch unbestimmt, wie es seyn muß, wenn die Untersuchung aus einem allgemeinen Gesichtspuncte begonnen wird, so verhält sich $\varphi(a)$ wie eine zweite zu eliminirende Größe, und man bedarf beider Gleichungen (6), welche mit (5) verbunden auf die, zur ersten Ordnung gehörende, Differenzialgleichung der Einhüllungsfläche führen.

Setzen wir $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, so hat die Gleichung der in dem gegenwärtigen Falle sich ergebenden Einhüllungsfläche die Form

(7) $$f_1(x, y, z, p, q) = 0.$$

Dieß ist eine partielle Differenzialgleichung, deren Integral sich, dem oben Gesagten gemäß, durch die Elimination von a mittelst der Gleichungen (1) und (2), d. i. mittelst

$$f(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0, \quad \frac{df(x, y, z, a, \varphi(a))}{da} = 0$$

ergibt, in welchen die Form der durch φ vorgestellten Function willkürlich bleibt. Da die Differenzialgleichung (7) auf dem gewöhnlichen Wege aus der Gleichung

(8) $$f(x, y, z, a, b) = 0,$$

in welcher a und b constante Größen bezeichnen, folgt, wenn man diese Gleichung sowohl in Bezug auf x und z, wie auch in Bezug auf y und z differenzirt, und die beiden Constanten aus (8) mit Hülfe der gefunde-

nen Differenzialien wegschafft; so ist die Gleichung (8) nothwendig ein Integral der Differenzialgleichung (7), und zwar, wie Lagrange sich ausdrückt, ein allgemeines, indem es mit so vielen in der erwähnten Differenzialgleichung nicht vorhandenen willkürlichen beständigen Größen versehen erscheint, als durch eine sich bloß auf Differenzialien der ersten Ordnung beschränkende Differenziation nur immer beseitiget werden können. Man sieht hieraus, wie aus einem allgemeinen Integral einer partiellen Differenzialgleichung der ersten Ordnung ihr vollständiges, d. i. mit einer willkürlichen Function versehenes Integral hergeleitet werden könne. Man betrachte nämlich eine der beiden in dem allgemeinen Integral vorfindigen Constanten als eine willkürliche Function der zweiten, und eliminire die letztere Constante aus diesem Integral mit Hülfe der Gleichung, welche man durch Differenziation desselben in Bezug auf eben diese Constante erhält. Auch erhellet aus dem Gesagten, daß jede partielle Differenzialgleichung von der Form (7) sowohl allen Systemen gleichartiger Flächen, als auch den Einhüllungsflächen derselben entspricht; und daß ihr allgemeines Integral jeder der eingehüllten Flächen, ihr vollständiges Integral hingegen den Einhüllungsflächen selbst zugehört. Die nähere Bestimmung der Beschaffenheit der Einhüllungsflächen setzt die Angabe der im vollständigen Integral erscheinenden willkürlichen Function voraus.

Aus der Differenzialgleichung (7) läßt sich eine Gleichung ableiten, welche mit jener verbunden jede Charakteristik der durch dieselbe vorgestellten Einhüllungsflächen analytisch bezeichnet. Bezieht man nämlich die Gleichung (7) auf irgend eine der eingehüllten Flächen, und nimmt man, wie es das Wesen der Charakteristik mit sich bringt, x, y, z für dieselbe als unveränderlich an, während die Constante a, von welcher die Position der hier betrachteten eingehüllten Fläche abhängt, um das Differenzial da geändert wird, so bietet das Resultat der bloß in Hinsicht auf p und q verrichteten Differenziation der Gleichung (7), welches wir durch

$$(9) \qquad P\,dp + Q\,dq = 0$$

andeuten wollen, nach Weglassung aller nicht unmittelbar durch die Veränderlichkeit der Größe a herbeigeführten Theile von dp und dq, die der einem bestimmten Werth von a zukommenden Charakteristik eigenthümliche Gleichung

$$P\frac{dp}{da} + Q\frac{dq}{da} = 0$$

dar. Aber es ist

(10) $$dz = p\,dx + q\,dy,$$

folglich, wenn man diese Gleichung mit Rücksicht auf die hier eintretende Beschränkung differenzirt,

$$\frac{dp}{da}dx + \frac{dq}{da}dy = 0,$$

und wenn man dieses Ergebniß mit dem vorangehenden verbindet,

(11) $$P\,dy - Q\,dx = 0$$

eine Gleichung, welche, da sie von a frei ist, auf alle Charakteristiken der durch (7) vorgestellten Einhüllungsflächen Anwendung leidet.

Nehmen wir an, eine der erwähnten Einhüllungsflächen gehe durch eine unendlich klein werdende Veränderung der Form der oben durch φ (a) angedeuteten Function in eine nächste Einhüllungsfläche über, so wird die Durchschnittslinie beider, indem man die Gleichung (7) als den allgemeinen Ausdruck sämmtlicher Einhüllungsflächen ansieht, auf dem so eben betretenen Wege bestimmt, wenn man, in so fern α eine Größe bedeutet, deren Änderung die Veränderung der Form der Function φ nach sich zieht, mittelst der beiden Gleichungen

$$P\frac{dp}{d\alpha} + Q\frac{dq}{d\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dp}{d\alpha}dx + \frac{dq}{d\alpha}dy = 0$$

die Größe α, oder was dieselbe Wirkung hervorbringt, die Differenzialquotienten $\frac{dp}{d\alpha}$, $\frac{dq}{d\alpha}$ wegschafft. Aber hiedurch ergibt sich abermals die Gleichung (10); es kann demnach die Charakteristik einer Einhüllungsfläche sowohl als die Durchschnittslinie zweier nächster eingehüllter Flächen, wie auch als die Durchschnittslinie zweier nächster gleichartiger Einhüllungsflächen betrachtet werden.

Eliminirt man aus (7), (10) und (11) die partiellen Differenzialquotienten p und q, so gelangt man zu einer Gleichung, in welcher bloß x, y, z und die gewöhnlichen Differenzialien dieser Variablen erscheinen, und keine dem Einflusse von a unterliegende Größe vorhanden ist. Diese Gleichung gehört demnach jeder Wendungscurve der unter der Gleichung (7) enthaltenen Einhüllungsflächen.

Um diese Lehren durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, betrachten wir die Einhüllungsfläche aller mit einem und demselben Halbmesser beschriebenen Kugeln, deren Mittelpuncte in einer auf der Ebene xy verzeichneten Curve sich befinden.

Es seyen a und b die Coordinaten des Mittelpunctes einer dieser Kugeln, wobei der Gleichung der erwähnten Curve gemäß $b = \varphi(a)$ gedacht wird, so ist

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2$$

die Gleichung der correspondirenden Kugel, in welcher r den allen Kugeln gemeinschaftlichen Halbmesser vorstellt. Diese Gleichung gibt uns

$$x - a + zp = 0, \quad y - b + zq = 0,$$

also $x - a = - zp, \quad y - b = - zq;$

und wenn wir diese Resultate in eben dieselbe Gleichung einführen,

$$z^2 (p^2 + q^2 + 1) = r^2,$$

welches die Differenzialgleichung der Einhüllungsfläche sämmtlicher Kugeln ist.

Differenziren wir diese letztere Gleichung in Hinsicht auf p und q, so finden wir $\quad z^2 p\,dp + z^2 q\,dq = 0;$

und somit ist, wenn wir in (11) $P = z^2 p$, $Q = z^2 q$ setzen,

$$p\,dy - q\,dx = 0$$

die Gleichung, welche, mit der Differenzialgleichung der Einhüllungsfläche verbunden, ihre Charakteristik darstellt.

Schafft man endlich aus den beiden Gleichungen der Charakteristik, mit Rücksicht auf $dz = p\,dx + q\,dy$, die Größen p und q weg, so erhält man die Differenzialgleichung der Wendungscurve, nämlich

$$z^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) = r^2 (dx^2 + dy^2).$$

Die endlichen Gleichungen der Einhüllungsfläche, ihrer Charakteristik und ihrer Wendungscurve ergeben sich, wenn man die obige Gleichung einer der eingehüllten Kugeln nach einander in Bezug auf a differenzirt. Zu diesem Ende setze man $\frac{d\varphi(a)}{da} = \varphi_1(a)$, $\frac{d^2\varphi(a)}{da^2} = \varphi_2(a)$, so hat man die Gleichung der Einhüllungsfläche, wenn man a aus den zwei Gleichungen

$(x-a)^2 + [y - \varphi(a)]^2 + z^2 = r^2$ und $x - a + [y - \varphi(a)]\,\varphi_1(a) = 0$

eliminirt. Beide Gleichungen geben für jeden einzelnen Werth von a die Coordinaten jedes Punctes der diesem a entsprechenden Charakteristik. Verbindet man mit diesen Gleichungen noch folgende

$$1 + [\varphi_1(a)]^2 - [y - \varphi(a)]\,\varphi_2(a) = 0,$$

so hat man nach verrichteter Elimination von a die beiden Gleichungen der Wendungscurve.

Mehrere Gleichungen, welche, nachdem eine ihnen gemeinschaftliche Größe weggeschafft worden ist, auf ein bestimmtes Resultat füh-

ren sollen, können, diesem Resultate unbeschadet, auf unzählige Arten durch eben so viele andere Gleichungen ersetzt werden, da es offenbar erlaubt ist, die vorhandenen Gleichungen nach Belieben unter einander zu verbinden. Es lassen sich demnach für jede bestimmte Einhüllungsfläche unendlich viele Arten aneinander gereihter eingehüllter Flächen auffinden, welchen die erstere Fläche zugehört. So ist z. B. die Einhüllungsfläche jeder Folge gleicher Kugeln zugleich die Einhüllungsfläche eines Systems gemeiner oder mit kreisförmiger Basis versehener Cylinderflächen, deren Durchmesser mit jenen der Kugeln übereinstimmen, und deren Axen die Curve, in welcher die Mittelpuncte genannter Kugeln liegen, berühren.

Was die Einhüllungsflächen jener Eingehüllten betrifft, in deren Gleichungen mehrere verschiedene Functionen einer und derselben beständigen Größe erscheinen, so ist aus dem oben Gesagten leicht zu ersehen, wie ihre Differenzialgleichungen zu finden sind. Man muß nämlich aus der Gleichung einer individuellen eingehüllten Fläche so viele Differenzialgleichungen ableiten, als zur Wegschaffung dieser Constante und aller Functionen derselben erforderlich sind. Das Resultat der Elimination dieser Größen ist die verlangte Differenzialgleichung.

Kommen in der allgemeinen Gleichung der eingehüllten Flächen zwei verschiedene Functionen einer beständigen Größe a vor, so wird die von jeder dieser Functionen freie partielle Differenzialgleichung der Einhüllungsfläche von der zweiten Ordnung seyn, d. h. sie wird die Größen $\frac{dp}{dx} = r$, $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s$, $\frac{dq}{dy} = t$, oder doch wenigstens eine derselben enthalten. Läßt man die Einhüllungsfläche durch unendlich geringe Änderungen der erwähnten Functionen in eine nächste übergehen, und betrachtet man die Charakteristik als die Linie, in welcher sich beide berühren, so bleiben x, y, z, p, q constant, während sich r, s, t ändern. Es ist also die zweite Differenzialgleichung der Charakteristik das Resultat der Elimination von dr, ds, dt aus dem in Bezug auf r, s, t allein genommenen Differenzial

$$R\,dr + S\,ds + T\,dt = 0$$

der Einhüllungsfläche, verbunden mit den Gleichungen $dp = 0$, $dq = 0$ oder $r\,dx + s\,dy = 0$, $s\,dx + t\,dy = 0$, d. h. die verlangte Differenzialgleichung ist

$$(12) \qquad R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0.$$

Sechs und zwanzigste Vorlesung.

Über die developpablen Flächen.

Unter developpablen Flächen versteht man jene, welche, wenn sie vollkommen biegsam und unausdehnbar wären, ohne Risse oder Falten in eine Ebene sich ausbreiten ließen.

Jede Fläche, welche eine sich bewegende Ebene in jeder ihrer Positionen berührt, ist eine developpable. Denn man stelle sich ein System von Ebenen vor, wovon jede folgende die vorhergehende durchschneidet, und behalte bloß die zwischen je zwei nächsten Durchschnittslinien liegenden Stücke derselben bei, so hat man eine Verbindung ebener Streifen von unbegrenzter Länge und begrenzter Breite, welche sich offenbar, ohne Störung ihres Zusammenhanges, in eine und dieselbe Ebene bringen lassen. Es bedarf hiezu bloß einer successiven Drehung der einzelnen Streifen um die geraden Linien, in welchen sie an einander grenzen, bis alle Streifen in die Ebene des ersten gekommen sind. Läßt man nun die Winkel, welche die einzelnen Ebenen mit einander bilden, unendlich abnehmen, und zugleich je zwei nächste Durchschnittslinien derselben einander unendlich nahe treten, so nähert sich der Inbegriff aller so eben betrachteten Streifen unendlich einer krummen Fläche, jener nämlich, welche alle einzelnen Ebenen zugleich berührt, der man daher dieselbe Eigenschaft beizulegen berechtiget ist, die dem Systeme ebener Streifen, als dessen Grenze sie erscheint, in jedem seiner Zustände zukommt.

Die Gleichung einer Ebene enthält in ihrer allgemeinsten Gestalt, wenn man eine der Coordinaten von ihrem Coefficienten befreit, drei willkürliche beständige Größen, von welchen die Lage dieser Ebene gegen die coordinirten Ebenen abhängt. Jedes Gesetz der Aufeinanderfolge nicht paralleler Ebenen kann dadurch realisirt werden, daß man zwei der so eben genannten constanten Größen als Functionen der dritten, der man alle denkbaren Werthe beilegt, betrachtet. Es sey also

(1) $$z = x\varphi(a) + y\psi(a) + a$$

die allgemeine Gleichung aller in ein System vereinigter Ebenen; suchen wir die Gleichung ihrer (developpablen) Einhüllungsfläche.

Um erstlich die Differenzialgleichung dieser Einhüllungsfläche

zu erhalten, differenziren wir, der in der vorhergehenden Vorlesung ertheilten Anweisung gemäß, die Gleichung (1) sowohl in Bezug auf x und z, wie auch in Bezug auf y und z, so haben wir die Gleichungen

$$\frac{dz}{dx} = p = \varphi(a), \quad \frac{dz}{dy} = q = \psi(a).$$

Da hier p und q als Functionen einer dritten Größe a erscheinen, so ist eine der ersteren nothwendig eine Function der anderen, d. h. es ist

(2) $$p = f(q).$$

Diese Gleichung gibt uns

$$\frac{dp}{dx} = r = \frac{df(q)}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = s\frac{df(q)}{dq}, \quad \text{also} \quad \frac{df(q)}{dq} = \frac{r}{s};$$

$$\frac{dp}{dy} = s = \frac{df(q)}{dq} \cdot \frac{dq}{dy} = t\frac{df(q)}{dq}, \quad \text{also} \quad \frac{df(q)}{dq} = \frac{s}{t};$$

woraus

(3) $$rt = s^2 \quad \text{oder} \quad rt - s^2 = 0$$

als Differenzialgleichung der oben betrachteten developpablen Fläche folgt.

Allein es läßt sich auch umgekehrt keine developpable Fläche denken, welche man nicht als Einhüllungsfläche eines Systems von Ebenen betrachten könnte. Denn legt man zu dem Puncte x, y, z irgend einer developpablen Fläche eine tangirende Ebene, in Bezug auf welche x', y', z' die Coordinaten jedes anderen Punctes vorstellen, so gehört dieser Ebene die Gleichung

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y).$$

Soll unsere Fläche wirklich developpabel seyn, also in die tangirende Ebene ausgebreitet werden können, so muß sie von dieser Ebene nicht bloß in dem Puncte x, y, z, sondern in einer Folge von Puncten oder in irgend einer Linie berührt werden, wie man leicht einsieht, wenn man sich die tangirende Ebene durch Krümmung derselben wieder zu der genannten Fläche umgebildet vorstellt. Es muß daher Änderungen von x und y geben, welche auf die Coefficienten der Coordinaten x', y', z', und auf das von x', y', z' freie Glied in der obigen Gleichung der Berührungsebene keinen Einfluß haben, d. h. es muß möglich seyn, daß die Gleichungen

$$dp = 0, \quad dq = 0 \quad \text{und} \quad d(z - px - qy) = 0$$

zusammen bestehen. Die letzte dieser Gleichungen ist eine nothwendige

Folge der beiden ersteren, daher haben wir es bloß mit den Bedingungsgleichungen

(4) $dp = o$, $dq = o$ oder $r\,dx + s\,dy = o$, $s\,dx + t\,dy = o$

zu thun. Sie geben uns zur Bestimmung der Richtung, in welcher man von dem Puncte x, y, z aus auf der developpablen Fläche fortschreiten muß, ohne die Linie, in welcher sie der zu diesem Puncte gehörenden Berührungsebene begegnet, zu verlassen,

(5) $$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{s} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{s}{t},$$

welche Werthe von $\frac{dy}{dx}$ nicht zugleich Statt finden können, wofern nicht

$$rt = s^2$$

ist. Da dieses Resultat mit (3) übereinstimmt, so ist die oben aufgestellte Behauptung bewiesen, und dem zu Folge werden die developpablen Flächen durch die partielle Differenzialgleichung $rt - s^2 = o$ von allen übrigen Flächen unzweideutig unterschieden.

Wollte man diese Differenzialgleichung, ohne ihre geometrische Bedeutung zu berücksichtigen, auf analytischem Wege integriren, so schaffe man aus derselben mit Hülfe der Gleichung $dp = r\,dx + s\,dy$ die Größe r weg. Man erhält hiedurch

$$t\,dp = s(s\,dx + t\,dy)$$

$$\text{oder} \quad dp = \frac{s}{t}\,dq;$$

folglich, wenn man die unbestimmte Größe $\frac{s}{t}$ einer Function von q gleich setzt, und integrirt,

$$p = f(q),$$

wobei f eine willkürliche Function bedeutet. Um dieses Integral auf dem einfachsten Wege weiter zu behandeln, bediene man sich der Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$\text{welche} \quad z = px + qy - \int(x\,dp + y\,dq)$$

gibt, wodurch man in dem vorliegenden Falle, wenn $\frac{df(q)}{dq} = f_1(q)$ gesetzt wird,

$$z = px + qy - \int[xf_1(q) + y]\,dq$$

findet. Es muß also $xf_1(q) + y$ eine Function von q allein seyn, wodurch sich auch das Integral $\int[xf_1(q) + y]\,dq$ in eine solche verwandelt, welche $F(q)$ heißen mag. Das Integral der Gleichung (3)

wird nun durch das System der Gleichungen

$$(6)\qquad z = xf(q) + qy - F(q),$$
$$xf_1(q) + y = F_1(q),$$

worin $F_1(q) = \frac{dF(q)}{dq}$ ist, nach verrichteter Elimination von q, dargeboten.

Setzen wir $F(q) = -a$, durch welche Annahme q und $f(q)$ in Functionen von a, die wir $\psi(a)$ und $\varphi(a)$ nennen wollen, umgestaltet werden, so verwandeln sich die Gleichungen (6) wegen

$$-\frac{1}{F_1(q)} = -\frac{dq}{dF(q)} = \frac{d\psi(a)}{da} = \psi_1(a)$$

$$\text{und } -\frac{f_1(q)}{F_1(q)} = \frac{d\varphi(a)}{da} = \varphi_1(a) \quad \text{in}$$

$$(7)\qquad z = x\varphi(a) + y\psi(a) + a,$$
$$o = x\varphi_1(a) + y\psi_1(a) + 1,$$

wovon die erste mit (1) einerlei, und die zweite das in Bezug auf a genommene Differenzial derselben ist, wie es die in der vorhergehenden Vorlesung vorgetragene Theorie der Einhüllungsflächen mit sich bringt.

Die Gleichungen (7) gehören für jeden individuellen Werth der Größe a der Charakteristik der developpablen Fläche, welche daher, wie man sieht, stets eine gerade Linie ist.

Man kann die zweite Differenzialgleichung der Charakteristik aus der Differenzialgleichung der developpablen Fläche, nämlich aus $rt - s^2 = o$, nach der am Ende der vorhergehenden Vorlesung angedeuteten Methode ableiten. Denn die angeführte Gleichung gibt uns, wenn wir sie differenziren:

$$tdr - 2sds + rdt = o;$$

folglich haben wir

$$R = t, \quad S = -2s, \quad T = r,$$

und somit ist die zweite Gleichung der Charakteristik oder

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = o$$

folgende:

$$(8)\qquad rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = o.$$

Das Trinom linker Hand des Gleichheitszeichens ist einerlei mit dem Differenzial des Binoms $pdx + qdy$, in so fern man dx und dy als constant behandelt; weßwegen die Gleichung

$$(9)\qquad d^2z = o$$

Statt findet, welche eine Ebene anzeigt, wie man leicht sieht, wenn man unter obiger Voraussetzung die Gleichung $z = Ax + By + C$ zwei Mal nach einander differenzirt; ein Resultat, welches mit der bereits erkannten Beschaffenheit der Charakteristik einer developpablen Fläche im Einklange steht.

Die Gleichung (2), nämlich

$$p = f(q),$$

drückt, wie aus den obigen Rechnungen erhellet, ebenfalls die Natur der developpablen Flächen aus. Sie gibt uns

$$dp - f_1(q)\,dq = 0,$$

woraus nach der Methode der vorhergehenden Vorlesung, da hier $P = 1$, $Q = -f_1(q)$ ist,

$$(10) \qquad dy + f_1(q) \,.\, dx = 0$$

als zweite Gleichung der Charakteristik folgt. Eliminiren wir aus den Gleichungen (2), (10) und aus $dz = p\,dx + q\,dy$ die Größen p, q, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$(11) \qquad \Psi(dx, dy, dz) = 0,$$

d. h. eine solche, in welcher bloß die Differenzialien der variablen Größen x, y, z erscheinen. Diese Gleichung bezeichnet die Wendungscurve der developpablen Fläche, welche Curve von allen geradlinigen Charakteristiken dieser Fläche berührt wird.

Die endlichen Gleichungen der genannten Curve, welche als das Integral der Differenzialgleichung (11) zu betrachten sind, ergeben sich, wenn man die Gleichungen (7) noch mit folgender

$$(12) \qquad 0 = x\varphi_2(a) + y\psi_2(a)$$

durch Elimination von a verbindet, worin $\varphi_2(a) = \frac{d\varphi_1(a)}{da}$ und $\psi_2(a) = \frac{d\psi_1(a)}{da}$ ist.

Überhaupt wird von jeder Geraden, welche sich längst einer gegebenen Curve, sie stets berührend, bewegt, eine developpable Fläche beschrieben, welcher diese Curve als Wendungscurve entspricht. Dieser Satz läßt sich aus den am Anfange dieser Vorlesung angeführten Gründen leicht rechtfertigen, wenn man bedenkt, daß jede Folge gerader Linien, deren jede zwei nächste sich schneiden, als das System aller Durchschnittslinien irgend einer Folge von Ebenen betrachtet werden kann.

Hier bietet sich die Aufgabe dar, aus den Gleichungen

(13) $x = \varphi(z), \quad y = \psi(z) \ldots$
einer Curve die Gleichung der developpablen Fläche herzuleiten, in welcher alle Tangenten derselben liegen.

Bezeichnen wir die Coordinaten jedes Punctes einer dieser Tangenten im Allgemeinen durch x, y, z, und die der Axe der z parallele Ordinate des zugehörigen Berührungspunctes durch a, so sind

(14) $$x - \varphi(a) = (z - a)\,\varphi_1(a)$$
$$y - \psi(a) = (z - a)\,\psi_1(a)$$

die Gleichungen dieser Tangente. Eliminirt man aus denselben die Größe a, welche die Position dieser Tangente specialisirt, so hat man eine für die Coordinaten aller Puncte sämmtlicher Tangenten geltende Gleichung, nämlich die Gleichung der developpablen Fläche selbst, in welcher diese Tangenten sich befinden.

Dieses Verfahren kann dazu benützt werden, zu untersuchen, ob eine Curve eine ebene ist oder nicht. Im ersteren Falle muß der geometrische Ort aller Tangenten derselben eine Ebene seyn.

Vergleicht man die Gleichung (2) mit der partiellen Differenzialgleichung der cylindrischen Flächen, so erhellet sogleich, daß diese letzteren zu den developpablen gehören, wie es die Natur derselben mit sich bringt. Aber auch die konischen Flächen sind ihrer Entstehung gemäß nothwendig developpable; da nun ihre partielle Differenzialgleichung mit (2) nicht geradezu harmonirt, so muß es noch eine allgemeinere Form der partiellen Differenzialgleichung der ersten Ordnung für developpable Flächen geben, welche wir durch folgende Bemerkung erhalten.

Schreibt man in der ersten der Gleichungen (6) wieder p statt $f(q)$, und setzt man, was offenbar erlaubt ist, irgend eine Function von p und q statt $F(q)$, so sieht man, daß die mit partiellen Differenzialquotienten der ersten Ordnung versehene Gleichung der developpablen Flächen in ihrer allgemeinsten Gestalt durch

(15) $$\Phi(p, q, z - px - qy) = 0$$

vorgestellt werden kann, wobei Φ was immer für eine Function anzeigt. Diese Gleichung umfaßt jene der konischen Flächen als einen besonderen Fall.

Untersuchen wir mit Hülfe der Gleichung (3), unter welchen Bedingungen die Gleichung

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dyz + Exz + Fxy + Gz + Hy + Ix + K = 0$$

eine developpable Fläche vorstellt.

Differenzirt man diese Gleichung sowohl in Bezug auf x allein, als auch in Bezug auf y, so findet man

$$(2Az + Dy + Ex + G)p + 2Cx + Ez + Fy + I = o,$$
$$(2Az + Dy + Ex + G)q + 2By + Dz + Fx + H = o;$$

und wenn man diese Gleichungen in Bezug auf x und y abermal partiell differenzirt:

$$(2Az + Dy + Ex + G)r + 2(Ap^2 + Ep + C) = o,$$
$$(2Az + Dy + Ex + G)s + 2Apq + Dp + Eq + F = o,$$
$$(2Az + Dy + Ex + G)t + 2(Aq^2 + Dq + B) = o.$$

Substituirt man die sich hieraus ergebenden Werthe von r, s, t in die Gleichung (3), so erhält man

$$4(Ap^2 + Ep + C)(Aq^2 + Dq + B) - (2Apq + Dp + Eq + F)^2 = o$$

oder

$$(4AB - D^2)p^2 + 2(DE - 2AF)pq + (4AC - E^2)q^2$$
$$+ 2(2BE - DF)p + 2(2CD - EF)q + 4BC - F^2 = o.$$

Aber p und q lassen sich mittelst der oben erhaltenen Gleichungen durch x, y, z darstellen, wodurch letztere Gleichung in

$$\left.\begin{array}{l} (4AB - D^2)(2Cx + Ez + Fy + I)^2 \\ + (4AC - E^2)(2By + Dz + Fx + H)^2 \\ + (4BC - F^2)(2Az + Dy + Ex + G)^2 \\ + 2(DE - 2AF)(2Cx + Ez + Fy + I)(2By + Dz + Fx + H) \\ + 2(DF - 2BE)(2Cx + Ez + Fy + I)(2Az + Dy + Ex + G) \\ + 2(EF - 2CD)(2By + Dz + Fx + H)(2Az + Dy + Ex + G) \end{array}\right\} = o$$

übergeht; welches Ergebniß, wenn die vorgelegte Gleichung des zweiten Grades auf eine developpable Fläche sich beziehen soll, für jeden Werth von x, y, z bestehen muß. Entwickelt man die Potenzen und Producte gehörig, und ordnet man Alles nach x, y, z, so ergibt sich wegen

$$K = - Az^2 - By^2 - Cx^2 - Dyz - Exz - Fxy - Gz - Hy - Ix,$$

mit Rücksicht auf die in der neunten Vorlesung angenommene Bedeutung von L,

$$(4ABC + DEF - AF^2 - BE^2 - CD^2)L = o;$$

welche Gleichung, je nachdem man den ersten oder den zweiten Factor des linker Hand des Gleichheitszeichens erscheinenden Productes gleich Null setzt, auf eine cylindrische oder auf eine konische Fläche hindeutet.

Sieben und zwanzigste Vorlesung.

Über die Auflösung einiger, die in den vorhergehenden Vorlesungen betrachteten Flächen betreffender Aufgaben.

I. Wir haben bereits in der vier und zwanzigsten Vorlesung gezeigt, wie die Gleichung einer cylindrischen Fläche gefunden wird, deren beschreibende Gerade einer gegebenen geraden Linie parallel ist, und stets durch eine gegebene Curve hindurchgeht. Es sey nun die Gleichung einer cylindrischen Fläche zu finden, welche bei einer bestimmten Richtung der erzeugenden Geraden irgend eine gegebene Fläche umhüllt.

Sind $x = az$, $y = bz$ die Gleichungen der Geraden, welcher die Erzeugungslinie der cylindrischen Fläche parallel lauft, und bezeichnet man in Bezug auf irgend einen Punct x, y, z dieser Fläche die partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ durch p und q, so besteht für dieselbe bekanntlich die Gleichung

$$ap + bq = 1. \tag{1}$$

Gehört nun der Fläche, welche von der cylindrischen Fläche umhüllt werden soll, die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

aus welcher durch Differenziation

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{3}$$

$$\text{oder } \frac{dz}{dx} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{Q}{R}$$

folge, so müssen nicht nur allein die Coordinaten aller Puncte der Curve, in welcher die Fläche (2) von der cylindrischen berührt wird, mit jenen der letzteren übereinstimmen, sondern es müssen überdieß hinsichtlich der genannten Puncte die Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ einerlei Werthe erhalten. Setzen wir daher in (1) $p = -\frac{P}{R}$, $q = -\frac{Q}{R}$, so ergibt sich die Gleichung

$$aP + bQ + R = 0, \tag{4}$$

welche bloß für die Berührungspuncte der Fläche (2) und der cylindri-

schen Fläche gilt, oder was dasselbe ist, welche einer den geometrischen Ort dieser Berührungspuncte enthaltenden Fläche entspricht.

Da nun die durch die Gleichungen (2) und (4) bestimmte Curve der Berührungspuncte der gegebenen und der zu suchenden Fläche als die Leitungscurve der letzteren betrachtet werden kann, so ist gegenwärtige Aufgabe auf die oben erwähnte, in der vier und zwanzigsten Vorlesung aufgelöste, reducirt.

II. Auf dieselbe Art läßt sich die Gleichung einer, aus einem bestimmten Scheitel beschriebenen und eine gegebene Fläche (2) umhüllenden Kegelfläche ausmitteln. Denn man findet, vorausgesetzt, daß a, b, c die Coordinaten des Scheitels der Kegelfläche sind, die zweite Gleichung der Curve, in welcher dieselbe die gegebene Fläche berührt, wenn man die auf die auf letztere Fläche sich beziehenden Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ in die Differenzialgleichung der Kegelfläche, d. i. in

$$z - c = (x - a)p + (y - b)q$$

einführt; jene Gleichung ist nämlich

$$(5) \qquad (a - x)P + (b - y)Q + (c - z)R = 0.$$

Betrachtet man nun die durch die Gleichungen (2) und (5) vorgestellte Curve als die Leitungscurve der verlangten Kegelfläche, so hat man, um die vorgelegte Aufgabe aufzulösen, bloß die in der vier und zwanzigsten Vorlesung vorgetragene Methode anzuwenden.

Ist die mit einer cylindrischen oder mit einer konischen Fläche zu umgebende Fläche unter der Gleichung des zweiten Grades

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dyz + Exz + Fxy + Gz + Hy + Ix + K = 0$$

enthalten, so haben wir

$$P = 2Cx + Ez + Fy + I,$$
$$Q = 2By + Dz + Fx + H,$$
$$R = 2Az + Dy + Ex + G;$$

folglich ist die zweite Gleichung der Curve der Berührungspuncte beider Flächen in dem ersteren Falle

$$(2aC + bF + E)x + (aF + 2bB + D)y + (aE + bD + 2A)z$$
$$+ aI + bH + G = 0,$$

und in dem letzteren

$$(2aC + bF + cE - I)x + (aF + 2bB + cD - H)y + (aE + bD + 2cA - G)z$$
$$+ aI + bH + cG - 2(Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dyz + Exz + Fxy) = 0;$$

oder wegen

$$-(Az^2+By^2+Cx^2+Dyz+Exz+Fxy)=K+Gz+Hy+Ix:$$

$$(2aC+bF+cE+I)x+(aF+2bB+cD+H)y+(aE+bD+2cA+G)z$$
$$+aI+bH+cG+2K=0.$$

In beiden Fällen findet man also die Gleichung einer Ebene, daher wird eine Fläche der zweiten Ordnung sowohl von einer cylindrischen, wie auch von einer konischen, sie umschließenden Fläche in einer ebenen Curve, nämlich in einer Linie der zweiten Ordnung berührt.

III. Wie wir in der vier und zwanzigsten Vorlesung zeigten, hat die Gleichung jeder Rotationsfläche, deren Axe durch die Gleichungen

$$x=az+\alpha,\quad y=bz+\beta$$

ausgedrückt wird, die Form

(6) $$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=\varphi(ax+by+z).$$

Die Beschaffenheit der Function φ kann erst dann näher bestimmt werden, wenn die Gleichungen der Curve, durch deren Rotation um jene Axe die genannte Fläche beschrieben wird, bekannt sind.

Sind nämlich

(7) $$F(x, y, z)=0,\quad f(x, y, z)=0$$

die Gleichungen dieser Curve, welche offenbar mit der Gleichung (6) zugleich bestehen, so erhält man, wenn man

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=X$$
$$\text{und}\quad ax+by+z=Y$$

setzt, und diese zwei Gleichungen mit (7) verbindet, nach vollbrachter Elimination von x, y, z eine Gleichung zwischen X und Y, durch welche man das Gesetz, nach welchem X durch Y bestimmt wird, d. i. die Form der Function φ kennen lernt.

Dieß vorausgesetzt, stelle man sich vor, eine krumme Fläche, deren Gleichung

(8) $$\mathfrak{F}(x, y, z)=0$$

sey, werde mit der Axe $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ unveränderlich verbunden, und rotire um dieselbe, so läßt sich die Gleichung der dadurch erzeugten Fläche auf dem so eben angedeuteten Wege ausmitteln, wenn man die Berührungscurve der Fläche (8) mit der Rotationsfläche anzugeben im Stande ist. Eine Gleichung dieser Curve ist die Gleichung (8) selbst; zu der anderen gelangt man, wenn man die aus (8)

sich ergebenden Werthe der partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ statt p und q in die Differenzialgleichung der Rotationsfläche, nämlich in

$$(\beta - y + bz)p - (\alpha - x + az)q + a(\beta - y) - b(\alpha - x) = o$$

substituirt.

Daß übrigens diese Aufgabe nach den in der fünf und zwanzigsten Vorlesung vorgetragenen Methoden behandelt werden kann, ist für sich klar.

Jede Rotationsfläche läßt sich auch als die Einhüllungsfläche einer Folge von Kugeln betrachten, deren Mittelpuncte auf der Rotationsaxe liegen, und deren Halbmesser nach einem gegebenen Gesetze sich ändern. Behalten wir die obigen Gleichungen für die Rotationsaxe bei, und nennen wir die der Axe der z parallele Coordinate des Mittelpunctes einer der eingehüllten Kugeln γ, so ist die Gleichung derselben

(9) $(x - a\gamma - \alpha)^2 + (y - b\gamma - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \psi(\gamma)$,

wobei die Form der Function ψ von dem Gesetze abhängt, nach welchem sich der Halbmesser dieser Kugel mit γ zugleich ändert. Die Gleichung (9) gibt uns, wenn wir sie ein Mal in Bezug auf x, und das andere Mal in Bezug auf y differenziren,

$$x - a\gamma - \alpha + (z - \gamma)p = o,$$
$$y - b\gamma - \beta + (z - \gamma)q = o$$

oder

$$x - \alpha + pz - (p + a)\gamma = o,$$
$$y - \beta + qz - (q + b)\gamma = o.$$

Eliminiren wir aus diesen Gleichungen die Constante γ, so haben wir

$$(\beta - y + bz)p - (\alpha - x + az)q + a(\beta - y) - b(\alpha - x) = o,$$

welche die partielle Differenzialgleichung der Rotationsflächen ist.

IV. Da die Gleichung jeder developpablen Fläche das Resultat der Elimination der Größe a aus den zwei Gleichungen

(10) $$z = x\varphi(a) + y\psi(a) + a,$$
$$o = x\varphi_1(a) + y\psi_1(a) + 1$$

ist, wobei $\varphi_1(a)$, $\psi_1(a)$ die Differenzialquotienten $\frac{d\varphi(a)}{da}$, $\frac{d\psi(a)}{da}$ vorstellen, und $\varphi(a)$, $\psi(a)$ unbestimmte, von der besonderen Be-

schaffenheit der developpablen Fläche abhängende Functionen bedeuten, so kann diese Fläche jederzeit so eingerichtet werden, daß sie zwei Bedingungen Genüge leistet; nämlich daß sie entweder durch zwei gegebene Curven hindurchgeht, oder daß sie zwei gegebene Flächen berührt, oder endlich daß sie eine gegebene Curve in sich enthält und eine Fläche berührt. In dem letzteren Falle kann die vorgezeichnete Curve sich auch auf der zu berührenden Fläche befinden.

Fordert man, daß die Fläche (10) durch die Curve, welcher die Gleichungen

(11) $$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0$$

gehören, hindurch gehe, so müssen diese Gleichungen mit (10) zugleich Statt finden; eliminirt man aus denselben x, y, z, so ergibt sich eine Differenzialgleichung zwischen a, $\varphi(a)$, $\psi(a)$, $\varphi_1(a)$, $\psi_1(a)$, welche

(12) $$\Phi = 0$$

heißen mag, durch deren Integration eine Relation zwischen $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ festgesetzt wird. Da die zweite der Gleichungen (10) das in Bezug auf a, während z, folglich auch x und y constant bleiben, genommene Differenzial der ersten Gleichung ist, so befindet man sich im Stande, das vollständige Integral der Differenzialgleichung (12) sogleich anzugeben. Dasselbe ist nämlich die erste der Gleichungen (10), wenn man darin statt z eine willkürliche Constante C, folglich statt x und y die von C den Gleichungen

(13) $$F(A, B, C) = 0, \quad f(A, B, C) = 0$$

gemäß abhängenden Constanten A und B schreibt, d. h. dieses Integral ist die Gleichung

(14) $$C = A\varphi(a) + B\psi(a) + a.$$

Allein das Stattfinden dieser letzteren Gleichung hat nichts weiter zur Folge, als daß die developpable Fläche (10) durch den Punct der Curve (11), dessen Coordinaten A, B, C sind, geht; es kann mithin in dem vorliegenden Falle von dem allgemeinen Integral der Differenzialgleichung (12) kein Gebrauch gemacht werden, sondern man ist genöthiget, sich an die besondere Auflösung dieser Differenzialgleichung zu wenden, welche man erhält, wenn man die Gleichung (14) mit Rücksicht auf (13) in Bezug auf C differenzirt, und das Resultat dieser Operation, d. h. die Gleichung

$$(15) \qquad 1 = \frac{dA}{dC}\varphi(a) + \frac{dB}{dC}\psi(a)$$

durch Elimination von A, B, C mit (13) und (14) verbindet. Die hieraus entspringende Endgleichung, welche durch

$$(16) \qquad \Psi(\varphi(a), \psi(a), a) = 0$$

vorgestellt werde, gibt die, obiger Bedingung gemäß, zwischen den Functionen $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ bestehende Relation an.

Man hätte auch durch die Bemerkung zum Ziele gelangen können, daß die erste der Gleichungen (10), in Verbindung mit den Gleichungen (11), für jeden Werth von z gelten, folglich dieselbe Eigenschaft auch ihrem Differenzial zukommen muß, wenn man nur bei dem Differenziren a als eine Function von z behandelt. Man erhält hiedurch

$$1 = \frac{dx}{dz}\varphi(a) + x\frac{d\varphi(a)}{da}\cdot\frac{da}{dz} + \frac{dy}{dz}\psi(a) + y\frac{d\psi(a)}{da}\cdot\frac{da}{dz} + \frac{da}{dz}$$

oder

$$1 = \frac{dx}{dz}\varphi(a) + \frac{dy}{dz}\psi(a) + (x\varphi_1(a) + y\psi_1(a) + 1)\frac{da}{dz},$$

welche Gleichung wegen der zweiten der Gleichungen (10) in die für jeden Werth von z richtige Gleichung

$$(17) \qquad 1 = \frac{dx}{dz}\varphi(a) + \frac{dy}{dz}\psi(a)$$

übergeht. Diese Gleichung und die erste in (10), können nur in so fern für jeden Werth von z bestehen, als $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ der Gleichung Genüge leisten, welche die Elimination von z aus den genannten Gleichungen, mit Zuziehung von (11), darbietet. Die Vergleichung von (10), (11), (17) mit (14), (13), (15) lehrt, daß diese Bedingungsgleichung mit (16) nothwendig eine und dieselbe seyn muß.

Sind nun

$$(18) \qquad F'(x, y, z) = 0, \quad f'(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen einer zweiten Curve, welche ebenfalls in der developpablen Fläche (10) liegen soll, so wird man durch eine ähnliche Rechnung auf eine zweite Gleichung zwischen $\varphi(a)$ und $\psi(a)$, welche

$$(19) \qquad \Psi'(\varphi(a), \psi(a), a) = 0$$

heißen mag, geführt, so, daß man sich nun im Stande befindet, sowohl $\varphi(a)$ als auch $\psi(a)$ durch a auszudrücken, und somit aus den beiden Gleichungen (10) durch Elimination von a die verlangte Gleichung

der durch die Curven (11) und (18) hindurchgehenden developpablen Fläche abzuleiten.

Soll die developpable Fläche (10) eine gegebene Fläche

(20) $$F(x, y, z) = 0$$

ringsum berühren, so müssen die aus dieser Gleichung sich ergebenden Werthe von z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ für alle den Berührungspuncten zugehörenden Werthe der Variablen x und y mit den aus den Gleichungen (10) gefolgerten Werthen der gleichnamigen Größen übereinstimmen. Nun gibt uns die erste der Gleichungen (10)

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(a) + (x\varphi_1(a) + y\psi_1(a) + 1)\frac{da}{dx} = \varphi(a),$$

$$\frac{dz}{dy} = \psi(a) + (x\varphi_1(a) + y\psi_1(a) + 1)\frac{da}{dy} = \psi(a);$$

wir haben daher, wenn wir das Differenzial der Gleichung (20) durch

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

anzeigen, die Gleichungen

(21) $$P + R\varphi(a) = 0, \quad Q + R\psi(a) = 0,$$

welche mit (20) und mit der ersten der Gleichungen (10) verbunden, nach verrichteter Elimination von x, y, z die der geforderten Beschaffenheit der developpablen Fläche entsprechende, zwischen den Functionen $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ obwaltende Beziehung

(22) $$\Omega(\varphi(a), \psi(a), a) = 0$$

darbietet.

Verlangt man, daß die developpable Fläche eine zweite Fläche, deren Gleichung

(23) $$F'(x, y, z) = 0$$

ist, umhülle, so wird man auf demselben Wege eine zweite Bedingungsgleichung

(24) $$\Omega'(\varphi(a), \psi(a), a) = 0$$

zwischen den Functionen $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ ausmitteln, und mit Hülfe der beiden nun vorhandenen Gleichungen (22), (24) die Formen dieser Functionen bestimmen, so, daß der Angabe der Gleichung der developpablen Fläche, welche die Flächen (20) und (23) zugleich umhüllt, keine Schwierigkeit mehr im Wege steht.

Da zwei Flächen im Allgemeinen zwei verschiedene sie zugleich

berührende developpable Flächen zulassen, so wird die aus den Gleichungen (10) abgeleitete Endgleichung im Allgemeinen in zwei Factoren zerfallen, deren jeder gleich Null gesetzt, eine einzelne dieser Berührungsflächen darstellt.

Verlangt man, daß die developpable Fläche durch eine gegebene Curve (11) geführt werde, und eine gegebene Fläche (20) berühre, so bestimme man die Functionen $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ mittelst der Gleichungen (16) und (22).

Befindet sich endlich die Curve, durch welche die developpable Fläche gehen soll, auf der zu berührenden Fläche (20) selbst, so ergeben sich die Functionen $\varphi(a)$ und $\psi(a)$, wenn man die Gleichung

(25) $$F''(x, y, z) = 0,$$

welche die Lage dieser Curve auf der Fläche (20) festsetzt, mit den Gleichungen (10), (20), (21) zusammen bestehen läßt.

Acht und zwanzigste Vorlesung.

Über die Evolution wie immer beschaffener krummer Linien.

Die Kenntnisse, welche wir uns bereits im Gebiete der analytischen Geometrie erworben haben, setzen uns in den Stand, die in der zwei und zwanzigsten Vorlesung vorgetragene Theorie der Abwickelung der ebenen Curven zu erweitern, und auf alle anderen, nicht in einer und derselben Ebene darstellbaren Curven zu übertragen.

Stellen wir uns vor, eine gerade Linie, welche nie aufhört eine gegebene krumme Linie zu berühren, werde an letzterer so fortbewegt, daß immer die nächstfolgenden Puncte der Geraden mit der Curve zusammen kommen, die vorhergehenden also sich davon entfernen, und daß jedes bestimmte Stück der Geraden demjenigen Bogen der Curve gleich ist, mit dessen Endpuncten die Endpuncte dieses Stückes zusammenfielen; oder mit anderen Worten: die Gerade werde, ohne sich nach der Richtung ihrer Länge zu verschieben, an der Curve in eine wälzende Bewegung versetzt, so beschreibt jeder beliebige Punct der Geraden eine krumme Linie, welche die Evolvente der gegebenen Curve heißen soll, während die letztere in Bezug auf erstere die Evolute genannt wird.

Da die Position des die Evolvente verzeichnenden Punctes auf der beweglichen Geraden willkürlich ist, so gehören jeder Evolute unzählige Evolventen. Aus der sechs und zwanzigsten Vorlesung erhellet, daß alle diese Evolventen in der developpablen Fläche sich befinden, welcher die Evolute als Wendungscurve zugehört. Um die Gleichung jeder einzelnen Evolvente zu entwickeln, seyen x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des beschreibenden Punctes, während die Evolute von der beweglichen Geraden im Puncte ξ, v, ζ berührt wird, so bestehen bekanntlich die Gleichungen

$$(1)\qquad x - \xi = (z - \zeta)\frac{d\xi}{d\zeta},$$

$$y - v = (z - \zeta)\frac{dv}{d\zeta};$$

ferner ist, wenn λ das zwischen den Puncten x, y, z und ξ, v, ζ enthaltene Stück der beweglichen Geraden anzeigt:

(2) $$(x-\xi)^2 + (y-v)^2 + (z-\zeta)^2 = \lambda^2;$$

endlich, wenn σ die Länge des von einem fixen Puncte der Evolute an gerechneten, in dem Puncte ξ, v, ζ sich endigenden Bogens dieser Curve bedeutet, der Natur der Evolution gemäß,

(3) $$d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + dv^2 + d\zeta^2} = d\lambda$$

oder $\sigma + Const. = \lambda$;

wir haben demnach, wenn wir die Gleichungen (1) mit (2) verbinden,

(4) $$z - \zeta = \pm \frac{\lambda d\zeta}{d\lambda},$$

folglich den Gleichungen (1) gemäß

(5) $$y - v = \pm \frac{\lambda dv}{d\lambda}, \quad x - \xi = \pm \frac{\lambda d\xi}{d\lambda},$$

wobei rechter Hand des Gleichheitszeichens, nach Beschaffenheit der Umstände, durchgehends entweder die oberen oder die unteren Zeichen genommen werden müssen. Das letztere ist der Fall, wenn ξ, v, ζ, λ zugleich wachsen.

Die Gleichungen der Evolute, welche wir durch

(6) $$\varphi(\xi, v, \zeta) = 0, \quad \psi(\xi, v, \zeta) = 0$$

vorstellen wollen, geben λ wie auch $\frac{d\xi}{d\lambda}$, $\frac{dv}{d\lambda}$, $\frac{d\zeta}{d\lambda}$ als Functionen von ξ, v, ζ, oder vielmehr als Functionen einer einzigen dieser Variablen; schaffen wir daher aus den Gleichungen (4), (5), (6) die genannten Variablen weg, so haben wir die beiden Gleichungen der Evolvente. Welche unter den unendlich vielen möglichen Evolventen durch diese Gleichungen vorgestellt wird, hängt von dem Werthe der Constante in der Gleichung $\sigma + Const. = \lambda$ ab.

Es seyen nun die Gleichungen der Evolvente

(7) $$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0$$

gegeben, und die Gleichungen der zugehörigen Evolute zu finden.

Zu diesem Ende multipliciren wir die Gleichungen (4) und (5), in welchen wir die unteren Zeichen gelten lassen, der Reihe nach mit $d\zeta$, dv, $d\xi$, und addiren die Producte, so ergibt sich

$$(x-\xi)\, d\xi + (y-v)\, dv + (z-\zeta)\, d\zeta = -\lambda d\lambda.$$

Aber aus (2) folgt

$$(x-\xi)(dx-d\xi) + (y-v)(dy-dv) + (z-\zeta)(dz-d\zeta) = \lambda d\lambda;$$

daher haben wir, wenn wir diese Gleichung zur vorhergehenden addiren:

(8) $(x - \xi)\, dx + (y - v)\, dy + (z - \zeta)\, dz = 0.$

Das Differenzial der so eben gefundenen Gleichung ist, wenn wir dx als constant behandeln:

(9) $(y - v)\, d^2y + (z - \zeta)\, d^2z$
$+ dx^2 + dy^2 + dz^2 - (d\xi dx + dv dy + d\zeta dz) = 0.$

Allein durch Verbindung der Gleichungen (1) mit (8) ergibt sich

(10) $d\xi dx + dv dy + d\zeta dz = 0,$

mithin ist

(11) $(y - v)\, d^2y + (z - \zeta)\, d^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$

Die Elimination der Variablen x, y, z mittelst der Gleichungen (7), (8) und (11) führt auf eine endliche Gleichung zwischen ξ, v, ζ, welche wir durch

(12) $\Phi(\xi, v, \zeta) = 0$

vorstellen wollen; und diese ist offenbar die Gleichung einer krummen Fläche, welche die der Curve (7) entsprechende Evolute in sich enthält.

Um eine zweite Gleichung dieser Evolute zu erhalten, combinire man eine der Gleichungen (1) mit (7) und mit einer der Gleichungen (8) oder (11). Das Resultat der Elimination von x, y, z wird eine Gleichung zwischen ξ, v, ζ und den Differenzialien zweier der letzteren Größen seyn, welche man mit Hülfe der Gleichung (12) auf eine gewöhnliche Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit zwei veränderlichen Größen reduciren kann. Integrirt man die letztere Gleichung, so hat man die zweite Gleichung der verlangten Evolute. Aber in diesem Integral erscheint eine willkürliche Constante; ertheilt man derselben verschiedene Werthe, so gelangt man zu verschiedenen Curven, welche sämmtlich auf der Fläche (12) liegen, und durch Evolution die Curve (7) erzeugen. Es läßt also jede Curve unzählige Evoluten zu.

In Bezug auf die letzterwähnte Differenzialgleichung ist es einerlei, ob man die erste oder die zweite der Gleichungen (1), oder die aus denselben folgende Gleichung

$$(x - \xi)\, dv = (y - v)\, d\xi$$

mit (7), (8) und (11) in Verbindung bringt. Denn geht man von den Gleichungen (8) und (11) aus, so gelangt man, weil aus (8) durch Differenziation die Gleichung (9) entsteht, durch Verbindung dieser letzteren mit (11), zur Gleichung (10). Läßt man nun die erste

der Gleichungen (1) gelten, so verwandelt sich dadurch (8) in

$$(y - v)\, dy + (z - z) \frac{d\xi dx + d\zeta dz}{d\zeta} = 0;$$

oder da man wegen (10)

$$d\xi dx + dz dz = - dv dy \text{ hat,}$$

$$\text{in } y - v = (z - z) \frac{dv}{d\zeta}.$$

Aber dieß ist die zweite der Gleichungen (1); man sieht daher, daß jede der Gleichungen (1) eine nothwendige Folge der anderen wird, sobald man diese mit (8) und (11) zusammenstellt.

Wir wollen jetzt die Beschaffenheit der Fläche (12), welche der geometrische Ort sämmtlicher Evoluten der Curve (7) ist, näher untersuchen.

Die Gleichung (8) stimmt, wenn man x', y', z' statt ξ, v, z setzt, mit der in der dreizehnten Vorlesung erhaltenen Gleichung (5) überein; sie gehört demnach, hinsichtlich der Variablen ξ, v, z, der zu dem Puncte x, y, z der Curve (7) geführten Normalebene.

Da nun die Gleichung (11) das Differenzial der Gleichung (8) ist, in so fern bloß x, y, z als variabel behandelt werden; so stellt die Gleichung (12), der in den vorhergehenden Vorlesungen vorgetragenen Theorie gemäß, jene developpable Fläche dar, welche sämmtliche Normalebenen der Curve (7) berührt oder einhüllt.

Aber nicht jede auf dieser developpablen Fläche verzeichnete Curve ist eine Evolute der Curve (7); hiezu wird erfordert, daß die Gleichung, welche die erstere Curve auf der genannten Fläche bestimmt, und welche sich mit Hülfe der Gleichung (12) stets auf eine solche Form bringen läßt, daß in ihr bloß zwei der Größen ξ, v, z erscheinen, einer der Gleichungen (1) Genüge leiste.

Dieß vorausgesetzt, werden wir im Stande seyn zu entscheiden, ob die Curve, welche durch sämmtliche Krümmungsmittelpuncte der Curve (7) hindurchgeht, und welche, da die Gleichungen (8) und (11) mit den in der fünfzehnten Vorlesung erhaltenen Gleichungen (11) und (12) übereinstimmen, nothwendig auf der Fläche (12) liegt, im Allgemeinen eine Evolute der Curve (7) ist, so wie dieß, der zwei und zwanzigsten Vorlesung gemäß, bei ebenen Curven wirklich Statt findet.

Die beiden Gleichungen des geometrischen Ortes der Krümmungsmittelpuncte einer beliebigen Curve ergeben sich, wenn man aus den Gleichungen (18) der fünfzehnten Vorlesung mittelst der Gleichungen

der gegebenen Curve die Coordinaten x, y, z wegschafft. Um jedoch zu sehen, ob diese Gleichungen der ersten der Gleichungen (1), nämlich

$$(x - \xi)\, d\zeta - (z - \zeta)\, d\xi = 0$$

Genüge leisten, ist es nicht nöthig diese Elimination wirklich vorzunehmen. Substituiren wir die Werthe von $x - \xi$, $d\xi$ und $z - \zeta$, $d\zeta$ gerade so, wie sie die am angeführten Orte befindlichen Gleichungen (18) darbieten, in obige Gleichungen, so haben wir, nach Weglassung des allen Gliedern gemeinschaftlichen Factors $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}$

$$(Z dy - Y dz)\left[dz - d\,.\,\frac{ds^2 (Y dx - X dy)}{X^2 + Y^2 + Z^2}\right]$$
$$- (Y dx - X dy)\left[dx - d\,.\,\frac{ds^2 (Z dy - Y dz)}{X^2 + Y^2 + Z^2}\right] = 0,$$

wobei $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ und

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = Z,\ dz\,d^2x - dx\,d^2z = Y,\ dy\,d^2z - dz\,d^2y = X$$

ist. Es kömmt nun darauf an, ob die so eben gefundene Gleichung eine identische ist, oder nicht. Im ersten Falle ist der geometrische Ort der Krümmungsmittelpuncte einer Curve jederzeit eine Evolute derselben; im letzteren hingegen wird durch diese Gleichung die Bedingung ausgesprochen, unter welcher einer Curve die erwähnte Eigenschaft zukömmt.

Verrichten wir die in genannter Gleichung angezeigten Differenziationen, so geht sie nach gehöriger Reduction in

$$(Z dy - Y dz)\, dz - (Y dx - X dy)\, dx$$
$$+ \frac{ds^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}\left[(Y dx - X dy)\, d(Z dy - Y dz)\right.$$
$$\left.- (Z dy - Y dz)\, d(Y dx - X dy)\right] = 0$$

über, woraus durch fernere Rechnung

$$(X dx + Z dz)\, dy - Y(dx^2 + dy^2)$$
$$+ \frac{ds^2}{X^2+Y^2+Z^2}\left\{\begin{array}{l}[(YdZ - ZdY)dx + (ZdX - XdZ)dy + (XdY - YdX)dz]\, dy \\ + [X(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + Y(dz\,d^2x - dx\,d^2z) \\ \qquad + Z(dx\,d^2y - dy\,d^2x)]\, Y\end{array}\right\} = 0$$

oder

$$(X dx + Z dz)\, dy - Y(dx^2 + dy^2) + Y ds^2$$
$$+ \frac{ds^2\, dy}{X^2+Y^2+Z^2}[(YdZ - ZdY)dx + (ZdX - XdZ)dy + (XdY - YdX)dz] = 0$$

folgt. Setzt man hier $dx^2 + dy^2 + dz^2$ statt ds^2, und bedenkt man, daß

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

ist, so ergibt sich die Gleichung

$$(YdZ - ZdY) dx + (ZdX - XdZ) dy + (XdY - YdX) dz = 0$$

oder

$$(Ydz - Zdy) dX + (Zdx - Xdz) dY + (Xdy - Ydx) dZ = 0.$$

Mittelst der durch X, Y, Z vorgestellten Ausdrücke findet man

$$Ydz - Zdy = ds^3 \,.\, d\frac{dx}{ds},$$

$$Zdx - Xdz = ds^3 \,.\, d\frac{dy}{ds},$$

$$Xdy - Ydx = ds^3 \,.\, d\frac{dz}{ds},$$

daher haben wir es nur mehr mit der Gleichung

$$d\frac{dx}{ds} dX + d\frac{dy}{ds} dY + d\frac{dz}{ds} dZ = 0$$

zu thun, welche, da sie auch auf die Form

$$d\left(\frac{Xdx + Ydy + Zdz}{ds}\right) - \left(Xd^2\frac{dx}{ds} + Yd^2\frac{dy}{ds} + Zd^2\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

gebracht werden kann, wegen dem Verschwinden des ersten Gliedes, in

$$Xd^2\frac{dx}{ds} + Yd^2\frac{dy}{ds} + Zd^2\frac{dz}{ds} = 0$$

übergeht. Diese Gleichung vereinfacht sich abermals, wenn man die Differenzialien $d^2\frac{dx}{ds}$, $d^2\frac{dy}{ds}$, $d^2\frac{dz}{ds}$ entwickelt, und auf die Gleichungen

$Xdx + Ydy + Zdz = 0$ und $Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = 0$

Rücksicht nimmt, wodurch man endlich

$$Xd^3x + Yd^3y + Zd^3z = 0$$

erhält. Bis jetzt ist noch kein Differenzial als constant angenommen worden. Wir können daher, so wie es bereits früher geschehen ist, d^2x, und folglich auch d^3x, gleich Null setzen.

Hiedurch fällt aus der vorliegenden Gleichung das erste Glied weg; ferner wird

$$Y = -dxd^2z, \quad Z = dxd^2y,$$

also hat man

$$d^2z\, d^3y - d^2y\, d^3z = 0$$

$$\text{oder} \quad \frac{d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y}{d^2y^2} = d\,\frac{d^2z}{d^2y} = 0,$$

woraus durch Integration

$$d^2z = C d^2y$$

folgt, wobei C eine Constante bedeutet. Integrirt man diese Gleichung, oder vielmehr die ihr gleichgeltende

$$\frac{d^2z}{dx} = \frac{C d^2y}{dx}$$

nochmals, so ergibt sich

$$\frac{dz'}{dx} = \frac{C dy}{dx} + B \quad \text{oder} \quad dz = C dy + B dx,$$

und hieraus endlich

$$z = Cy + Bx + A,$$

wobei B und A ebenfalls beständige Größen anzeigen. Da nun dieß die Gleichung einer Ebene ist, so sieht man, daß nur für ebene Curven der geometrische Ort der Krümmungsmittelpuncte zugleich eine Evolute seyn kann.

Zu den hier erhaltenen Resultaten gelangt man auch durch einfache, auf die Methode der Grenzen gebaute geometrische Betrachtungen, welche wir, da sie bei vielen Untersuchungen der Eigenschaften krummer Linien weitläufige und künstliche Rechnungen entbehrlich machen, in Kürze vortragen wollen.

Man nehme in einer Curve AB (Fig. 20) mehrere von einander gleich weit entfernte Puncte M, M_1, M_2, M_3, M_4, ... an, verbinde je zwei nächste derselben durch gerade Linien, wodurch ein der Curve eingeschriebenes gleichseitiges Polygon entsteht, und führe durch die Halbirungspuncte N_1, N_2, N_3, N_4, ... seiner Seiten MM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, ... Ebenen, deren jede auf der ihr zugehörigen Seite senkrecht steht. Jede dieser Ebenen schneidet die nächstvorhergehende in einer geraden Linie. Es seyen H_1h_1, H_2h_2, H_3h_3, H_4h_4, ... die auf einander folgenden Durchschnittslinien genannter Ebenen. Da der Punct N_2 und die Geraden H_1h_1, H_2h_2 in einerlei Ebene sich befinden, so wird eine Gerade, welche man aus N_2 zu einem beliebigen Puncte K_1 der Geraden H_1h_1 zieht, der H_2h_2 in irgend einem Puncte K_2 begegnen; durch N_3 und K_2 ziehe man wieder eine Gerade, welche die H_3h_3 aus demselben Grunde in K_3 trifft, u. s. w. Wird nun um das auf diese Weise gebildete Polygon $K_1K_2K_3K_4$....

ein Faden gelegt, und derselbe von K_1 weg so ausgespannt, daß sein Endpunct mit N_1 zusammenfällt, hernach aber von dem genannten Polygone abgewickelt, ohne daß seine Richtung aufhört, die Seiten des Polygons $M M_1 M_2 M_3 M_4$ .... zu verlassen, so muß der Endpunct dieses Fadens nach und nach in N_2, N_3, N_4, ... eintreffen, folglich ein System von Kreisbögen beschreiben, deren jeder zwei Seiten des Polygons $M M_1 M_2 M_3 M_4$ ... berührt. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich sogleich, wenn man bedenkt, daß den einfachsten Sätzen der Elementargeometrie zu Folge, K_1 von N_1 und N_2; K_2 von N_2 und N_3; u. s. w. gleich weit entfernt, und $K_1 N_1$ auf $M M_1$, $K_2 N_2$ auf $M_1 M_2$ u. s. w. senkrecht ist.

Läßt man nun die Puncte M, M_1, M_2, M_3, M_4, ... einander unendlich nahe kommen, so nähert sich sowohl das Polygon $M M_1 M_2 M_3 M_4$ ..., wie auch das System der erwähnten Kreisbogen unendlich der Curve AB; der Inbegriff der zwischen den Geraden $H_1 h_1$, $H_2 h_2$, $H_3 h_3$, $H_4 h_4$, ... enthaltenen Theile der Ebenen hingegen einer developpablen Fläche, und das Polygon $K_1 K_2 K_3 K_4$ ... einer auf dieser Fläche verzeichneten Curve, durch deren Evolution die Curve AB entsteht. Da die Lage des Punctes K_1, durch welche die Position der Grenzcurve für das Polygon $K_1 K_2 K_3 K_4$ ... auf der developpablen Fläche bedingt wird, willkürlich ist, so sind daselbst nothwendig nach unendlich viele andere Evoluten der Curve AB möglich.

Der Punct C_1, in welchem sich die beiden aus N_1 und N_2 auf $H_1 h_1$ fallenden Perpendikel begegnen, verwandelt sich bei der unendlichen Annäherung der Puncte M, M_1, M_2 in den Krümmungsmittelpunct der Curve AB für M_1. Der nächste Punct der durch C_1 gehenden Evolute von AB befindet sich in C_2, wo die Verlängerung von $N_2 C_1$ mit $H_2 h_2$ zusammentrifft. Aber C_2 ist nur in so fern ein Krümmungsmittelpunct der Curve AB, als $N_2 C_2$ auf $H_2 h_2$ senkrecht steht, was nur dann Statt findet, wenn $H_2 h_2$ mit $H_1 h_1$ parallel ist, oder wenn die drei auf einander folgenden Geraden $M M_1$, $M_1 M_2$, $M_2 M_3$ in einerlei Ebene liegen. Es ist also die Curve der Krümmungsmittelpuncte für AB nur dann eine Evolute derselben, wenn AB in einer Ebene verzeichnet werden kann; und dann ist die developpable Fläche, welche alle Evoluten von AB enthält, cylindrisch. Auch befinden sich umgekehrt in einer cylindrischen Fläche bloß Evoluten ebener Curven.

Neun und zwanzigste Vorlesung.

Über den Gebrauch der Variationsrechnung bei der Bestimmung der mit einer Eigenschaft des Größten oder Kleinsten begabten Linien und Flächen.

Erste Aufgabe. Man soll die kürzeste Linie finden, welche von einem gegebenen Puncte zu einem anderen gezogen werden kann.

Auflösung. Es seyen a_1, b_1, c_1 die rechtwinkligen Coordinaten des einen, und a_2, b_2, c_2 jene des anderen Endpunctes der zu bestimmenden Linie, ferner x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punctes derselben, so wird ihre Länge s, wenn man y und z als gewisse, durch die Gleichungen der genannten Linie gegebene, Functionen von x betrachtet, durch das von $x = a_1$ bis $x = a_2$ ausgedehnte Integral

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

ausgedrückt. Kömmt die geforderte Eigenschaft dieser Linie wirklich zu, so muß die Variation, welche das angeführte Integral erleidet, wenn die Gestalt derselben unendlich wenig geändert wird, verschwinden, d. h. es muß

$$\delta \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 0$$

seyn. Aus dieser Gleichung folgt

$$\int \delta \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = 0.$$

Die letztere Gleichung geht, wenn man die Ordnung der Zeichen d und δ verwechselt, und sodann nach der bekannten Formel

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

integrirt, in

$$\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} - \int \left(\delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

über, wobei im zweiten Gliede, der Kürze wegen, ds statt $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ gesetzt worden ist. Da aber die Integration an die oben genannten Grenzen gebunden ist, so müssen dieselben bei dem

ersten Gliede sogleich in Anwendung gebracht werden; wir haben also

$$\frac{da_2\,\delta a_2 + db_2\,\delta b_2 + dc_2\,\delta c_2}{\sqrt{da_2^2 + db_2^2 + dc_2^2}} - \frac{da_1\,\delta a_1 + db_1\,\delta b_1 + dc_1\,\delta c_1}{\sqrt{da_1^2 + db_1^2 + dc_1^2}}$$

$$- \int \left(\delta x\, d\,\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\,\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\,\frac{dz}{ds} \right) = 0,$$

welche Gleichung, in so ferne a_1 und a_2 von einander unabhängig sind, in folgende drei Gleichungen

$$da_1\,\delta a_1 + db_1\,\delta b_1 + dc_1\,\delta c_1 = 0,$$
$$da_2\,\delta a_2 + db_2\,\delta b_2 + dc_2\,\delta c_2 = 0,$$
$$\delta x\, d\,\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\,\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\,\frac{dz}{ds} = 0$$

zerfällt. Die dritte dieser Gleichungen gibt die Gestalt der zu suchenden Linie an; wir wollen uns daher zuerst mit ihr beschäftigen.

Kann diese Linie wie immer im Raume gezogen werden, so sind die Variationen δx, δy, δz völlig willkürlich; die genannte Gleichung gibt uns daher

$$d\,\frac{dx}{ds} = 0, \quad d\,\frac{dy}{ds} = 0, \quad d\,\frac{dz}{ds} = 0,$$

woraus durch Integration

$$\frac{dx}{ds} = C_1, \quad \frac{dy}{ds} = C_2, \quad \frac{dz}{ds} = C_3$$

erhalten wird, wobei C_1, C_2, C_3 beliebige Constanten bezeichnen.

Verbinden wir die erste und zweite Gleichung mit der dritten, so ergibt sich, wenn wir A statt $\frac{C_1}{C_3}$, und B statt $\frac{C_2}{C_3}$ schreiben:

$$dx = A\,dz, \quad dy = B\,dz;$$

und hieraus, wenn α und β beständige Größen sind:

$$x = Az + \alpha, \quad y = Bz + \beta,$$

welche Gleichungen einer geraden Linie gehören, wie es den ersten Principien der Geometrie gemäß ist.

Soll aber von einem Puncte zu einem andern auf einer vorgeschriebenen krummen Fläche, deren Differenzialgleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

sey, die kürzeste Linie gezogen werden, so sind die Variationen δx, δy, δz an die Gleichung dieser Fläche gebunden, denn bei dem Übergange unserer Linie in eine von ihr unendlich wenig verschiedene ist sie

immer genöthigt auf der gegebenen Fläche zu bleiben. Es besteht also zwischen den genannten Variationen die Gleichung

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y.$$

Verbindet man dieselbe mit der Gleichung

$$\delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds} = 0,$$

so hat man

$$\left(d\frac{dx}{ds} + p\,d\frac{dz}{ds}\right)\delta x + \left(d\frac{dy}{ds} + q\,d\frac{dz}{ds}\right)\delta y = 0,$$

woraus wegen der Independenz von δx und δy, die Gleichungen

$$d\frac{dx}{ds} + p\,d\frac{dz}{ds} = 0, \quad d\frac{dy}{ds} + q\,d\frac{dz}{ds} = 0$$

folgen. Wird eine oder die andere derselben integrirt, so hat man die Gleichung einer Fläche, welche die gegebene Fläche in einer mit der geforderten Eigenschaft versehenen Curve durchschneidet. Statt jeder dieser zwei Gleichungen kann man auch die aus ihrer Verbindung entspringende

$$p\,d\frac{dy}{ds} - q\,d\frac{dx}{ds} = 0$$

nehmen. Es wird hier am rechten Orte seyn, die Bedeutung dieser letzteren Gleichung genauer in das Auge zu fassen.

Mit Hülfe einer leichten Rechnung findet man, die Gleichungen $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ und $ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z$ berücksichtigend:

$$d\frac{dx}{ds} = \frac{Y\,dz - Z\,dy}{ds^3}, \quad d\frac{dy}{ds} = \frac{Z\,dx - X\,dz}{ds^3},$$

wobei

$$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y,\; Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z,\; Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x$$

ist. Substituirt man diese Resultate in obige Gleichung, so erhält man

$$p(Z\,dx - X\,dz) + q(Z\,dy - Y\,dz) = 0$$

oder $(pX + qY)\,dz - Z(p\,dx + q\,dy) = 0$;

mithin, wegen $dz = p\,dx + q\,dy$:

$$pX + qY - Z = 0.$$

Wie aus Ende der fünfzehnten Vorlesung erhellet, ist

$$X(x' - x) + Y(y' - y) + Z(z' - z) = 0$$

die allgemeine Gleichung der zu dem Puncte x, y, z gehörenden Krümmungsebene jeder Curve; ferner ist

$$p(x'-x) + q(y'-y) - (z'-z) = 0$$

die Gleichung der Ebene, welche die Fläche $dz = p\,dx + q\,dy$ in dem Puncte x, y, z berührt; beide Ebenen stehen, der Gleichung $pX + qY - Z = 0$ zu Folge, auf einander senkrecht: es besitzt demnach die kürzeste Linie, welche zwei Puncte einer beliebigen Fläche mit einander verbindet, die Eigenschaft, daß die Ebene, in welcher je zwei nächste Tangenten dieser Linie liegen, der Fläche unter einem rechten Winkel begegnet

Wir haben nun noch die Bedeutung der Gleichungen

$$da_1\,\delta a_1 + db_1\,\delta b_1 + dc_1\,\delta c_1 = 0,$$
$$da_2\,\delta a_2 + db_2\,\delta b_2 + dc_2\,\delta c_2 = 0$$

zu erörtern. Dieselben beziehen sich auf die Position des Anfangs- und Endpunctes der kürzesten Linie. Sind diese Puncte der Lage nach völlig bestimmt, so lassen ihre Coordinaten keine Variationen zu, d. h. es verschwinden die Größen δa_1, δb_1, δc_1, δa_2, δb_2, δc_2, und diese Gleichungen brauchen nicht weiter beachtet zu werden. Anders verhält sich die Sache, wenn über die Lage eines der genannten Puncte, oder beider, nichts weiter festgesetzt ist, als daß sie sich auf einer gegebenen krummen Linie oder auf einer gegebenen krummen Fläche befinden sollen. In diesen Fällen bestimmen obige Gleichungen die Neigung der kürzesten Linie gegen die gegebenen krummen Linien oder Flächen. Sie sagen nämlich, daß die kürzeste Linie, welche zwischen zwei Curven oder krummen Flächen gezogen werden kann, dieselben rechtwinklig durchschneidet. In der That, soll der Punct a_1, b_1, c_1 auf einer gegebenen Curve liegen, so müssen die Variationen δa_1, δb_1, δc_1 den Gleichungen dieser Curve Genüge leisten. Die Gleichungen der zu dem Puncte a_1, b_1, c_1 gehörenden Tangente der genannten Curve sind

$$x' - a_1 = (z' - c_1)\frac{\delta a_1}{\delta c_1},\quad y' - b_1 = (z' - c_1)\frac{\delta b_1}{\delta c_1};$$

ferner die Gleichungen der zu eben demselben Puncte geführten Tangente der kürzesten Linie:

$$x' - a_1 = (z' - c_1)\frac{da_1}{dc_1},\quad y' - b_1 = (z' - c_1)\frac{db_1}{dc_1}.$$

Die Bedingung, unter welcher beide Tangenten auf einander senkrecht stehen, wird durch die Gleichung

$\frac{da_1}{dc_1} \cdot \frac{\delta a_1}{\delta c_1} + \frac{db_1}{dc_1} \cdot \frac{\delta b_1}{\delta c_1} + 1 = 0$ oder $da_1 \delta a_1 + db_1 \delta b_1 + dc_1 \delta c_1 = 0$ ausgedrückt, welche mit der ersten der obigen Gleichungen übereinstimmt.

Soll aber der Punct a_1, b_1, c_1 auf einer Fläche, deren Differenzialgleichung $dz = P dx + Q dy$ ist, sich befinden, so muß

$$\delta c_1 = P \delta a_1 + Q \delta b_1$$

seyn, folglich geht die genannte Gleichung in

$$(da_1 + P dc_1)\, \delta a_1 + (db_1 + Q dc_1)\, \delta b_1 = 0$$

über, welche wegen der Willkürlichkeit von δa_1 und δb_1 die Gleichungen

$$da_1 + P dc_1 = 0, \quad db_1 + Q dc_1 = 0$$

oder $\frac{da_1}{dc_1} = - P, \quad \frac{db_1}{dc_1} = - Q$

darbietet. Dieselben findet man aber auch, wenn man um die Bedingungen fragt, unter welchen die zum Puncte a_1, b_1, c_1 der kürzesten Linie gezogene Tangente die zu demselben Puncte gehörende Berührungsebene der gegebenen Fläche unter einem rechten Winkel trifft.

Zweite Aufgabe. Es wird die Gleichung der Fläche verlangt, welche in Bezug auf gegebene Grenzen complanirt, hinsichtlich aller durch dieselben Grenzen geführten Flächen ein Minimum darbietet.

Auflösung. Der Inhalt eines Stückes der Fläche, deren Differenzialgleichung $dz = p dx + q dy$ ist, wird durch das zwischen den gehörigen Grenzen genommene Integral

$$\int\int dx\, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$$

ausgedrückt, in welchem die eine Integration auf die Veränderliche x, und die andere auf y sich bezieht. Für die verlangte Fläche muß die Variation dieses Integrals gleich Null werden.

Nehmen wir die Grenzen, welche durch die geforderte Fläche mit einander verbunden werden sollen, als fix an, so können wir bei dem Übergange dieser Fläche in eine andere, von ihr unendlich wenig verschiedene, x und y als unveränderlich, und bloß z als variirend betrachten. Hiedurch wird

$$\delta \int\int dx\, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1} = \int\int dx\, dy\, \delta \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$$
$$= \int\int \frac{p \delta p + q \delta q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\, dx\, dy.$$

Aber unter der gemachten Voraussetzung haben wir

$$\delta p = \delta \frac{dz}{dx} = \frac{d \delta z}{dx}, \quad \delta q = \delta \frac{dz}{dy} = \frac{d \delta z}{dy};$$

die Beschaffenheit der verlangten Fläche ist demnach durch die Gleichung

$$\int\!\!\int\left[\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\frac{d\delta z}{dx}dx\,dy+\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\frac{d\delta z}{dy}dy\,dx\right]=0$$

oder

$$\int dy\int\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\frac{d\delta z}{dx}dx+\int dx\int\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\frac{d\delta z}{dy}dy=0$$

gegeben. Wenden wir auf beide Integralien die früher gebrauchte Reductionsformel an, so ergibt sich, weil in Bezug auf die fixen Grenzen derselben δz verschwindet, wenn man der Kürze wegen P statt $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$ und Q statt $\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$ schreibt:

$$\int\!\!\int\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}\right)dx\,dy\,\delta z=0,$$

woraus $\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}=0$,

oder nach gehöriger Rechnung

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$$

als Differenzialgleichung der verlangten Fläche erhalten wird, in welcher, unserer gewöhnlichen Bezeichnung gemäß,

$$r=\frac{dp}{dx},\quad s=\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx},\quad t=\frac{dq}{dy}\ \text{ist.}$$

Aus der in der siebzehnten Vorlesung erhaltenen Gleichung (14) sehen wir, daß die algebraische Summe des größten und kleinsten Krümmungshalbmessers aller durch den Punct x, y, z auf irgend einer Fläche möglichen Curven

$$=\frac{[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\sqrt{p^2+q^2+1}}{s^2-rt}$$

ist; diese Summe verschwindet also für jeden Punct unserer Fläche, oder mit anderen Worten: die beiden Hauptkrümmungen dieser Fläche sind in jedem einzelnen Puncte derselben einander gleich und entgegengesetzt.

Die obige partielle Differenzialgleichung der geforderten Fläche läßt sich auf verschiedenen Wegen integriren. Wir wollen uns hier begnügen, folgendes, von M o n g e herrührendes, Verfahren in der Kürze anzudeuten.

Durch diese Gleichung wird z als eine gewisse Function der von einander unabhängigen Variablen x und y erklärt. Man kann aber

auch sowohl z, wie auch x und y als Functionen zweier anderen independenten veränderlichen Größen ξ und υ betrachten, deren Relation zu ersteren Veränderlichen vor der Hand noch unbestimmt bleibt. Denkt man sich nun z durch x und y, und letztere zwei Größen durch ξ und υ ausgedrückt, so hat man

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\xi} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\xi}; \quad \frac{dz}{d\upsilon} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\upsilon} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\upsilon}$$

oder $$\frac{dz}{d\xi} = p\frac{dx}{d\xi} + q\frac{dy}{d\upsilon}; \quad \frac{dz}{d\upsilon} = p\frac{dx}{d\upsilon} + q\frac{dy}{d\upsilon};$$

ferner durch fortgesetzte Differenziation dieser Ausdrücke, mit Rücksicht auf die Bedeutungen von r, s, t:

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} = r\frac{dx^2}{d\xi^2} + 2s\frac{dx}{d\xi}\frac{dy}{d\xi} + t\frac{dy^2}{d\xi^2} + p\frac{d^2x}{d\xi^2} + q\frac{d^2y}{d\xi^2},$$

$$\frac{d^2z}{d\xi d\upsilon} = r\frac{dx}{d\xi}\frac{dx}{d\upsilon} + s\frac{dx}{d\xi}\frac{dy}{d\upsilon} + s\frac{dx}{d\upsilon}\frac{dy}{d\xi} + t\frac{dy}{d\xi}\frac{dy}{d\upsilon} + p\frac{d^2x}{d\xi d\upsilon} + q\frac{d^2y}{d\xi d\upsilon}$$

$$\frac{d^2z}{d\upsilon^2} = r\frac{dx^2}{d\upsilon^2} + 2s\frac{dx}{d\upsilon}\frac{dy}{d\upsilon} + t\frac{dy^2}{d\upsilon^2} + p\frac{d^2x}{d\upsilon^2} + q\frac{d^2y}{d\upsilon^2}.$$

Bestimmt man mittelst dieser fünf Gleichungen p, q, r, s, t durch

$$\frac{dx}{d\xi}, \frac{dx}{d\upsilon}, \frac{dy}{d\xi}, \frac{dy}{d\upsilon}, \frac{d^2x}{d\xi^2}, \frac{d^2x}{d\xi d\upsilon}, \frac{d^2x}{d\upsilon^4}, \frac{d^2y}{d\xi^2}, \frac{d^2y}{d\xi d\upsilon}, \frac{d^2y}{d\upsilon^2},$$

und substituirt man die dafür gefundenen Ausdrücke in die obige Differenzialgleichung, so findet man nach gehöriger Rechnung, wenn man der Kürze wegen

$$X = \frac{dy}{d\xi}\frac{dz}{d\upsilon} - \frac{dy}{d\upsilon}\frac{dz}{d\xi},$$

$$Y = \frac{dz}{d\xi}\frac{dx}{d\upsilon} - \frac{dz}{d\upsilon}\frac{dx}{d\xi},$$

$$Z = \frac{dx}{d\xi}\frac{dy}{d\upsilon} - \frac{dx}{d\upsilon}\frac{dy}{d\xi}$$

setzt:

$$\left(\frac{dx^2}{d\xi^2} + \frac{dy^2}{d\xi^2} + \frac{dz^2}{d\xi^2}\right)\left(X\frac{d^2x}{d\upsilon^2} + Y\frac{d^2y}{d\upsilon^2} + Z\frac{d^2z}{d\upsilon^2}\right)$$

$$-2\left(\frac{dx}{d\xi}\frac{dx}{d\upsilon} + \frac{dy}{d\xi}\frac{dy}{d\upsilon} + \frac{dz}{d\xi}\frac{dz}{d\upsilon}\right)\left(X\frac{d^2x}{d\xi d\upsilon} + Y\frac{d^2y}{d\xi d\upsilon} + Z\frac{d^2z}{d\xi d\upsilon}\right)$$

$$+\left(\frac{dx^2}{d\upsilon^2} + \frac{dy^2}{d\upsilon^2} + \frac{dz^2}{d\upsilon^2}\right)\left(X\frac{d^2x}{d\xi^2} + Y\frac{d^2y}{d\xi^2} + Z\frac{d^2z}{d\xi^2}\right) = 0.$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn man

$$\frac{dx^2}{d\xi^2}+\frac{dy^2}{d\xi^2}+\frac{dz^2}{d\xi^2}=0,\quad \frac{dx^2}{dv^2}+\frac{dy^2}{dv^2}+\frac{dz^2}{dv^2}=0,$$

$$\frac{d^2x}{d\xi\, dv}=0,\quad \frac{d^2y}{d\xi\, dv}=0,\quad \frac{d^2z}{d\xi\, dv}=0 \text{ seyn läßt.}$$

Aus $\frac{d^2x}{d\xi\, dv}=0$ folgt, wenn man zwei Mal nach einander, das eine Mal in Bezug auf ξ, und das andere Mal in Bezug auf v integrirt, $x=\varphi(\xi)+\psi(v)$, wobei φ und ψ willkürliche Functionen anzeigen. Eben so geben uns die anderen Gleichungen bei ähnlicher Bedeutung von φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2:

$$y=\varphi_1(\xi)+\psi_1(v),\quad z=\varphi_2(\xi)+\psi_2(v).$$

Vermöge den ersten zwei Gleichungen müssen die genannten Functionen die Bedingungen

$$\left(\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{d\varphi_1(\xi)}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{d\varphi_2(\xi)}{d\xi}\right)^2=0,$$

$$\left(\frac{d\psi(v)}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\psi_1(v)}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\psi_2(v)}{dv}\right)^2=0$$

erfüllen, und somit wird das Integral unserer partiellen Differenzialgleichung durch das System der drei Gleichungen

$$x=\varphi(\xi)+\psi(v),$$

$$y=\varphi_1(\xi)+\psi_1(v),$$

$$z=\int d\xi\sqrt{-\left(\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}\right)^2-\left(\frac{d\varphi_1(\xi)}{d\xi}\right)^2}+\int dv\sqrt{-\left(\frac{d\psi(v)}{dv}\right)^2-\left(\frac{d\psi_1(v)}{dv}\right)^2}$$

ausgedrückt, wofür man auch, indem man bloß ξ und v statt $\varphi(\xi)$ und $\psi(v)$, und φ, ψ statt φ_1, ψ_1 schreibt,

$$x=\xi+v,\quad y=\varphi(\xi)+\psi(v),$$

$$z=\int d\xi\sqrt{-1-\left(\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}\right)^2}+\int dv\sqrt{-1-\left(\frac{d\psi(v)}{dv}\right)^2}$$

nehmen kann.

Aus den hier behandelten Beispielen erhellet hinreichend, wie man sich bei der Ausmittelung der mit einer vorgezeichneten Eigenschaft am meisten oder am wenigsten begabten Linie oder Fläche zu verhalten habe, es sey nun, daß diese Eigenschaft an der Linie oder Fläche in Bezug auf alle denkbaren, oder nur in Bezug auf alle eine bestimmte gemein-

schaftliche Eigenschaft besitzenden Linien oder Flächen im Zustande des Maximums oder Minimums erscheinen soll, in so ferne nämlich in dem letzteren Falle bloß eine Relation zwischen den Variationen der Coordinaten jedes Punctes der Linie oder Fläche festgesetzt wird. Wir wollen nun zeigen, wie die Rechnung einzuleiten ist, wenn die allen Linien oder Flächen gemeinschaftliche Eigenschaft darin besteht, daß ein innerhalb festgesetzter Grenzen genommenes Integral für alle Linien oder Flächen denselben Werth habe. Zu diesem Ende wählen wir folgendes einfache Beispiel.

Dritte Aufgabe. Es wird unter allen durch zwei gegebene Puncte gehenden ebenen Curven von gleicher Länge jene gesucht, welche mit den aus diesen Puncten auf eine gegebene Gerade fallenden Perpendikeln, und dem zwischen diesen Perpendikeln liegenden Stücke der Geraden den größten oder kleinsten Raum einschließt.

Auflösung. Nehmen wir die gegebene Gerade für die Axe der x an, so muß, dieser Aufgabe gemäß, für alle Curven, in Bezug auf welche das Integral $\int\sqrt{dx^2+dy^2}$ constant ist, $\int y\,dx$ innerhalb gewissen, mit dem vorhergehenden Integrale gemeinschaftlichen Grenzen, ein Größtes oder Kleinstes seyn, d. h. es müssen die Gleichungen

$$\delta\int y\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \delta\int\sqrt{dx^2+dy^2} = 0$$

zugleich Statt finden. Dieß wird erreicht, wenn die Variation des Ausdruckes

$$\int y\,dx + A\int\sqrt{dx^2+dy^2},$$

wobei A eine Constante ist, verschwindet, und umgekehrt muß jede Relation zwischen x und y, welche diesem Ausdrucke, hinsichtlich der oben gedachten Grenzen der Integralien, und bei einem bestimmten Werthe von $\int\sqrt{dx^2+dy^2}$ den größten oder kleinsten Werth ertheilt, auch $\int y\,dx$ zu einem Maximum oder Minimum machen. Wir haben also die Gleichung

$$\int\delta(y\,dx + A\sqrt{dx^2+dy^2}) = 0,$$

welche nach gehörig ausgeführter Rechnung, wobei man $\delta dx = 0$ annehmen kann, die Gleichung

$$dx + A d\,.\,\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = 0 \quad \text{oder} \quad x + \frac{A\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = B$$

darbietet, aus der die einem Kreise gehörende Integralgleichung $(x-B)^2+(y-C)^2 = A^2$ folgt. Die Einführung der Constanten A ist hier nöthig, um dem Integrale $\int\sqrt{dx^2+dy^2}$ den vorgeschriebenen Werth zu ertheilen.

Dreißigste Vorlesung.

Über den Gebrauch der Differenzenrechnung bei der Auflösung geometrischer Probleme.

Wenn eine Linie oder eine Fläche verlangt wird, bei welcher gewisse, zu zweien oder mehreren in einem endlichen Abstande befindlichen Puncten gehörende Größen in einer vorgeschriebenen Beziehung stehen sollen, so kömmt man, indem man die der geforderten Linie oder Fläche beigelegte Eigenschaft in die Sprache der Analysis übersetzt, auf eine oder mehrere, die Differenzen der Coordinaten einiger Puncte derselben enthaltende Gleichungen, von deren Integration die vollständige Auflösung der vorgelegten Aufgabe abhängt. Obschon die diesen Vorlesungen vorgezeichneten Grenzen keine umständliche Auseinandersetzung des Differenzencalculs erlaubten, so können wir doch den so eben erwähnten Gegenstand nicht gänzlich mit Stillschweigen übergehen, sondern werden uns wenigstens bemühen, die zur Behandlung desselben erforderlichen Methoden an einigen Beispielen in das Licht zu setzen, und zum weiteren Studium dieses interessanten Zweiges der Analysis den Weg zu eröffnen.

I. Es sey eine ebene Curve zu finden, bei welcher alle durch einen gegebenen Punct gezogene Sehnen sämmtlich einerlei Länge haben.

Nehmen wir den gegebenen Punct für den Pol, und eine beliebige durch denselben gehende Gerade für die Polaraxe an, und bezeichnen wir, indem wir den Radiusvector irgend eines Punctes der Curve durch r, und den Winkel, welchen derselbe mit der Polaraxe bildet, durch θ vorstellen, die Polargleichung dieser Curve durch

$$r = \varphi(\theta),$$

so besteht unsere Aufgabe in der Bestimmung der Form der Function φ.

Der Radiusvector r ist offenbar ein Theil einer durch den gegebenen Punct geführten Sehne; der übrige Theil dieser Sehne ist der dem Winkel $\theta + \pi$ entsprechende Radiusvector, daher wird die Länge der Sehne durch $\varphi(\theta) + \varphi(\theta + \pi)$ ausgedrückt. Nennen wir nun die constante Länge aller den gegebenen Punct enthaltenden Sehnen der Curve a, so haben wir zur Ausmittelung der Beschaffenheit der Function φ die Gleichung

$$\varphi(\theta) + \varphi(\theta + \pi) = a,$$

welche, wie man sieht, eine Differenzengleichung ist. Um das allgemeine Integral derselben zu erhalten, bemerken wir, daß

$$\cos.(\theta + \pi) = -\cos.\theta,$$

folglich $\cos.\theta + \cos.(\theta + \pi) = 0$

ist; es wird daher dieser Gleichung offenbar Genüge geleistet, wenn man

$$\varphi(\theta) = \tfrac{1}{2} a + A \cos.\theta$$

setzt, wobei A eine Größe ist, welche sich nicht ändert, indem θ in $\theta + \pi$ übergeht. Die allgemeine Form der Größen dieser Art ist $f(\cos.2\theta)$, wobei f eine beliebige Function bedeutet; daher haben wir

$$r = \tfrac{1}{2} a + \cos.\theta \,.\, f(\cos.2\theta)$$

für die allgemeine Polargleichung aller Curven, welche die oben geforderte Eigenschaft besitzen.

Will man dieselbe auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem reduciren, dessen Anfangspunct mit dem gegebenen Puncte übereinstimmt, so setze man $\sqrt{x^2 + y^2}$ an die Stelle von r, und $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ an die Stelle von $\cos.\theta$, also $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ an die Stelle von $\cos.2\theta$.

II. Es wird eine ebene Curve von der Eigenschaft verlangt, daß der Durchschnittspunct der beiden Tangenten derselben, welche zu den Endpuncten einer durch einen gegebenen Punct gezogenen Sehne gehören, sich in einer gegebenen geraden Linie befindet.

Bezeichnen wir die rechtwinkligen Coordinaten der Endpuncte einer Sehne der Curve durch x, y und x′, y′, und die Coordinaten des Durchschnittspunctes der zu diesen Endpuncten geführten Tangenten durch X, Y, so bestehen die Gleichungen

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

$$Y - y' = \frac{dy'}{dx'}(X - x').$$

Die aus denselben sich ergebenden Werthe von X und Y müssen der Gleichung der Geraden, in welcher alle Durchschnittspuncte der Tangenten liegen sollen, Genüge leisten, wodurch wir sogleich eine zur Auflösung der vorgelegten Aufgabe beitragende Gleichung erhalten. Um aber die Rechnung zu vereinfachen, sey die Axe der x auf die er-

wähnte Gerade senkrecht gezogen, so, daß nunmehr bloß X dem Abstande dieser Geraden vom Anfangspuncte der Coordinaten gleich gemacht werden muß. Nennen wir diesen Abstand a, so haben wir, da aus den obigen Gleichungen

$$y' + \frac{dy'}{dx'}(X - x') - \left(y + \frac{dy}{dx}(X - x)\right) = 0$$

folgt,

$$y' + (a - x')\frac{dy'}{dx'} - \left(y + (a - x)\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\text{oder } \Delta\left(y + (a - x)\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

mithin durch Integration

$$y + (a - x)\frac{dy}{dx} = \Phi,$$

wobei Φ eine Function von x und y anzeigt, welche sich bei dem Übergange von x und y in x′ und y′ nicht ändert.

Nehmen wir nun den Punct, durch welchen alle Sehnen der Curve gehen sollen, zum Anfangspuncte der Coordinaten an, so wird der Umstand, daß die Puncte x, y und x′, y′ sich mit dem Anfangspuncte der Coordinaten in einer und derselben Geraden befinden, durch die Gleichung

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$

dargestellt, woraus erhellet, daß überhaupt jede Function des Quotienten $\frac{y}{x}$ bei der Verwandlung der Größen x, y in x′, y′ ungeändert bleibt. Es muß demnach

$$\Phi = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

angenommen werden, wobei φ eine willkürliche einförmige Function bedeutet, und somit ist

$$y + (a - x)\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

die Differenzialgleichung der verlangten Curve.

Um dieselbe zu integriren, sey $\frac{y}{x} = u$, also

$$y = ux \text{ und } dy = u\,dx + x\,du,$$

so nimmt sie die Gestalt

$$\frac{dx}{x(a - x)} + \frac{du}{au - \varphi(u)} = 0$$

an, in welcher die Variablen x und u gesondert erscheinen. Da

$$\int \frac{dx}{x(a-x)} = \int \frac{dx}{ax} + \int \frac{dx}{a(a-x)}$$
$$= \frac{1}{a}\, l\, \frac{x}{a-x}$$

ist, so haben wir

$$l\, \frac{x}{a-x} + a \int \frac{du}{au - \varphi(u)} = Const.$$

für die Gleichung der Curve.

Es sey z. B. $\varphi(u) = \frac{a}{u}$, so wird

$$a \int \frac{du}{au - \varphi(u)} = \int \frac{u\,du}{u^2 - 1} = \tfrac{1}{2}\, l\,(u^2 - 1);$$

folglich, wenn wir $Const. = l\sqrt{b}$ setzen, und gehörig reduciren,

$$\left(\frac{x}{a-x}\right)^2 (u^2 - 1) = b,$$

woraus wegen $ux = y$

$$y^2 - x^2 = b\,(a-x)^2$$

folgt.

Setzen wir hingegen $\varphi(u) = -\frac{a}{u}$, so erhalten wir auf demselben Wege die Gleichung

$$y^2 + x^2 = b\,(a-x)^2.$$

Beide Gleichungen können nach Beschaffenheit der Constante b jeder der Linien der zweiten Ordnung gehören, und führen daher zur Kenntniß einer merkwürdigen Eigenschaft dieser Curven.

III. Nachstehende Aufgabe wurde zuerst von Euler, später von Biot, und zuletzt von Poisson betrachtet, dessen Analyse wir hier mittheilen.

Man verlangt eine ebene Curve, bei welcher das Quadrat jeder Normale das Quadrat der, in ihrem Durchschnittspuncte mit der Abscissenaxe errichteten Ordinate um eine gegebene Größe a übersteigt.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Punctes, in welchem eine Normale der Curve begegnet, durch x und y, so ist das Quadrat dieser Normale $= y^2 + \left(\frac{y\,dy}{dx}\right)^2 = y^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)$; die Abscisse ihres Durchschnittspunctes mit der Axe der x ist $= x + \frac{y\,dy}{dx}$, folglich,

wenn wir die Gleichung der Curve durch

$$y = f(x)$$

vorstellen, wobei f eine unbekannte Function andeutet, die durch den erwähnten Durchschnittspunct gehende Ordinate $= f\left(x + \frac{y\,dy}{dx}\right)$: es wird demnach die Eigenschaft, welche die aufzufindende Curve besitzen soll, durch die Gleichung

$$y^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = \left[f\left(x + \frac{y\,dy}{dx}\right)\right]^2 + a$$

ausgedrückt. Dieselbe ist eine Differenzengleichung, und zwar erscheint darin $\frac{y\,dy}{dx}$ als Differenz von x.

Die Analysten pflegen meistens die Rechnung dadurch zu vereinfachen, daß sie die Differenz der independenten Variablen $= 1$ setzen, und die Fälle, in welchen diese Differenz von der Einheit abweicht, auf solche, in welchen dieser Umstand Statt findet, reduciren. Zu diesem Ende sey

$$x = \varphi(z) \quad \text{und} \quad x + \frac{y\,dy}{dx} = \varphi(z+1),$$

ferner

$$f(x) = f(\varphi(z)) = \psi(z), \quad \text{also} \quad f\left(x + \frac{y\,dy}{dx}\right) = \psi(z+1),$$

so haben wir, wenn wir der Kürze wegen φ statt $\varphi(z)$, ψ statt $\psi(z)$, φ_1 statt $\varphi(z+1)$, ψ_1 statt $\psi(z+1)$ schreiben, die Gleichungen

$$\psi^2 + \frac{\psi^2\,d\psi^2}{d\varphi^2} = \psi_1^2 + a,$$

$$\varphi + \frac{\psi\,d\psi}{d\varphi} = \varphi_1.$$

Dieselben enthalten drei veränderliche Größen z, φ, ψ; um eine dieser Größen, nämlich ψ, wegzuschaffen, substituire man das aus der zweiten Gleichung folgende Resultat

$$\frac{\psi\,d\psi}{d\varphi} = \varphi_1 - \varphi$$

in die erste, so hat man

$$\psi^2 + (\varphi_1 - \varphi)^2 = \psi_1^2 + a,$$

und wenn man diese Gleichung differenzirt,

$$(\varphi_1 - \varphi)(d\varphi_1 - d\varphi) = \psi_1\,d\psi_1 - \psi\,d\psi.$$

Bezeichnet man die Function $\varphi(z+2)$ durch φ_2, so ist offenbar

$$\frac{\psi_1 d\psi_1}{d\varphi_1} = \varphi_2 - \varphi_1,$$

folglich

$$\psi_1 d\psi_1 - \psi d\psi = (\varphi_2 - \varphi_1)\, d\varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi;$$

und wenn man diese Gleichung mit obigem Differenzial verbindet,

$$(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1 = (\varphi_2 - \varphi_1)\, d\varphi_1 \quad \text{oder} \quad (\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi)\, d\varphi_1 = 0,$$

$$\text{das ist} \quad \Delta^2 \varphi \,.\, d\varphi_1 = 0,$$

welche Gleichung in

$$d\varphi_1 = 0 \quad \text{und} \quad \Delta^2 \varphi = 0$$

zerfällt. Die aus $d\varphi_1 = 0$ folgende Gleichung $\varphi_1 = Const.$ ist augenscheinlich ein besonderer Fall der Gleichung $\Delta^2\varphi = 0$; daher braucht die erstere Gleichung gar nicht beachtet zu werden. Die letztere Gleichung gibt uns durch Integration

$$\varphi = Az + B,$$

wobei A und B Größen, auf welche der Übergang von z in $z+1$ keinen Einfluß hat, also Functionen von $\sin. 2\pi z$ oder $\cos. 2\pi z$ anzeigen.

Es ist also

$$\frac{\psi d\psi}{d\varphi} = \varphi_1 - \varphi = A,$$

wodurch sich die Gleichung $\psi^2 + \frac{\psi^2 d\psi^2}{d\varphi^2} = \psi_1^2 + a$ in

$$\psi_1^2 - \psi_2 = A^2 - a \quad \text{oder} \quad \Delta \,.\, \psi^2 = A^2 - a$$

verwandelt, und daher durch Integration

$$\psi^2 = (A^2 - a)\, z + C$$

gefunden wird. Hier ist C gleichfalls eine Function von $\sin. 2\pi z$ oder $\cos. 2\pi z$, aber von A und B nicht unabhängig. Denn differenziren wir die Ausdrücke für ψ^2 und φ, so ergibt sich

$$2\psi \frac{d\psi}{dz} = A^2 - a + 2Az \frac{dA}{dz} + \frac{dC}{dz}$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = A + z \frac{dA}{dz} + \frac{dB}{dz};$$

mithin, wenn wir diese Resultate in die Gleichung

$$\frac{\psi d\psi}{d\varphi} = A \quad \text{oder} \quad \frac{\psi d\psi}{dz} = A \frac{d\varphi}{dz} \quad \text{einführen,}$$

$$\frac{dC}{dz} - a = A^2 + 2A\frac{dB}{dz}$$

oder $$A = -\frac{dB}{dz} \pm \sqrt{\left(\frac{dB}{dz}\right)^2 + \frac{dC}{dz} - a},$$

woraus der zwischen A, B, C bestehende Zusammenhang erhellet. Schreiben wir nun wieder x statt φ, und y statt ψ, so haben wir die zwei Gleichungen

$$x = B - \left(\frac{dB}{dz} - \sqrt{\left(\frac{dB}{dz}\right)^2 + \frac{dC}{dz} - a}\right) z,$$

$$y^2 = C + \left(2\left(\frac{dB}{dz}\right)^2 + \frac{dC}{dz} - 2a - 2\frac{dB}{dz}\sqrt{\left(\frac{dB}{dz}\right)^2 + \frac{dC}{dz} - a}\right) z,$$

welche, sobald für B und C beliebige Functionen von $\sin. 2\pi z$ angenommen worden sind, nach verrichteter Elimination von z die Gleichung einer mit der vorgeschriebenen Eigenschaft begabten Curve darbieten.

Vorlesungen

über die

analytische Mechanik.

Erste Vorlesung.

Über die Kräfte im Allgemeinen, und über die Zusammensetzung zweier auf einen materiellen Punct unter einem rechten Winkel wirkenden Kräfte insbesondere.

Wenn man sich einen Punct im Raume als unfähig vorstellt, seinen Zustand in Hinsicht auf Ruhe und Bewegung ohne Dazwischenkunft einer eigenen Ursache zu ändern, so heißt derselbe ein materieller Punct; diese Ursache aber wird eine bewegende Kraft, oder geradezu, eine Kraft genannt.

Für sich allein betrachtet, strebt jede Kraft den Punct, an welchem sie angebracht ist, d. h. ihren Angriffspunct, nach einer bestimmten Richtung und mit einer bestimmten Stärke oder Energie, in welcher ihre Größe besteht, in Bewegung zu setzen.

Mehrere materielle Puncte, welche so mit einander zusammenhängen, daß es Bewegungen jedes einzelnen derselben gibt, wodurch die übrigen in Bewegung gerathen, bilden ein System.

Die Wirkungen, welche mehrere, einen materiellen Punct oder ein System materieller Puncte, zur Bewegung anregende Kräfte hervorbringen, sind von zweifacher Art: es findet entweder Gleichgewicht Statt, d. h. das Streben jeder einzelnen Kraft wird durch die Gegenthätigkeit der übrigen, verbunden mit den der Bewegung etwa entgegenstehenden Hindernissen, aufgehoben; oder es erfolgt Bewegung.

Deßhalb zerfällt die Mechanik, welche von den Wirkungen der bewegenden Kräfte handelt, in zwei Theile; in die Statik, welche das Gleichgewicht der Kräfte betrachtet, und in die Dynamik, welche die durch die Kräfte erzeugte Bewegung zum Gegenstande hat. Wir werden diese zwei Theile der genannten Wissenschaft in unserem Vortrage genau sondern, und zwar, da die Dynamik auf die Statik gegründet werden kann, diese jener vorangehen lassen.

Wir nehmen uns hier vor, die Mechanik analytisch zu behandeln; deßhalb müssen wir vor Allem die Art und Weise angeben, auf welche wir die Kräfte in das Gebiet der Analysis versetzen.

Den Angriffspunct einer Kraft beziehen wir im Allgemeinen stets auf drei einander rechtwinklig durchschneidende, sonst völlig willkürliche coordinirte Ebenen, indem wir die Lage dieses Punctes durch seine Entfernungen von den genannten Ebenen, d. h. durch seine rechtwinkligen Coordinaten, mit gehöriger Beachtung ihrer Vorzeichen, angeben, oder falls sie unbekannt ist, zu bestimmen suchen; indessen werden wir auch, wenn wir es für zweckmäßig erachten, von den in der analytischen Geometrie üblichen Polarcoordinatensystemen Gebrauch machen.

Die Richtung einer Kraft bestimmen wir mit Hülfe der Winkel, welche dieselbe mit dreien den Durchschnittslinien der coordinirten Ebenen nach der Gegend der positiven Coordinaten hin parallel gezogenen geraden Linien bildet. Diese drei Winkel sind, wie aus der in der ersten Vorlesung über die analytische Geometrie erhaltenen Formel (3) erhellet, unter einander durch die Bedingung verknüpft, daß die Quadrate ihrer Cosinusse zusammen genommen die Einheit ausmachen.

Um endlich die Größe einer Kraft durch eine Zahl vorzustellen, wählen wir irgend eine Kraft für die Einheit der Kräfte, und bestimmen den Exponenten des Verhältnisses jeder uns vorkommenden Kraft zu dieser Einheit, indem wir annehmen, daß überhaupt eine Kraft als die Summe mehrerer anderer betrachtet werden soll, wenn sie denselben insgesammt gerade entgegenwirkend, das Gleichgewicht hält, wodurch der Begriff gleicher Kräfte, ferner eines Vielfachen, eines aliquoten Theiles einer Kraft u. s. w. festgestellt ist.

Wenn mehrere Kräfte nach beliebigen Richtungen auf einen materiellen Punct wirken, so wird derselbe, in so fern diese Kräfte nicht im Gleichgewichte sind, nach einer bestimmten Richtung, mit einer bestimmten Energie zur Bewegung angeregt, gerade so, als ob eine einzige Kraft nach dieser Richtung und mit dieser Energie an ihm angebracht wäre. Die letztgenannte Kraft, welche in Bezug auf die ersteren Kräfte die Resultirende heißt, kann daher der Wirkung nach denselben substituirt werden, und eine ihr gleiche und der Richtung nach gerade entgegengesetzte Kraft hält den übrigen Kräften das Gleichgewicht. Es kömmt nun darauf an, die Größe und Richtung dieser Resultirenden auszumitteln, oder, wie man sich dem gewöhnli-

chen Sprachgebrauche gemäß auszudrücken pflegt, mehrere gegebene auf einen gemeinschaftlichen Angriffspunct wirkende Kräfte zusammen zu setzen.

Wirken mehrere Kräfte P_1, P_2, P_3, ... nach einer und derselben Richtung auf einen Punct, so ist ihre Resultirende, der obigen Annahme zu Folge, gleich der Summe

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots,$$

und hat die Richtung, nach welcher die einzelnen Kräfte angebracht sind.

Wirken hingegen mehrere Kräfte theils nach einer, theils nach der gerade entgegengesetzten Richtung, und ist die Summe dieser $= X$, die Summe jener $= Y$ und $X > Y$, so wird die Resultirende aller Kräfte offenbar durch die Differenz

$$X - Y$$

ausgedrückt, und sie hat die Richtung der größeren Kraft X.

Wir haben daher nur den Fall in Erwägung zu ziehen, wenn die Richtungen der zusammenzusetzenden Kräfte nicht übereinstimmen.

Betrachten wir zuerst den Fall, wenn auf einen Punct zwei Kräfte X, Y wirken, deren Richtungen einen rechten Winkel einschließen.

Die Richtung der Resultirenden R befindet sich nothwendig in der Ebene der Richtungen der Kräfte X und Y; denn es ist kein Grund vorhanden, warum die Richtung dieser Kraft eher auf eine, als auf die andere Seite dieser Ebene fallen sollte.

Es sey ω der Winkel, welchen die Richtung der Resultirenden R mit jener der Kraft X bildet, so ist diese Resultirende völlig bestimmt, wenn die numerischen Werthe von R und ω bekannt sind.

Diese Werthe sind Functionen der Größen X, Y. Bezeichnet man die Formen dieser Functionen durch φ und ψ, so kann man

$$R = \varphi(X, Y) \quad \text{und} \quad \omega = \psi(X, Y)$$

setzen. Denkt man sich aus diesen Gleichungen Y eliminirt, so erhält man eine Gleichung

$$F(R, \omega, X) = 0,$$

wobei F ebenfalls eine unbekannte Function anzeigt.

Die Einheit der Kräfte, auf welche sich die Zahlen X und R beziehen, ist willkürlich; eine Veränderung dieser Einheit hat zwar auf die absoluten Werthe dieser Zahlen Einfluß, jedoch kann dadurch der

Quotient $\frac{X}{R}$, welcher das gegenseitige Verhältniß der durch X und R vorgestellten Kräfte mißt, keine Änderung erleiden. Es ist also dieser Quotient sowohl von X, als auch von R unabhängig, d. h. die Gleichung $F(R, \omega, X) = 0$ läßt sich auf die Form

$$(1) \qquad \frac{X}{R} = f(\omega) \quad \text{oder} \quad X = R f(\omega)$$

bringen, so daß die durch f angedeutete Function weder X noch R enthält.

Da die Richtungen der Kräfte R und Y den Winkel $\frac{\pi}{2} - \omega$ bilden, so hat man aus demselben Grunde

$$(2) \qquad \frac{Y}{R} = f\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \quad \text{oder} \quad Y = R f\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right).$$

Man bringe nun an dem gemeinschaftlichen Angriffspuncte der hier betrachteten Kräfte, senkrecht auf die Richtung von R, und einander entgegen wirkend die Kräfte

$$(3) \qquad X' = X f\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \quad \text{und} \quad Y' = Y f(\omega)$$

so an, daß die Richtung von X zwischen den Richtungen von X′ und R, folglich auch die Richtung von Y zwischen jenen von Y′ und R liegt; ferner lasse man nach der Richtung von R die Kräfte

$$(4) \qquad X'' = X f(\omega) \quad \text{und} \quad Y'' = Y f\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$$

wirken, so ist den Formen der Größen X′, Y′, X″, Y″ zu Folge

X die Resultirende von X′ und X″,

und Y » » » Y′ » Y″,

also R die Resultirende der vier Kräfte X′, X″, Y′, Y″.

Die Gleichungen (3) und (4) geben, mit Rücksicht auf (1) und (2)

$$(5) \qquad X' = \frac{XY}{R}, \quad Y' = \frac{XY}{R},$$
$$X'' = \frac{X^2}{R}, \quad Y'' = \frac{Y^2}{R}.$$

Es ist demnach X′ = Y′. Diese Kräfte wirken aber einander gerade entgegen, folglich heben sie sich auf, und es kann R auch als die Resultirende der noch übrigen zwei Kräfte X″ und Y″ betrachtet werden. Allein X″ und Y″ haben die Richtung von R, daher ist

$$R = X'' + Y''$$

oder $R = \frac{X^2}{R} + \frac{Y^2}{R}$, d. h.

(6) $$R^2 = X^2 + Y^2 \quad \text{oder} \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

durch welche Gleichung die Größe der Resultirenden zweier unter einem rechten Winkel auf einen materiellen Punct wirkender Kräfte angegeben wird.

Um den Winkel ω zu bestimmen, lasse man die Kraft X um eine beliebige Differenz ΔX wachsen, so wächst offenbar die Resultirende der Kräfte X und Y, und ihre Richtung tritt jener der Kraft X näher, d. h. es geht R in $R + \Delta R$, und ω in $\omega - \Delta\omega$ über.

Man lege nun in die Richtungen der Kräfte X' und X'' noch die Kräfte

(7) $$\Delta X' = \Delta X \,.\, f\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \frac{Y \Delta X}{R}$$

und $$\Delta X'' = \Delta X \,.\, f(\omega),$$

so ist ΔX die Resultirende von $\Delta X'$ und $\Delta X''$. Aber $R + \Delta R$ ist die Resultirende von $X + \Delta X$ und Y, und R ist die Resultirende von X und Y, daher ist $R + \Delta R$ die Resultirende von $\Delta X'$ und $R + \Delta X''$; folglich, da die Richtungen der Kräfte $R + \Delta R$ und $\Delta X'$ den Winkel $\frac{\pi}{2} - \Delta\omega$ einschließen:

(8) $$\Delta X' = (R + \Delta R)\, f\left(\frac{\pi}{2} - \Delta\omega\right).$$

Setzen wir $\frac{df(\omega)}{d\omega} = f_1(\omega)$, so haben wir, der sechs und vierzigsten Vorlesung über die Analysis gemäß:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \Delta\omega\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Delta\omega\, f_1\left(\frac{\pi}{2} - \theta\Delta\omega\right),$$

wobei θ nicht größer ist als die Einheit.

Für $\omega = \frac{\pi}{2}$ erhält die Resultirende R die Richtung der Kraft Y, was nur dann geschehen kann, wenn X verschwindet, und daher $R = Y$ wird. Diese Werthe in die Gleichung $X = R f(\omega)$ substituirt, geben

$$0 = Y f\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{also} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

wir können daher die Gleichung (8) auch unter der Form

(9) $$\Delta X' = -(R + \Delta R)\, \Delta\omega \,.\, f_1\left(\frac{\pi}{2} - \theta\Delta\omega\right)$$

vorstellen, und daher besteht mit Rücksicht auf (7) die Gleichung

$$\frac{Y\Delta X}{R} = -(R+\Delta R)\Delta\omega \,.\, f_1\left(\frac{\pi}{2}-\theta\Delta\omega\right)$$

$$\text{oder } \frac{\Delta\omega}{\Delta X}\,.\,f_1\left(\frac{\pi}{2}-\theta\Delta\omega\right) = -\frac{Y}{R(R+\Delta R)}.$$

Lassen wir jetzt ΔX unendlich klein werden, wodurch $\frac{\Delta\omega}{\Delta X}$ in den partiellen Differenzialquotienten $\frac{d\omega}{dX}$ übergeht, so haben wir, wenn wir die constante Größe $f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$, der Kürze wegen K nennen:

$$(10) \qquad K\frac{d\omega}{dX} = -\frac{Y}{R^2}.$$

Vertauscht man ω mit $\frac{\pi}{2}-\omega$, also auch $d\omega$ mit $-d\omega$, und Y mit X, so wird

$$(11) \qquad K\frac{d\omega}{dY} = \frac{X}{R^2}.$$

Aber es ist $d\omega = \frac{d\omega}{dX}dX + \frac{d\omega}{dY}dY$, folglich

$$K d\omega = \frac{XdY - YdX}{R^2} = \frac{XdY - YdX}{X^2+Y^2}$$

$$= \frac{\frac{XdY - YdX}{X^2}}{1+\frac{Y^2}{X^2}} = \frac{d\,.\,\frac{Y}{X}}{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2},$$

woraus durch Integration

$$(12) \quad K\omega + H = Arc.\,tg.\,\frac{Y}{X} \quad \text{oder} \quad \frac{Y}{X} = tg.\,(K\omega + H)$$

folgt, wenn H eine unbestimmte Constante bedeutet. Um H zu bestimmen, bedenke man, daß, wenn ω in die Nulle übergeht, $X = R$ und $Y = 0$ wird. Unter dieser Voraussetzung gibt uns die Gleichung (12)

$$H = Arc.\,tg.\,0 = r\pi,$$

wobei r eine positive oder negative ganze Zahl anzeigt. Wir haben also

$$\frac{Y}{X} = tg.\,(K\omega + r\pi) = tg.\,(K\omega)$$

$$\text{und } \frac{X}{Y} = cot.\,(K\omega)$$

Für $K\omega = \frac{\pi}{2}$ oder $\omega = \frac{\pi}{2K}$ wird $cot.\,\omega = 0$, daher muß in diesem Falle auch $X = 0$ seyn. Aber X verschwindet nur dann, wenn $\omega = \frac{\pi}{2}$ ist, daher kann K keine andere Zahl als die Einheit bedeuten, und somit ist

$$(13) \quad \omega = Arc.\,tg.\,\frac{Y}{X} = Arc.\,cos.\,\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = Arc.\,cos.\,\frac{X}{R},$$

so daß zwischen ω, R und X die einfache Gleichung

$$(14) \qquad X = R\,cos.\,\omega$$

besteht.

Wir sind also auch im Stande, die Richtung der Resultirenden zweier unter einem rechten Winkel auf einen Punct wirkenden Kräfte zu verzeichnen.

Zweite Vorlesung.

Über die Zusammensetzung beliebiger, auf einen materiellen Punct wirkender Kräfte.

Die Ergebnisse der vorhergehenden Vorlesung setzen uns in den Stand, die Größe und Richtung der Resultirenden R dreier einen Punct nach wechselweise auf einander senkrechten Richtungen zur Bewegung anregender Kräfte X, Y, Z zu bestimmen.

Bezeichnen wir nämlich die Resultirende der zwei Kräfte X und Y durch R', und den Winkel der Richtungen von R' und X durch ω, so haben wir

$$(1) \qquad R' = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{und} \quad \cos.\omega = \frac{X}{R'}.$$

Da nun die Kraft R' den Kräften X und Y der Wirkung nach substituirt werden kann, so ist die Resultirende der Kräfte X, Y, Z mit der Resultirenden der Kräfte R' und Z einerlei. Es liegt aber die Richtung von R' in der Ebene der Richtungen von X und Y, auf welcher Ebene die Richtung von Z senkrecht steht; daher bilden R' und Z einen rechten Winkel, in dessen Ebene die Richtung der zu suchenden Resultirenden R fällt.

Werden die früheren Formeln auf diesen Fall angewendet, so hat man, wenn μ den Winkel der Richtungen von R und R' vorstellt:

$$(2) \qquad R = \sqrt{R'^2 + Z^2} \quad \text{und} \quad \cos.\mu = \frac{R'}{R};$$

folglich, wenn man aus diesen Gleichungen mittelst (1) die Größe R' wegschafft:

$$(3) \qquad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\text{und} \quad \cos.\omega \,.\, \cos.\mu = \frac{X}{R}.$$

Es sey nun α der Winkel der Richtungen von R und X, so ist (zweite Vorles. über die anal. Geom. (17))

$$\cos.\omega \,.\, \cos.\mu = \cos.\alpha,$$

mithin

$$(4) \qquad \cos.\alpha = \frac{X}{R}.$$

Auf dieselbe Art findet man, wenn β und γ die Winkel anzeigen, welche die Richtung der Resultirenden R mit jenen der Kräfte Y und Z bildet:

(5) $$\cos.\beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos.\gamma = \frac{Z}{R}.$$

Sind also drei unter einander rechtwinklig auf einen Punct wirkende Kräfte X, Y, Z gegeben, so erhält man durch die Formel (3) die Größe, und durch die Formeln (4), (5) die Richtung ihrer Resultirenden R.

Da die drei Winkel α, β, γ durch die Gleichung

$$\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = 1$$

mit einander in Verbindung stehen, so ist, wenn man zwei dieser Winkel, z. B. α und β, bereits kennt, der dritte γ nur zweier Werthe fähig, wovon der eine auf die Lage einer innerhalb und der andere einer außerhalb des körperlichen Winkels XYZ fallenden geraden Linie sich bezieht. Die Richtung der Resultirenden R kann aber nur innerhalb des genannten körperlichen Winkels liegen, folglich sind von den Formeln (4), (5) zur Bestimmung dieser Richtung im Grunde nur zwei erforderlich.

Die erwähnten Formeln dienen zugleich zur Auflösung oder Zerlegung einer gegebenen Kraft R in drei auf den Angriffspunct der ersteren unter wechselweise auf einander senkrechten Richtungen wirkende Kräfte. Bezeichnen wir nämlich die Winkel, unter welchen die Richtungen der zu suchenden Kräfte X, Y, Z gegen R geneigt seyn sollen, durch α, β, γ, so haben wir

(6) $$X = R\cos.\alpha, \quad Y = R\cos.\beta, \quad Z = R\cos.\gamma.$$

Die Auflösung der Aufgabe: für beliebige auf einen materiellen Punct wirkende Kräfte

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad P_4, \ldots\ldots$$

die Resultirende auszumitteln, hat nunmehr keine Schwierigkeit.

Man ziehe durch den gemeinschaftlichen Angriffspunct der gegebenen Kräfte drei auf einander wechselweise senkrechte gerade Linien (der Einfachheit wegen läßt man dieselben, wenn der Angriffspunct auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen wird, den Axen der Coordinaten nach ihrer positiven Richtung parallel laufen), und messe die Winkel, welche die Richtung jeder Kraft mit diesen Geraden bildet.

Es seyen α_1, β_1, γ_1 die genannten Winkel für die Kraft P_1,
ferner α_2, β_2, γ_2 » » » » » » P_2,
α_3, β_3, γ_3 » » » » » » P_3
u. s. w.

Man zerlege jede der Kräfte P_1, P_2, P_3, ... nach den Richtungen der erwähnten Geraden in drei Kräfte, so zerfällt

P_1 in $P_1 \cos.\alpha_1$, $P_1 \cos.\beta_1$, $P_1 \cos.\gamma_1$,
ferner P_2 » $P_2 \cos.\alpha_2$, $P_2 \cos.\beta_2$, $P_2 \cos.\gamma_2$,
P_3 » $P_3 \cos.\alpha_3$, $P_3 \cos.\beta_3$, $P_3 \cos.\gamma_3$
u. s. w.,

wobei die Zeichen der Cosinusse entscheiden, ob die einzelnen Kräfte nach der einen oder nach der anderen der in jeder dieser Geraden möglichen entgegengesetzten Richtungen wirken. Vereinigt man die längst einer und derselben Geraden thätigen partiellen Kräfte in eine einzige Kraft, so lassen sich sämmtliche Kräfte P_1, P_2, P_3, ... auf die drei ihnen gleichgeltenden Kräfte

$$(7)\quad \begin{aligned} X &= P_1 \cos.\alpha_1 + P_2 \cos.\alpha_2 + P_3 \cos.\alpha_3 + \ldots. \\ Y &= P_1 \cos.\beta_1 + P_2 \cos.\beta_2 + P_3 \cos.\beta_3 + \ldots. \\ Z &= P_1 \cos.\gamma_1 + P_2 \cos.\gamma_2 + P_3 \cos.\gamma_3 + \ldots. \end{aligned}$$

reduciren, deren Richtungen wechselweise auf einander senkrecht stehen, folglich mittelst der Formeln (3), (4), (5) in eine einzige Resultirende vereinigt werden können.

Ist also R die Resultirende sämmtlicher Kräfte P_1, P_2, P_3, ... und sind α, β, γ die Winkel, welche ihre Richtung mit jenen der oben angenommenen Geraden bildet, so haben wir

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\text{und}\quad \cos.\alpha = \frac{X}{R},\quad \cos.\beta = \frac{Y}{R},\quad \cos.\gamma = \frac{Z}{R}.$$

Statt die Kräfte P_1, P_2, P_3, ... so wie auch ihre Resultirende R durch Zahlen auszudrücken, kann man dieselben auch durch gerade Linien vorstellen, welche man, von ihrem gemeinschaftlichen Angriffspuncte ausgehend, in ihren Richtungen abschneidet, und deren Längen unter einander in denselben Verhältnissen stehen, wie die Kräfte selbst. Dann sind den in der dritten Vorlesung über die analytische Geometrie vorgetragenen Sätzen gemäß, $P_1 \cos.\alpha_1$, $P_1 \cos.\beta_1$, $P_1 \cos.\gamma_1$ die Projectionen der Linie P_1 auf die drei fixen geraden Linien, wobei die Zeichen der Cosinusse anzeigen, ob diese Projectionen

diesseits oder jenseits einer durch den Angriffspunct der Kraft P_1 auf die Projectionsaxe senkrecht geführten Ebene liegen. Ein Gleiches gilt von den Ausdrücken $P_2 \cos.\alpha_2$, $P_2 \cos.\beta_2$, $P_2 \cos.\gamma_2$, ferner $P_3 \cos.\alpha_3$, $P_3 \cos.\beta_3$, $P_3 \cos.\gamma_3$ u. s. w. in Bezug auf die Linien P_2, P_3, . . . und von $R \cos.\alpha$, $R \cos.\beta$, $R \cos.\gamma$ in Bezug auf die Linie R.

Die Gleichungen (6) auf (7) angewandt, geben uns

$$(8)\quad \begin{aligned} R \cos.\alpha &= P_1 \cos.\alpha_1 + P_2 \cos.\alpha_2 + P_3 \cos.\alpha_3 + \ldots . \\ R \cos.\beta &= P_1 \cos.\beta_1 + P_2 \cos.\beta_2 + P_3 \cos.\beta_3 + \ldots . \\ R \cos.\gamma &= P_1 \cos.\gamma_1 + P_2 \cos.\gamma_2 + P_3 \cos.\gamma_3 + \ldots .; \end{aligned}$$

es ist also die Projection der Resultirenden R mehrerer Kräfte P_1, P_2, P_3, ... auf irgend eine Gerade der algebraischen (d. i. mit gehöriger Rücksicht auf die Vorzeichen genommenen) Summe der Projectionen dieser Kräfte auf eben dieselbe Gerade gleich.

Vergleicht man diese Eigenschaft der Resultirenden mehrerer Kräfte mit der eines jeden geschlossenen Polygons, seine Seiten mögen in einer und derselben Ebene liegen, oder nicht, vermöge welcher die Projection jeder einzelnen Seite auf eine beliebige Gerade der algebraischen Summe der Projectionen aller übrigen Seiten auf dieselbe Gerade gleich kommt, und bedenkt man, daß eine Gerade durch ihre Projectionen auf drei sich rechtwinklig durchschneidende gerade Linien der Lage und Größe nach völlig bestimmt wird, so ergibt sich aus den Gleichungen (8) zur Auffindung der Größe und Richtung der Resultirenden R mehrerer auf einen materiellen Punct wirkender Kräfte P_1, P_2, P_3, ... folgende einfache Construction.

Man ziehe durch den Endpunct der Linie P_1 eine Gerade zur Linie P_2 parallel, und mache dieselbe der letzteren gleich; ferner führe man durch den Endpunct der so eben gezogenen Linie eine der P_3 parallele und gleiche Gerade, und setze dieses Verfahren fort, bis alle übrigen Linien P_4, P_5, ꝛc. an die Reihe gekommen sind. Die Verbindungslinie des Angriffspunctes aller Kräfte mit dem Endpuncte der letzten so gezogenen Geraden stellt die Größe und Richtung der verlangten Resultirenden vor. Es ist übrigens klar, daß man zu dieser Operation die Linien P_1, P_2, P_3, ... in jeder beliebigen Ordnung verwenden kann.

Die gewöhnliche, unter dem Namen des Parallelogramms der Kräfte bekannte, Methode zur Bestimmung der Resultirenden zweier unter einem beliebigen Winkel auf einen Punct wirkender Kräfte ist nur ein besonderer Fall des so eben erklärten Verfahrens.

Wird ein gegebener Punct von allen Puncten eines Körpers angezogen, und ist das Gesetz bekannt, nach welchem die Größe der Anziehung von der Position jedes anziehenden Punctes gegen den angezogenen abhängt, so läßt sich die Gesammtwirkung des Körpers auf den gegebenen Punct mit Hülfe des oben gelehrten analytischen Verfahrens bestimmen, nur treten in den Formeln (7) jetzt Integralien an die Stelle der dort rechter Hand des Gleichheitszeichens erscheinenden Summen.

Es seyen a, b, c die rechtwinkligen Coordinaten des gegebenen angezogenen Punctes, x, y, z die Coordinaten eines Punctes des anziehenden Körpers, und u die Entfernung beider, so ist

$$(9) \qquad u = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}.$$

Man führe durch den Punct x, y, z zu jeder der coordinirten Ebenen eine parallele Ebene, und lasse sodann die Coordinaten desselben in $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ übergehen, so ändert sich ein wo immer anfangendes und an den durch den Punct x, y, z gehenden Ebenen sich endigendes Stück des Körpers um ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Volum oder körperlicher Inhalt durch das Product $dx\,dy\,dz$ seiner drei Dimensionen ausgedrückt wird. Um die Menge der in diesem Parallelepiped enthaltenen anziehenden Materie, oder die Masse desselben, zu bestimmen, bezeichnen wir die auf eine beliebige Einheit bezogene Masse, welche in der Einheit der körperlichen Räume enthalten wäre, wenn dieselbe gerade so wie das Parallelepiped $dx\,dy\,dz$ mit Materie erfüllt würde, d. h. in jedem Raumtheile $= dx\,dy\,dz$ eben so viel Materie als das genannte Parallelepiped enthielte, durch μ, so ist die Masse dieses Parallelepipeds $= \mu\,dx\,dy\,dz$.

Es sey nun λ die Kraft, welche der Punct x, y, z auf den Punct a, b, c ausüben würde, wenn in ersterem die Einheit der Massen vereinigt wäre, so wird der letztere von dem Differenzial $\mu\,dx\,dy\,dz$ mit der Kraft $\lambda\mu\,dx\,dy\,dz$ angezogen. Hier sind die Größen λ und μ gegebene Functionen der Coordinaten x, y, z.

Die Kraft $\lambda\mu\,dx\,dy\,dz$ wirkt auf den Punct a, b, c nach der Richtung u; die Cosinusse der Winkel, welche diese Richtung mit den Axen der x, y, z bildet, sind $\frac{a-x}{u}$, $\frac{b-y}{u}$, $\frac{c-z}{u}$; zerlegt man daher die genannte Kraft in drei den Axen der x, y, z parallele

Kräfte, so werden dieselben durch

$$\frac{\lambda\mu\,(a-x)\,dx\,dy\,dz}{u},\quad \frac{\lambda\mu\,(b-y)\,dx\,dy\,dz}{u},\quad \frac{\lambda\mu\,(c-z)\,dx\,dy\,dz}{u}$$

ausgedrückt.

Heißt nun die Totalanziehung, welche der Körper auf den Punct a, b, c ausübt, R, und sind X, Y, Z die Kräfte, welche aus der Kraft R durch Zerlegung derselben nach den Richtungen der x, y, z entspringen, so haben wir, da das Parallelepiped $dx\,dy\,dz$ offenbar als ein durch drei auf einander folgende, auf x, y, z sich beziehende, partielle Differenziationen entspringendes Differenzial des oben erwähnten Körperstückes anzusehen ist, den in der neunzehnten Vorlesung über die analytische Geometrie angewandten Principien zu Folge,

$$(10)\qquad \begin{aligned} X &= \iiint \frac{\lambda\mu\,(a-x)\,dx\,dy\,dz}{u}, \\ Y &= \iiint \frac{\lambda\mu\,(b-y)\,dx\,dy\,dz}{u}, \\ Z &= \iiint \frac{\lambda\mu\,(c-z)\,dx\,dy\,dz}{u}, \end{aligned}$$

wobei die Integrationen, deren eine auf die Variable x, die andere auf y, und die dritte auf z sich bezieht, über den ganzen Körper auszudehnen sind.

Hat man X, Y, Z berechnet, so geben die Formeln (3), (4), (5) die Größe und die Richtung von R an.

In allen Fällen, in welchen die Formeln (10) practische Anwendung finden, ist die Kraft λ eine Function der Entfernung u des Punctes x, y, z, von welchem sie ausgeht, vom Puncte a, b, c, auf welchen sie wirkt. Es sey also $\lambda = F(u)$.

Die Gleichung (9) gibt uns

$$\frac{du}{da} = \frac{a-x}{u},\quad \frac{du}{db} = \frac{b-y}{u},\quad \frac{du}{dc} = \frac{c-z}{u},$$

wir haben daher

$$\begin{aligned} X &= \iiint \mu\,dx\,dy\,dz\,.\,F(u)\,\frac{du}{da}, \\ Y &= \iiint \mu\,dx\,dy\,dz\,.\,F(u)\,\frac{du}{db}, \\ Z &= \iiint \mu\,dx\,dy\,dz\,.\,F(u)\,\frac{du}{dc}; \end{aligned}$$

oder, wenn wir auf die Formel (102) der drei und fünfzigsten Vorlesung über die Analysis Rücksicht nehmen, und

(11) $$\int F(u)\,du = F'(u),$$

ferner

(12) $$\int\int\int \mu\,dx\,dy\,dz\;.\;F'(u) = U$$

setzen:

(13) $$X = \frac{dU}{da},\quad Y = \frac{dU}{db},\quad Z = \frac{dU}{dc}.$$

Diese Formeln kann man in dem vorliegenden Falle, wenn man es für vortheilhaft erachtet, statt der Formeln (10) anwenden.

Daß man durch diese Formeln auch die Gesammtwirkung eines Körpers, dessen Puncte sämmtlich einen gegebenen Punct nach einem bestimmten Gesetze abstoßen, auf diesen Punct berechnen kann, ist für sich klar. Nur müssen in diesem Falle alle oben betrachteten Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen thätig gedacht werden.

Dritte Vorlesung.

Über die Bestimmung der Anziehung eines Körpers gegen einen Punct, wenn die zwischen jeden zwei Puncten bestehende Anziehung dem Quadrate ihrer Entfernung verkehrt proportionirt ist.

Alle in der Natur Statt findenden, in angebbaren Entfernungen noch wahrnehmbaren Anziehungen zwischen zwei Puncten, nehmen in demselben Verhältnisse ab, in welchem das Quadrat der Entfernung der auf einander wirkenden Puncte wächst. Es wird daher räthlich seyn, auch in der reinen Mechanik diesen Fall mit besonderer Aufmerksamkeit zu erwägen.

Das erwähnte Attractionsgesetz wird der, den Formeln der vorhergehenden Vorlesung zum Grunde liegenden Bezeichnung gemäß, durch die Gleichung

$$F(u) = \frac{\varkappa}{u^2}$$

ausgedrückt, in welcher $\varkappa$ die Anziehung anzeigt, welche die Einheit der Massen in der Entfernung 1 auf den gegebenen, der Gesammtwirkung eines Körpers unterliegenden Punct ausübt. Nehmen wir, der Einfachheit wegen, die Größe der so eben genannten Anziehung für die Einheit der Kräfte selbst an, so haben wir $\varkappa = 1$, folglich

$$F(u) = \frac{1}{u^2}.$$

Diese Gleichung gibt uns

$$F'(u) = \int F(u)\, du = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u};$$

setzen wir also, im Einklange mit der vorhergehenden Vorlesung,

$$\iiint \frac{\mu\, dx\, dx\, dy}{u} = \iiint \frac{\mu\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}} = -U,$$

so sind

$$X = \frac{dU}{da}, \quad Y = \frac{dU}{db}, \quad Z = \frac{dU}{dc}$$

die Kräfte, mit welchen der Körper, auf den sich das obige dreifache Integral erstreckt, den Punct a, b, c parallel mit den Axen der x, y, z afficirt.

Die zur Bestimmung von U erforderlichen Integrationen lassen sich in den wenigsten Fällen vollständig durchführen, sondern man wird meistens genöthigt, zu Annäherungsmethoden seine Zuflucht zu nehmen.

Laplace hat die Berechnung der Größe U von der Integration einer partiellen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung abhängig gemacht. Da diese Differenzialgleichung manchmal mit Vortheil gebraucht werden kann, und bei mehreren anderen Untersuchungen ebenfalls zum Vorschein kömmt, so wollen wir dieselbe hier kennen lernen.

Wegen $\frac{du}{da} = \frac{a-x}{u}$ haben wir

$$\frac{dU}{da} = \int\int\int \mu\, dx\, dy\, dz \cdot \frac{a-x}{u^3}, \text{ folglich}$$

$$\frac{d^2U}{da^2} = \int\int\int \mu\, dx\, dy\, dz \left[-\frac{3(a-x)^2}{u^5} + \frac{1}{u^3}\right].$$

Auf dieselbe Art findet man

$$\frac{d^2U}{db^2} = \int\int\int \mu\, dx\, dy\, dz \left[-\frac{3(b-y)^2}{u^5} + \frac{1}{u^3}\right],$$

$$\frac{d^2U}{dc^2} = \int\int\int \mu\, dx\, dy\, dz \left[-\frac{3(c-z)^2}{u^5} + \frac{1}{u^3}\right].$$

Addirt man die letzteren drei Gleichungen, so ergibt sich

$$(1) \qquad \frac{d^2U}{da^2} + \frac{d^2U}{db^2} + \frac{d^2U}{dc^2} = 0,$$

welches die erwähnte partielle Differenzialgleichung ist. Man kann ihr aber noch eine andere Gestalt geben, wenn man statt der rechtwinkligen Coordinaten a, b, c des angezogenen Punctes den vom Anfangspuncte der Coordinaten zu diesem Puncte gehenden Radiusvector r, ferner den Winkel θ, welchen derselbe mit der Axe der x, und den Winkel ω, welchen die durch r und die Axe der x gelegte Ebene mit der Ebene xy bildet, in diese Gleichung einführt.

Betrachtet man U unmittelbar als eine Function von r, θ, ω, und denkt man sich die letzteren Größen durch a, b, c ausgedrückt, so hat man

$$\frac{dU}{da} = \frac{dU}{dr}\frac{dr}{da} + \frac{dU}{d\theta}\frac{d\theta}{da} + \frac{dU}{d\omega}\frac{d\omega}{da},$$

folglich

$$\frac{d^2U}{da^2}=\frac{d^2U}{dr^2}\frac{dr^2}{da^2}+\frac{d^2U}{dr\,d\theta}\frac{dr}{da}\frac{d\theta}{da}+\frac{d^2U}{dr\,d\omega}\frac{dr}{da}\frac{d\omega}{da}+\frac{dU}{dr}\frac{d^2r}{da^2}$$
$$+\frac{d^2U}{dr\,d\theta}\frac{dr}{da}\frac{d\theta}{da}+\frac{d^2U}{d\theta^2}\frac{d\theta^2}{da^2}+\frac{d^2U}{d\theta\,d\omega}\frac{d\theta}{da}\frac{d\omega}{da}+\frac{dU}{d\theta}\frac{d^2\theta}{da^2}$$
$$+\frac{d^2U}{dr\,d\omega}\frac{dr}{da}\frac{d\omega}{da}+\frac{d^2U}{d\theta\,d\omega}\frac{d\theta}{da}\frac{d\omega}{da}+\frac{d^2U}{d\omega^2}\frac{d\omega^2}{da^2}+\frac{dU}{d\omega}\frac{d^2\omega}{da^2}$$
$$=\frac{d^2U}{dr^2}\frac{dr^2}{da^2}+\frac{d^2U}{d\theta^2}\frac{d\theta^2}{da^2}+\frac{d^2U}{d\omega^2}\frac{d\omega^2}{da^2}$$
$$+2\frac{d^2U}{dr\,d\theta}\frac{dr}{da}\frac{d\theta}{da}+2\frac{d^2U}{dr\,d\omega}\frac{dr}{da}\frac{d\omega}{da}+2\frac{d^2U}{d\theta\,d\omega}\frac{d\theta}{da}\frac{d\omega}{da}$$
$$+\frac{dU}{dr}\frac{d^2r}{da^2}+\frac{dU}{d\theta}\frac{d^2\theta}{da^2}+\frac{dU}{d\omega}\frac{d^2\omega}{da^2}.$$

Entwickelt man eben so $\frac{d^2U}{db^2}$ und $\frac{d^2U}{dc^2}$, so erhält man, wenn man die gefundenen Resultate in (1) substituirt:

$$(2)\quad \left.\begin{aligned}
&\frac{d^2U}{dr^2}\left[\frac{dr^2}{da^2}+\frac{dr^2}{db^2}+\frac{dr^2}{dc^2}\right]\\
&+\frac{d^2U}{d\theta^2}\left[\frac{d\theta^2}{da^2}+\frac{d\theta^2}{db^2}+\frac{d\theta^2}{dc^2}\right]\\
&+\frac{d^2U}{d\omega^2}\left[\frac{d\omega^2}{da^2}+\frac{d\omega^2}{db^2}+\frac{d\omega^2}{dc^2}\right]\\
&+2\frac{d^2U}{dr\,d\theta}\left[\frac{dr}{da}\frac{d\theta}{da}+\frac{dr}{db}\frac{d\theta}{db}+\frac{dr}{dc}\frac{d\theta}{dc}\right]\\
&+2\frac{d^2U}{dr\,d\omega}\left[\frac{dr}{da}\frac{d\omega}{da}+\frac{dr}{db}\frac{d\omega}{db}+\frac{dr}{dc}\frac{d\omega}{dc}\right]\\
&+2\frac{d^2U}{d\theta\,d\omega}\left[\frac{d\theta}{da}\frac{d\omega}{da}+\frac{d\theta}{db}\frac{d\omega}{db}+\frac{d\theta}{dc}\frac{d\omega}{dc}\right]\\
&+\frac{dU}{dr}\left[\frac{d^2r}{da^2}+\frac{d^2r}{db^2}+\frac{d^2r}{dc^2}\right]\\
&+\frac{dU}{d\theta}\left[\frac{d^2\theta}{da^2}+\frac{d^2\theta}{db^2}+\frac{d^2\theta}{dc^2}\right]\\
&+\frac{dU}{d\omega}\left[\frac{d^2\omega}{da^2}+\frac{d^2\omega}{db^2}+\frac{d^2\omega}{dc^2}\right]
\end{aligned}\right\}=0.$$

Nun ist $\qquad r^2=a^2+b^2+c^2$

und $a=r\cos.\theta$, $b=r\sin.\theta\cos.\omega$, $c=r\sin.\theta\sin.\omega$, folglich

$$\frac{dr}{da}=\frac{a}{r}=\cos.\theta,\quad \frac{dr}{db}=\frac{b}{r}=\sin.\theta\cos.\omega,\quad \frac{dr}{dc}=\frac{c}{r}=\sin.\theta\sin.\omega.$$

Die Gleichung $a=r\cos.\theta$ gibt uns, wenn wir dieselbe in Bezug auf a, b, c nach einander partiell differenziren:

$$1 = \frac{dr}{da} \cos.\theta - r \sin.\theta \frac{d\theta}{da},$$

$$0 = \frac{dr}{db} \cos.\theta - r \sin.\theta \frac{d\theta}{db},$$

$$0 = \frac{dr}{dc} \cos.\theta - r \sin.\theta \frac{d\theta}{dc};$$

daher haben wir

$$\frac{d\theta}{da} = -\frac{\sin.\theta}{r},\ \frac{d\theta}{db} = \frac{\cos.\theta \cos.\omega}{r},\ \frac{d\theta}{dc} = \frac{\cos.\theta \sin.\omega}{r}.$$

Aus der Gleichung $tg.\,\omega = \frac{c}{b}$ folgt endlich

$$\frac{d\omega}{da} = 0,\ \frac{d\omega}{db} = -\frac{c}{b^2}\cos.\omega^2 = -\frac{\sin.\omega}{r \sin.\theta},\ \frac{d\omega}{dc} = \frac{\cos.\omega^2}{b} = \frac{\cos.\omega}{r \sin.\theta}.$$

Differenziren wir diese Resultate noch ein Mal, so erhalten wir nach gehöriger Rechnung

$$\frac{d^2r}{da^2} = \frac{\sin.\theta^2}{r},\ \frac{d^2r}{db^2} = \frac{\cos.\theta^2 \cos.\omega^2}{r} + \frac{\sin.\omega^2}{r},\ \frac{d^2r}{dc^2} = \frac{\cos.\theta^2 \sin.\omega^2}{r} + \frac{\cos.\omega^2}{r}$$

$$\frac{d^2\theta}{da^2} = \frac{2 \sin.\theta \cos.\theta}{r^2},\ \frac{d^2\theta}{db^2} = \frac{\cos.\theta \sin.\omega^2}{r^2 \sin.\theta} - \frac{2 \sin.\theta \cos.\theta \cos.\omega^2}{r^2},$$

$$\frac{d^2\theta}{dc^2} = \frac{\cos.\theta \cos.\omega^2}{r^2 \sin.\theta} - \frac{2 \sin.\theta \cos.\theta \sin.\omega^2}{r^2},$$

$$\frac{d^2\omega}{da^2} = 0,\ \frac{d^2\omega}{db^2} = \frac{\sin.\omega \cos.\omega}{r^2} + \frac{\cos.\theta^2 \sin.\omega \cos.\omega}{r^2 \sin.\theta^2} + \frac{\sin.\omega \cos.\omega}{r^2 \sin.\theta^2},$$

$$\frac{d^2\omega}{dc^2} = -\frac{\sin.\omega \cos.\omega}{r^2} - \frac{\cos.\theta^2 \sin.\omega \cos.\omega}{r^2 \sin.\theta^2} - \frac{\sin.\omega \cos.\omega}{r^2 \sin.\theta^2}$$

Es ist also

$$\frac{dr^2}{da^2} + \frac{dr^2}{db^2} + \frac{dr^2}{dc^2} = 1$$

$$\frac{d\theta^2}{da^2} + \frac{d\theta^2}{db^2} + \frac{d\theta^2}{dc^2} = \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{d\omega^2}{da^2} + \frac{d\omega^2}{db^2} + \frac{d\omega^2}{dc^2} = \frac{1}{r^2 \sin.\theta^2}$$

$$\frac{dr}{da}\frac{d\theta}{da} + \frac{dr}{db}\frac{d\theta}{db} + \frac{dr}{dc}\frac{d\theta}{dc} = 0$$

$$\frac{dr}{da}\frac{d\omega}{da} + \frac{dr}{db}\frac{d\omega}{db} + \frac{dr}{dc}\frac{d\omega}{dc} = 0$$

$$\frac{d\theta}{da}\frac{d\omega}{da} + \frac{d\theta}{db}\frac{d\omega}{db} + \frac{d\theta}{dc}\frac{d\omega}{dc} = 0$$

$$\frac{d^2 r}{d a^2}+\frac{d^2 r}{d b^2}+\frac{d^2 r}{d c^2}=\frac{2}{r}.$$

$$\frac{d^2 \theta}{d a^2}+\frac{d^2 \theta}{d b^2}+\frac{d^2 \theta}{d c^2}=\frac{cos.\,\theta}{r^2\, sin.\,\theta}$$

$$\frac{d^2 \omega}{d a^2}+\frac{d^2 \omega}{d b^2}+\frac{d^2 \omega}{d c^2}=0,$$

wodurch sich die Gleichung (2) nach verrichteter Multiplication aller Glieder mit r^2 in

$$(3)\quad r^2\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{d^2U}{d\theta^2}+\frac{1}{sin.\,\theta^2}\frac{d^2U}{d\omega^2}+2r\frac{dU}{dr}+\frac{cos.\,\theta}{sin.\,\theta}\frac{dU}{d\theta}=0$$

verwandelt. Um diese Gleichung noch mehr zusammen zu ziehen, bedenken wir, daß

$$r^2\frac{d^2U}{dr^2}+2r\frac{dU}{dr}=r\frac{d^2\,.\,rU}{dr^2}$$

ist; ferner, wenn wir $cos.\,\theta=\nu$ setzen, wegen

$$\frac{d\nu}{d\theta}=-sin.\,\theta=-\sqrt{1-\nu^2}\quad\text{und}\quad\frac{d^2\nu}{d\theta^2}=-cos.\,\theta=-\nu,$$

$$\frac{dU}{d\theta}=\frac{dU}{d\nu}\cdot\frac{d\nu}{d\theta}=-\frac{dU}{d\nu}\sqrt{1-\nu^2},$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}=\frac{d^2U}{d\nu^2}\cdot\frac{d\nu^2}{d\theta^2}+\frac{dU}{d\nu}\frac{d^2\nu}{d\theta^2}=(1-\nu^2)\frac{d^2U}{d\nu^2}-\nu\frac{dU}{d\nu},$$

also

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}+\frac{cos.\theta}{sin.\theta}\frac{dU}{d\theta}=(1-\nu^2)\frac{d^2U}{d\nu^2}-2\nu\frac{dU}{d\nu}=\frac{d\left[(1-\nu^2)\frac{dU}{d\nu}\right]}{d\nu},$$

daher wird

$$(4)\quad\frac{d\left[(1-\nu^2)\frac{dU}{d\nu}\right]}{d\nu}+\frac{\frac{d^2U}{d\omega^2}}{1-\nu^2}+r\frac{d^2\,.\,rU}{dr^2}=0.$$

Die Integration dieser Gleichung verhilft, wenn sie ausführbar ist, zur Kenntniß der Größe U.

Um hievon ein Beispiel zu geben, nehmen wir an, der auf einen gegebenen Punct einwirkende Körper sey von cylindrischen Flächen, deren erzeugende Geraden sämmtlich einander parallel laufen, begrenzt; die Dichtigkeit desselben (die Größe nämlich, welche wir in der vorhergehenden Vorlesung durch μ bezeichnet haben) ändere sich nicht, wenn man in einer zu diesen Geraden parallelen Richtung fortschreitet, und die Länge desselben sey so groß, daß die Anziehung, welche die entfern-

testen Theile auf den gegebenen Punct ausüben, vernachläßiget werden kann: so liegt die Richtung der Gesammtwirkung des Körpers offenbar in der Ebene, welche durch den angezogenen Punct senkrecht auf die geradlinige Dimension des Körpers geht, und bleibt, auch wenn der genannte Punct in einer dieser Dimension parallelen Geraden fortschreitet, ihrer früheren Lage parallel, so wie auch die Größe dieser Gesammtwirkung dadurch keine Änderung erleidet. Wird also die Axe der x den erzeugenden Geraden der Grenzflächen des Körpers parallel gelegt, und die Entfernung des angezogenen Punctes von dieser Axe durch ρ vorgestellt, so ist U nothwendig bloß eine Function von ρ und ω, und hängt von r und θ oder ν nur in so ferne ab, als ρ durch diese Größen bestimmt wird.

Wir haben demnach in dem gegenwärtigen Falle

$$\frac{dU}{dr} = \frac{dU}{d\rho}\frac{d\rho}{dr}, \qquad \frac{dU}{d\nu} = \frac{dU}{d\rho}\frac{d\rho}{d\nu},$$

$$\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{d^2U}{d\rho^2}\frac{d\rho^2}{dr^2} + \frac{dU}{d\rho}\frac{d^2\rho}{dr^2}, \quad \frac{d^2U}{d\nu^2} = \frac{d^2U}{d\rho^2}\frac{d\rho^2}{d\nu^2} + \frac{dU}{d\rho}\frac{d^2\rho}{d\nu^2}.$$

Es ist aber $\rho = r\sin\theta = r\sqrt{1-\nu^2}$, folglich

$$\frac{d\rho}{dr} = \sqrt{1-\nu^2}, \qquad \frac{d^2\rho}{dr^2} = 0,$$

$$\frac{d\rho}{d\nu} = -\frac{\nu r}{\sqrt{1-\nu^2}}, \qquad \frac{d^2\rho}{d\nu^2} = -\frac{r}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wodurch sich

$$\frac{dU}{dr} = \frac{dU}{d\rho}\sqrt{1-\nu^2}, \qquad \frac{dU}{d\nu} = -\frac{dU}{d\rho}\cdot\frac{\nu r}{\sqrt{1-\nu^2}},$$

$$\frac{d^2U}{dr^2} = (1-\nu^2)\frac{d^2U}{d\rho^2}, \quad \frac{d^2U}{d\nu^2} = \frac{d^2U}{d\rho^2}\cdot\frac{\nu^2 r^2}{1-\nu^2} - \frac{dU}{d\rho}\cdot\frac{r}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ergibt. Substituiren wir diese Resultate in die mit (4) gleichbedeutende Gleichung

$$(1-\nu^2)\frac{d^2U}{d\nu^2} - 2\nu\frac{dU}{d\nu} + \frac{1}{1-\nu^2}\cdot\frac{d^2U}{d\omega^2} + r^2\frac{d^2U}{dr^2} + 2r\frac{dU}{dr} = 0,$$

so erhalten wir nach gehöriger Reduction

$$r^2\frac{d^2U}{d\rho^2} + \frac{r}{\sqrt{1-\nu^2}}\cdot\frac{dU}{d\rho} + \frac{1}{1-\nu^2}\cdot\frac{d^2U}{d\omega^2} = 0;$$

und wenn wir diese Gleichung mit $1-\nu^2$ multipliciren, wegen $r\sqrt{1-\nu^2} = \rho$,

$$(5) \qquad \rho^2\frac{d^2U}{d\rho^2} + \rho\frac{dU}{d\rho} + \frac{d^2U}{d\omega^2} = 0$$

Diese Gleichung nimmt, wenn wir

$$dU = p d\rho + q d\omega, \quad dp = r d\rho + s d\omega, \quad dq = s d\rho + t d\omega$$

setzen, die Form

(6) $$r\rho^2 + p\rho + t = 0$$

an. Um dieselbe zu integriren, schaffen wir aus ihr die Größen r und t mittelst der Substitutionen

$$r = \frac{dp - s d\omega}{d\rho}, \quad t = \frac{dq - s d\rho}{d\omega}$$

weg, so ergibt sich

$$\rho(\rho dp + p d\rho) d\omega + dq d\rho = s(\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2).$$

Betrachten wir s als eine willkürliche Größe, so wird dieser Gleichung Genüge geleistet, wenn wir die zwei Gleichungen

$$\rho(\rho dp + p d\rho) d\omega + dq d\rho = 0,$$
$$\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2 = 0$$

bestehen lassen. Aus der letzteren folgt

$$\frac{d\rho}{\rho} = d\omega \sqrt{-1};$$

also, wenn wir integriren, und durch lA eine Constante vorstellen,

$$l\rho - lA = \omega\sqrt{-1} \quad \text{oder} \quad l\frac{\rho}{A} = \omega\sqrt{-1},$$

$$\text{d. h.} \quad \frac{\rho}{A} = e^{\omega\sqrt{-1}} \quad \text{und}$$

(7) $$\rho e^{-\omega\sqrt{-1}} = A.$$

Die erste Gleichung gibt, wenn wir in derselben $\rho d\omega\sqrt{-1}$ statt $d\rho$ schreiben:

$$\rho dp + p d\rho + dq\sqrt{-1} = 0 \quad \text{oder} \quad d(p\rho) + dq\sqrt{-1} = 0,$$

also

(8) $$p\rho + q\sqrt{-1} = B,$$

wobei B ebenfalls eine Constante anzeigt. Der in der sieben und fünfzigsten Vorlesung über die Analysis vorgetragenen Lagrange'schen Integrationsmethode gemäß, welche auch hier ihre Anwendung findet, folgt aus (7) und (8) die Gleichung

(9) $$p\rho + q\sqrt{-1} = \varphi(\rho e^{-\omega\sqrt{-1}}),$$

wobei φ eine willkürliche Function vorstellt, als ein erstes Integral der Gleichung (6). Dieses läßt sich nach derselben Methode weiter behan-

deln. Es ist

$$q = \frac{dU - p\,d\rho}{d\omega}.$$

Dieser Ausdruck, in (9) eingeführt, gibt

$$dU\sqrt{-1} - d\omega\,\varphi(\rho e^{-\omega\sqrt{-1}}) = p(d\rho\sqrt{-1} - \rho\,d\omega),$$

welche Gleichung folgende zwei

$$dU\sqrt{-1} - d\omega\,\varphi(\rho e^{-\omega\sqrt{-1}}) = 0,$$
$$d\rho\sqrt{-1} - \rho\,d\omega = 0$$

darbietet. Das Integral der letzteren ist

(10) $$\rho e^{\omega\sqrt{-1}} = C,$$

wobei C eine Constante bedeutet; die erstere hingegen mit der letzteren combinirt, verwandelt sich in

$$dU - \frac{d\rho}{\rho}\,\varphi\left(\frac{\rho^2}{C}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad dU - \frac{2\rho\,d\rho}{C}\cdot\frac{C}{2\rho^2}\,\varphi\left(\frac{\rho^2}{C}\right) = 0,$$

woraus, wenn man

$$\frac{1}{2}\int d\left(\frac{\rho^2}{C}\right)\cdot\frac{C}{\rho^2}\,\varphi\left(\frac{\rho^2}{C}\right) = \Psi\left(\frac{\rho^2}{C}\right) = \Psi(\rho e^{-\omega\sqrt{-1}})$$

setzt,

(11) $$U - \Psi(\rho e^{-\omega\sqrt{-1}}) = D$$

folgt. Die Gleichungen (10) und (11) verhelfen uns endlich zum letzten Integral der partiellen Differenzialgleichung (5), nämlich

$$U - \Psi(\rho e^{-\omega\sqrt{-1}}) = \Phi(\rho e^{\omega\sqrt{-1}})$$

$$\text{oder} \quad U = \Phi(\rho e^{\omega\sqrt{-1}}) + \Psi(\rho e^{-\omega\sqrt{-1}}),$$

in welchem Φ und Ψ willkürliche Functionen vorstellen.

Da $e^{\omega\sqrt{-1}} = \cos.\omega + \sqrt{-1}\,\sin.\omega$ ist, so kann man diesem Integral auch die Form

$$U = \Phi(\rho\cos.\omega + \sqrt{-1}\,.\,\rho\sin.\omega) + \Psi(\rho\cos.\omega - \sqrt{-1}\,.\,\rho\sin.\omega)$$

geben. Um im Stande zu seyn, die Formen der Functionen Φ und Ψ zu bestimmen, muß man die Beschaffenheit von U für zwei verschiedene Werthe von ω kennen.

Vierte Vorlesung.

Über die Anziehung einer Kugel gegen einen gegebenen Punct.

Die Berechnung der Anziehung, welche ein Körper auf einen Punct ausübt, wird in manchen Fällen dadurch beträchtlich erleichtert, daß man das Differenzial dieser Anziehung durch Polarcoordinaten ausdrückt. Dieselben dringen sich von selbst auf, wenn man nach der Wirkung eines von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten Körpers (einer Hohlkugel) auf einen Punct unter der Voraussetzung fragt, daß die Dichtigkeit dieses Körpers in allen von seinem Mittelpuncte gleich weit entfernten Puncten gleich groß ist.

Die Richtung der Resultirenden R sämmtlicher, von der Hohlkugel ausgehenden Kräfte, fällt offenbar in die Gerade, welche den angezogenen Punct mit dem Centrum der Hohlkugel verbindet. Nehmen wir dieses Centrum für den Pol, und die genannte Verbindungslinie für die Axe des Coordinatensystems an, und bezeichnen wir durch r den Radiusvector irgend eines Punctes der Masse der Hohlkugel, ferner durch θ den Winkel, welchen dieser Radiusvector mit der Axe bildet, endlich durch ω die Neigung der Ebene des Winkels θ gegen eine durch die Axe gelegte fixe Ebene.

Zwischen den zwei concentrischen Kugelflächen, deren Halbmesser r und $r + dr$ sind, befindet sich eine Schichte der gegebenen Hohlkugel, deren Masse wir, in so fern die Dicke dr derselben im Zustande des unendlichen Abnehmens gedacht wird, als durchgehends gleichförmig dicht betrachten dürfen. Alle Puncte dieser Kugelschichte, für welche der Winkel θ eine bestimmte Größe besitzt, liegen in der Kegelfläche, deren Seitenlinien gegen die Axe des angenommenen Polarcoordinatensystems unter dem genannten Winkel geneigt sind; die beiden, den Winkeln θ und $\theta + d\theta$ entsprechenden Kegelflächen begrenzen einen ringförmigen Theil der Kugelschichte, von dem zwei durch die Polaraxe gelegte, gegen die oben erwähnte fixe Ebene unter den Winkeln ω und $\omega + d\omega$ geneigte Ebenen ein Stück absondern, welches sich bei dem unendlichen Abnehmen von dr, $d\theta$, $d\omega$ einem rechtwinkligen Parallelepiped unendlich nähert.

Die drei in dem Eckpuncte desselben, welcher den Coordinaten r, θ, ω entspricht, an einander stoßenden Kanten sind: das Differenzial des Radiusvectors r; ferner ein aus dem Pole mit dem Halbmesser r zwischen den Schenkeln des Winkels $d\theta$ verzeichneter Kreisbogen; endlich ein dem Winkel $d\omega$ entsprechender Kreisbogen, welcher das aus dem hier betrachteten Eckpuncte des Parallelepipeds auf die Polaraxe fallende Perpendikel zum Halbmesser, und den Durchschnittspunct dieses Perpendikels mit der Polaraxe zum Mittelpuncte hat. Bezeichnen wir nun die Dichtigkeit des erwähnten Parallelepipeds, welche eine bekannte Function von r ist, durch μ, so wird die Masse desselben durch das Product

$$\mu \,.\, d\mathrm{r} \,.\, \mathrm{r}d\theta \,.\, \mathrm{r}\sin.\theta\, d\omega = \mu \mathrm{r}^2 \sin.\theta\, d\mathrm{r}\, d\theta\, d\omega$$

ausgedrückt.

Dieß vorausgesetzt, sey u die Entfernung des Punctes r, θ, ω von dem angezogenen Puncte, und a die Entfernung des letzteren vom Mittelpuncte der Hohlkugel, also

$$(1) \qquad \mathrm{u}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{r}^2 - 2\mathrm{ar}\cos.\theta,$$

so ist der Cosinus des Winkels, welchen die Geraden u und a mit einander bilden:

$$= \frac{\mathrm{a} - \mathrm{r}\cos.\theta}{\mathrm{u}} = \frac{d\mathrm{u}}{d\mathrm{a}};$$

und wenn $F(\mathrm{u})$ die Anziehung anzeigt, welche die Einheit der Massen auf den gegebenen Punct ausübt, die Kraft, mit welcher das Parallelepiped $\mu \mathrm{r}^2 \sin.\theta\, d\mathrm{r}\, d\theta\, d\omega$ diesen Punct gegen das Centrum der Hohlkugel treibt:

$$= \mu \mathrm{r}^2 \sin.\theta\, d\mathrm{r}\, d\theta\, d\omega \,.\, F(\mathrm{u}) \frac{d\mathrm{u}}{d\mathrm{a}}.$$

Integrirt man dieses Differenzial in Bezug auf die Variable ω innerhalb der Grenzen o und 2π, so hat man die Anziehung eines (den Größen r und θ entsprechenden) ringförmigen Theiles der auf die Halbmesser r und $\mathrm{r} + d\mathrm{r}$ sich beziehenden Schichte der Hohlkugel gegen den gegebenen Punct; das hinsichtlich der Veränderlichen θ, von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$ genommene Integral des so eben erhaltenen Resultates gibt die Anziehung dieser Kugelschichte selbst; eine dritte Integration endlich nach der Variablen r, welche, wenn r_1 und r_2 die Halbmesser der inneren und der äußeren Grenzfläche der Hohlkugel vorstellen, sich von $\mathrm{r} = \mathrm{r}_1$ bis $\mathrm{r} = \mathrm{r}_2$ erstrecken muß, verhilft uns zur Kennt-

niß der von der Hohlkugel auf den gegebenen Punct ausgehenden Anziehungskraft R. Es ist also, wenn die Integrationen auf die so eben erklärte Weise vorgenommen werden:

$$R = \int\int\int \mu r^2 \sin.\theta \, dr \, d\theta \, d\omega \, . \, F(u) \frac{du}{da}.$$

Da a von r, θ, ω nicht abhängt, und, wenn man

(2) $$\int F(u)\, du = F'(u)$$

setzt, $F(u) \frac{du}{da} = \frac{dF'(u)}{da}$ ist, so kann man die Differenziation in Bezug auf a auch nach dem Integriren bewerkstelligen; man hat somit

$$R = \frac{d\int\int\int \mu r^2 \sin.\theta \, dr \, d\theta \, d\omega \, . \, F'(u)}{da}.$$

Die Integration hinsichtlich ω gibt uns offenbar

$$R = 2\pi \, . \, \frac{d\int\int \mu r^2 \sin.\theta \, dr \, d\theta \, . \, F'(u)}{da}.$$

Um die Integration nach θ auf eine bequeme Weise auszuführen, bedenken wir, daß aus der Gleichung (1)

$$u \frac{du}{d\theta} = a r \sin.\theta \quad \text{oder} \quad r \sin.\theta = \frac{u}{a} \, . \, \frac{du}{d\theta}$$

folgt. Hiedurch wird

$$R = 2\pi \, . \, \frac{d\left[\frac{1}{a}\int\int \mu r \, dr \, . \, u F'(u) \frac{du}{d\theta} d\theta\right]}{da}.$$

Nun sey

(3) $$\int u F'(u)\, du = F''(u),$$

so hat man $u F'(u) \frac{du}{d\theta} = \frac{dF''(u)}{d\theta}$, folglich

$$R = 2\pi \, . \, \frac{d\left[\frac{1}{a}\int\int \mu r \, dr \, . \, \frac{dF''(u)}{d\theta} d\theta\right]}{da}.$$

Für $\theta = \pi$ wird offenbar $u = a + r$;

für $\theta = o$ hingegen entweder $u = a - r$ oder $u = r - a$, je nachdem $r < a$ oder $r > a$ ist; integrirt man daher nach θ, von $\theta = o$ bis $\theta = \pi$, so findet man

(4) $$R = 2\pi \, , \, \frac{d\left[\frac{1}{a}\int \mu r \, dr \, [F''(a+r) - F''(\pm a \mp r)]\right]}{da},$$

wobei die oberen Zeichen gelten, wenn $r < a$, und die unteren, wenn $r > a$ ist. Es bleibt demnach bloß noch die Integration in Bezug auf r übrig, welche man aber, ohne die Beschaffenheit der Function F, und die zwischen μ und r bestehende Relation näher zu kennen, nicht zu Stande zu bringen vermag.

Lassen wir nun die Anziehung, welche ein materieller Punct auf einen andern ausübt, dem Quadrate ihrer Entfernung verkehrt proportionirt seyn, d. h. setzen wir

$$F(u) = \frac{1}{u^2},$$

so ergibt sich $F'(u) = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}$

und $F''(u) = -\int du = -u$, also

$$F''(a+r) - F''(a-r) = -(a+r) + (a-r) = -2r$$

und

$$F''(r+a) - F''(r-a) = -(r+a) + (r-a) = -2a;$$

mithin haben wir, unter der Voraussetzung, daß der größte Werth, welchen r im Bereiche der Integration erhält, nicht größer ist als a, d. h. daß der von der Hohlkugel afficirte Punct außerhalb derselben, oder höchstens in ihrer äußeren Grenzfläche liegt,

$$R = -4\pi \frac{d\left[\frac{1}{a}\int \mu r^2 dr\right]}{da},$$

oder, weil $\int \mu r^2 dr$ kein a enthält, und $-\frac{d\frac{1}{a}}{da} = \frac{1}{a^2}$ ist,

$$R = \frac{4\pi \int \mu r^2 dr}{a^2}.$$

Aber $4\pi r^2 dr$ ist, wie man leicht sieht, das Differenzial des Volums, folglich $4\pi\mu r^2 dr$ das Differenzial der Masse eines durch die mit dem Halbmesser r beschriebene Kugelfläche begrenzten Körpers; das von $r = r_1$ bis $r = r_2$ genommene Integral $4\pi\int\mu r^2 dr$ drückt demnach die Masse einer Hohlkugel aus, welche r_1 und r_2 zum inneren und äußeren Halbmesser hat, und deren Dichtigkeit an jeder Stelle eine gegebene Function der Entfernung dieser Stelle von dem Mittelpuncte ist. Der für R gefundene Ausdruck zeigt also, daß bei dem angenommenen Attractionsgesetze eine Hohlkugel, welche in gleichen Entfernungen von ihrem Mittelpuncte gleich dicht ist, auf einen außer ihr befind-

lichen oder in ihrer äußeren Fläche liegenden Punct so wirkt, als ob ihre gesammte Masse in ihrem Mittelpuncte vereinigt wäre. Was hier von einer Hohlkugel gesagt wurde, gilt auch von einer soliden Kugel, weil diese aus jener entsteht, wenn der Halbmesser der inneren Grenzfläche verschwindet.

Nehmen wir aber an, daß der kleinste Werth des veränderlichen Halbmessers r nicht kleiner ist als a, d. h. daß der von der Hohlkugel angezogene Punct innerhalb ihrer Höhlung oder höchstens in ihrer inneren Grenzfläche sich befindet, so haben wir

$$R = -4\pi \frac{d . \int \mu r^2 dr}{da} = 0,$$

weil $\int \mu r^2 dr$ von a frei ist, also das Differenzial dieser Größe in Bezug auf a verschwindet. Bei dem vorausgesetzten Anziehungsgesetze wird demnach ein im Innern unserer Hohlkugel oder auch auf ihrer inneren Grenzfläche wo immer liegender Punct nach allen Seiten gleich stark gezogen, und bleibt somit, wenn keine andere Kraft ins Spiel kommt, in Ruhe. Bei einer soliden Kugel tritt dieser Umstand nur dann ein, wenn der angezogene Punct mit dem Mittelpuncte derselben übereinstimmt.

Die in der vorhergehenden Vorlesung erhaltene Gleichung (4) führt auf dieselben Resultate. In Bezug auf eine Hohlkugel nämlich, deren Dichtigkeit in gleichen Abständen vom Mittelpuncte keiner Änderung unterliegt, ist, wenn der Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct versetzt wird, die Größe, welche wir durch U vorgestellt haben, von ν und ω unabhängig; lassen wir überdieß die Axe der x mit der Verbindungslinie des Mittelpunctes der Hohlkugel und des angezogenen Punctes zusammen fallen, so wird der Radiusvector r (nach der am angeführten Orte gewählten Bezeichnung) = a: es reducirt sich also die Gleichung (4) gegenwärtig auf

$$\frac{d^2 . aU}{da^2} = 0,$$

woraus $\frac{d . aU}{da} = A$ und $aU = Aa - B$

folgt, wobei A und B beständige Größen anzeigen. Hiedurch wird

$$U = A - \frac{B}{a} \text{ und } \frac{dU}{da} = \frac{B}{a^2},$$

also wegen $R = \frac{dU}{da}$ auch $R = \frac{B}{a^2}$.

Die Constante B ist von a unabhängig, jedoch erhält sie für Puncte, welche außerhalb und innerhalb der Hohlkugel liegen, verschiedene Werthe, welche man durch Betrachtung einfacher specieller Fälle kennen lernt. Befindet sich der angezogene Punct im Mittelpuncte der Hohlkugel, so verschwindet die Gesammtkraft, welche dieselbe auf ihn ausübt, weil die von jedem einzelnen Punct der Hohlkugel auf den Mittelpunct ausgehende Kraft durch die Gegenthätigkeit des Punctes aufgehoben wird, welcher in der Verlängerung der Verbindungslinie des ersteren mit dem Mittelpuncte in gleicher Entfernung von dem Mittelpuncte vorhanden ist. Die Constante B hat also hier den Werth o, und es ist kein Grund vorhanden, ihr, so lange der gegebene Punct nicht in die Masse der Hohlkugel eindringt, einen anderen beizulegen. Entfernt sich der angezogene Punct von dem Mittelpuncte der Hohlkugel unendlich, so nähern sich die Kräfte, welche die verschiedenen Theile dieses Körpers auf ihn äußern, ohne Ende der Gleichheit, und die Gesammtkraft $\frac{B}{a^2}$ aller hat nothwendig den Ausdruck $\frac{M}{a^2}$ zur Grenze, wenn M die Masse der Hohlkugel vorstellt. Allein B ändert sich nicht, während a sich verändert; es ist also nothwendig $B = M$.

Aus den so eben vorgetragenen Sätzen erhellet, daß eine aus gleichförmig dichten concentrischen Schichten bestehende Kugel bei dem angenommenen Attractionsgesetze auf jeden Punct ihrer Masse so wirkt, als ob die Theile derselben, welche vom Mittelpuncte weiter abstehen, als der erstere Punct, gar nicht vorhanden wären.

Eine solide und gleichförmig dichte Kugel übt also auf einen Punct, dessen Entfernung von ihrem Centrum $= r$ ist, die Kraft $\frac{4\pi\mu r^3}{3 r^2} = \frac{4\pi\mu r}{3}$ aus, wobei μ die Dichtigkeit der Kugel anzeigt; denn $\frac{4\pi r^3}{3}$ ist das Volum, folglich $\frac{4\pi\mu r^3}{3}$ die Masse jenes Theiles derselben, welcher innerhalb einer mit ihr concentrischen und mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugelfläche liegt. Hieraus erhellet, daß die Kräfte, mit welchen zwei Puncte der Masse einer gleichförmig dichten Kugel bei dem angenommenen Attractionsgesetze gegen den Mittelpunct getrieben werden, im geraden Verhältnisse der Entfernungen dieser Puncte vom Mittelpuncte stehen.

Es bietet sich nun die Frage dar, ob das Anziehungsgesetz $F(u) = \frac{1}{u^2}$ das einzige ist, bei welchem eine aus gleichförmig dich-

ten concentrischen Schichten bestehende Kugel auf einen außerhalb derselben gegebenen Punct so wirkt, als ob ihre gesammte Masse im Mittelpuncte vereinigt wäre Um diese Frage zu beantworten, wollen wir die Form der Function F bestimmen, für welche die Gleichung

$$2\pi \frac{d\left[\frac{1}{a}\int \mu r\, dr\, [F''(a+r) - F''(a-r)]\right]}{da} = 4\pi \int \mu r^2 dr \,.\, F(a)$$

Statt findet. Diese Gleichung gibt uns, wenn wir sie in Bezug auf r differenziren, nach gehöriger Tilgung der beiderseits des Gleichheitszeichens übereinstimmenden Factoren,

$$\frac{d\left[\frac{1}{a}\,[F''(a+r) - F''(a-r)]\right]}{da} = 2\, r\, F(a),$$

woraus $\frac{1}{a}[F''(a+r) - F''(a-r)] = 2\, r \int F(a)\, da$ und

(5) $$F''(a+r) - F''(a-r) = 2\, r\, a \int F(a)\, da$$

folgt. Die Größe linker Hand des Gleichheitszeichens gibt in Bezug auf a, zwei Mal nach einander differenzirt, denselben Differenzialquotienten, welcher aus der zweimaligen Differenziation nach r entspringt; denn setzt man im Allgemeinen

$$dF''(u) = F_{,}''(u)\, du \quad \text{und} \quad dF_{,}''(u) = F_{,,}''(u)\, du,$$

so hat man offenbar

$$\frac{d^2 F''(a+r)}{da^2} = F_{,,}''(a+r) = \frac{d^2 F''(a+r)}{dr^2};$$

ferner wegen

$$\frac{dF''(a-r)}{da} = F_{,}''(a-r) \quad \text{und} \quad \frac{dF''(a-r)}{dr} = -F_{,}''(a-r)$$

$$\frac{d^2 F''(a-r)}{da^2} = F_{,,}''(a-r) = \frac{d^2 F''(a-r)}{dr^2},$$

es muß also dieselbe Eigenschaft auch der rechter Hand des Gleichheitszeichens vorhandenen Größe $r a \int F(a)\, da$ zukommen.

Nennen wir das Integral $\int F(a)\, da$, so wie es die Rechnung gibt, unserer obigen Bezeichnung gemäß, $F'(a)$, so wird hiezu im Allgemeinen noch eine durch die Gleichung (5) bedingte, von r allein abhängende Größe H (an die Stelle der gewöhnlichen Constante) gesetzt werden müssen. Differenziren wir nun die Größe

$$r a\,(F'(a) + H)$$

zwei Male hinter einander sowohl nach a als auch nach r, und setzen wir die hiedurch sich ergebenden Differenzialquotienten einander gleich, so haben wir

$$r\left(2F(a) + a\frac{dF(a)}{da}\right) = a\frac{d^2 . rH}{dr^2}$$

oder $$\frac{2F(a)}{a} + \frac{dF(a)}{da} = \frac{1}{r}\frac{d^2 . rH}{dr^2}.$$

Aber die Größe linker Hand des Gleichheitszeichens ist hier von r, und die Größe rechter Hand desselben von a unabhängig, daher ist jede dieser Größen nothwendig eine Constante, und man kann

$$\frac{2F(a)}{a} + \frac{dF(a)}{da} = 3A$$

oder $$2aF(a)\,da + a^2 dF(a) = 3Aa^2 da$$

annehmen, woraus durch Integration

$$a^2F(a) = Aa^3 + B, \text{ d. h. } F(a) = Aa + \frac{B}{a^2}$$

folgt, welches der allgemeinste Ausdruck des Anziehungsgesetzes ist, bei dem die oben ausgesprochene Beschaffenheit der Einwirkung einer Kugel auf einen außer ihr befindlichen Punct eintritt.

Soll aber die Resultirende aller Kräfte, mit welchen eine aus concentrischen gleichförmig dichten Schichten bestehende Hohlkugel auf einen in ihrer Höhlung angenommenen Punct wirkt, gleich Null seyn, so muß die Gleichung

$$2\pi\frac{d\left[\frac{1}{a}\int\mu r\,dr\,[F''(r+a) - F''(r-a)]\right]}{da} = 0$$

bestehen, welche

$$\frac{d\frac{1}{a}[F''(r+a) - F''(r-a)]}{da} = 0,$$

folglich $$F''(r+a) - F''(r-a) = Ka$$

gibt, wobei K bloß von r abhängt. Differenzirt man diese Gleichung zwei Male nach einander in Bezug auf a, so erhält man

$$\frac{d^2F''(r+a)}{da^2} - \frac{d^2F''(r-a)}{da^2} = 0 \text{ oder } \frac{d^2F''(r+a)}{da^2} = \frac{d^2F''(r-a)}{da^2}.$$

Mittelst der willkürlichen Größe r kann man für jedes a die Summe r + a jeder beliebigen Größe, und zugleich die Differenz r — a

jeder anderen Größe gleich machen, woraus folgt, daß im Allgemeinen der Differenzialquotient $\frac{d^2 F'(u)}{d u^2}$ einer Constante, welche wir A nennen wollen, gleich ist. Wir haben somit durch Integration

$$\frac{d F''(u)}{d u} \quad \text{oder} \quad u F'(u) = A u - B,$$

$$\text{mithin} \quad F'(u) = A - \frac{B}{u}.$$

Differenzirt man diese Gleichung, so ergibt sich wegen (2)

$$F(u) = \frac{B}{u^2}.$$

Es ist also der Fall, wenn die Anziehung mit dem Quadrate der Distanz der auf einander wirkenden Puncte im verkehrten Verhältnisse steht, der einzige, in welchem ein Punct innerhalb einer aus gleichförmig dichten concentrischen Schichten bestehenden Hohlkugel an jedem Orte im Gleichgewichte bleibt.

Fünfte Vorlesung.

Über die Einwirkung eines gleichförmig dichten elliptischen Sphäroids auf einen gegebenen Punct bei dem in der Natur Statt findenden Anziehungsgesetze.

Nehmen wir an, jeder Punct eines gleichförmig dichten elliptischen Sphäroids übe auf einen gegebenen Punct eine dem Quadrate seiner Entfernung von dem letzteren verkehrt proportionirte Anziehung aus, und suchen wir die Größe und Richtung der Kraft, mit welcher der genannte Körper diesen Punct zur Bewegung anregt.

Es seyen die drei Hauptaxen des elliptischen Sphäroids, deren Hälften wir durch α, β, γ vorstellen wollen, die Axen der x, y, z, so daß $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ die Gleichung der Oberfläche des Sphäroids ist; ferner a, b, c die Coordinaten des angezogenen Punctes, und X, Y, Z die durch Zerlegung der zu suchenden Resultirenden nach den Richtungen der x, y, z sich ergebenden Kräfte: so kann man die Aufgabe als aufgelöst betrachten, sobald man diese Kräfte ausgemittelt hat. Wollte man sich hiezu der in der zweiten Vorlesung aufgestellten Formeln bedienen, so würde man die Rechnung bald wegen der Schwierigkeiten, mit welchen die zu verrichtenden Integrationen verknüpft sind, aufgeben müssen; durch einen schicklichen Gebrauch der Polarcoordinaten hingegen läßt sich die Rechnung ihrem Ende näher führen.

Bezeichnen wir den Radiusvector, welcher von dem Puncte a, b, c zu irgend einem Puncte im Innern des elliptischen Sphäroids geht, durch r; den Winkel, unter welchem derselbe gegen die Richtung der x geneigt ist, durch θ; und den Winkel, welchen die Ebene des so eben genannten θ mit jener der xy bildet, durch ω: so haben wir offenbar die Anziehung, welche das den unendlich kleinen Änderungen dr, $d\theta$, $d\omega$ entsprechende Parallelepiped auf den Punct a, b, c ausübt, wenn wir die Masse $\mu r^2 \sin.\theta\, dr\, d\theta\, d\omega$ desselben mit dem Ausdrucke der Kraft, welche der Einheit der Massen bei dem angenommenen Attractionsgesetze zukommt, nämlich mit $\frac{1}{r^2}$ multipliciren; die

Kraft, welche dieses Parallelepiped parallel mit der Axe der x auf den genannten Punct äußert, ist demnach $= \mu \sin.\theta \cos.\theta \, dr \, d\theta \, d\omega$, woraus

$$X = \int\int\int \mu \sin.\theta \cos.\theta \, dr \, d\theta \, d\omega$$

folgt. Bringen wir die als constant vorausgesetzte Zahl μ vor die Integralzeichen, und verrichten wir sodann die Integration in Bezug auf r, so erhalten wir, wenn r_1 und r_2 die beiden der Oberfläche des Sphäroids für ein festgesetztes θ und ω correspondirenden Werthe von r anzeigen:

$$X = \mu \int\int (r_2 - r_1) \sin.\theta \cos.\theta \, d\theta \, d\omega.$$

Um r_1 und r_2 durch θ und ω darzustellen, müssen wir zur Gleichung der Oberfläche des Sphäroids unsere Zuflucht nehmen. Es ist, wie man leicht sieht,

$$a - x = r \cos.\theta,$$
$$b - y = r \sin.\theta \cos.\omega,$$
$$c - z = r \sin.\theta \sin.\omega;$$

substituirt man die aus diesen Ausdrücken sich ergebenden Werthe von x, y, z in die Gleichung $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$, so hat man, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{\cos.\theta^2}{\alpha^2} + \frac{\sin.\theta^2 \cos.\omega^2}{\beta^2} + \frac{\sin.\theta^2 \sin.\omega^2}{\gamma^2} = H,$$
$$\frac{a \cos.\theta}{\alpha^2} + \frac{b \sin.\theta \cos.\omega}{\beta^2} + \frac{c \sin.\theta \sin.\omega}{\gamma^2} = K,$$
$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} - 1 = L$$

setzt:

$$Hr^2 - 2Kr + L = 0;$$

eine Gleichung, deren beide Wurzeln die Werthe von r_1 und r_2 sind.

Da H nothwendig stets positiv, L hingegen positiv oder negativ ist, je nachdem der Punct a, b, c außerhalb oder innerhalb des elliptischen Sphäroids $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ liegt, so hat die gefundene Gleichung, wenn ihr anders reelle Wurzeln zukommen, im ersten Falle dem Zeichen nach übereinstimmende, und im zweiten einander entgegengesetzte Wurzeln. Aber in dem obigen Ausdrucke für X sind statt r_1 und r_2 ihre numerischen Werthe zu setzen; man wird daher für $r_2 - r_1$ die Differenz oder die Summe der Wurzeln der erwähnten

Gleichung nehmen, je nachdem der Punct a, b, c sich außerhalb oder innerhalb des elliptischen Sphäroids befindet.

Der zweite dieser Fälle ist bei Weitem einfacher als der erste, da in jenem $r_2 - r_1$ unter einer rationalen Form, in diesem hingegen $r_2 - r_1$ mit einem Wurzelzeichen behaftet erscheint. Wir wollen daher den Fall, wenn der angezogene Punct innerhalb des Sphäroids liegt, zuerst vornehmen.

In demselben ist $r_2 - r_1 = \frac{2K}{H}$; folglich, wenn man statt K seinen Werth schreibt:

$$X = \frac{2\mu a}{\alpha^2}\iint\frac{\sin.\theta\cos.\theta^2 d\theta\, d\omega}{H} + \frac{2\mu b}{\beta^2}\iint\frac{\sin.\theta^2\cos.\theta\cos.\omega\, d\theta\, d\omega}{H} + \frac{2\mu c}{\gamma^2}\iint\frac{\sin.\theta^2\cos.\theta\sin.\omega\, d\theta\, d\omega}{H}.$$

Diese Integralien müssen über die ganze Oberfläche des elliptischen Sphäroids ausgedehnt werden, was man dadurch erreicht, daß man dieselben innerhalb der Grenzen $\theta = o$, $\theta = \pi$ und $\omega = o$, $\omega = \pi$ nimmt.

Betrachtet man, den in der neun und vierzigsten Vorlesung über die Analysis vorgetragenen Lehren gemäß, das Integral $\int_o^\pi \frac{\sin.\theta^2\cos.\theta\, d\theta}{H}$ als die Grenze, welcher sich die Summe aller Werthe des Bruches $\frac{\sin.\theta^2\cos.\theta}{H}$ bei dem Übergange des Bogens θ von o in π um so mehr nähert, durch je kleinere Intervalle dabei θ fortschreitet, so überzeugt man sich leicht, daß

$$\int_o^\pi \frac{\sin.\theta^2\cos.\theta\, d\theta}{H} = o$$

ist; denn die von $\theta = \frac{\pi}{2}$ bis $\theta = \pi$ erscheinenden Werthe des genannten Bruches sind den zwischen $\theta = o$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$ sich ergebenden in verkehrter Ordnung gleich und den Zeichen nach entgegengesetzt. Wir haben somit bloß

$$X = \frac{2\mu a}{\alpha^2}\iint\frac{\sin.\theta\cos.\theta^2 d\theta\, d\omega}{H}$$

oder
$$X = \frac{2\mu a}{\alpha^2}\iint\frac{\sin.\theta\cos.\theta^2 d\theta\, d\omega}{\frac{\cos.\theta^2}{\alpha^2} + \frac{\sin.\theta^2\cos.\omega^2}{\beta^2} + \frac{\sin.\theta^2\sin.\omega^2}{\gamma^2}}.$$

Es ist nicht schwierig zu zeigen (man sehe unter andern die achtzehnte Vorlesung über die Geometrie), daß $\frac{\pi}{AB}$ den Werth des Integrals $\int \frac{d\omega}{A^2 \cos.\omega^2 + B^2 \sin.\omega^2}$ von $\omega = o$ bis $\omega = \pi$ darstellt.

Wendet man dieses Resultat auf den obigen Ausdruck für X an, indem man im Nenner desselben $\frac{\cos.\theta^2 \cos.\omega^2 + \cos.\theta^2 \sin.\omega^2}{a^2}$ statt $\frac{\cos.\theta^2}{a^2}$ setzt, so erhält man

$$X = \frac{2\mu\pi a}{a^2} \int_o^\pi \frac{\sin.\theta \cos.\theta^2 \, d\theta}{\sqrt{\left(\frac{\cos.\theta^2}{a^2} + \frac{\sin.\theta^2}{\beta^2}\right)\left(\frac{\cos.\theta^2}{a^2} + \frac{\sin.\theta^2}{\gamma^2}\right)}}.$$

Man kann sich damit begnügen, das Integral in Bezug auf θ bloß von $\theta = o$ bis $\theta = \frac{1}{2}\pi$ auszudehnen, wenn man den Coefficienten desselben verdoppelt. Es sey nun $\cos.\theta = t$, so wird

$$\sin.\theta \, d\theta = - dt;$$

nennen wir ferner die Masse des Sphäroids M, so ist $M = \frac{4}{3}\mu\pi a\beta\gamma$ (neunzehnte Vorlesung über die Geometrie); wir haben somit

$$X = -4\mu\pi a\beta\gamma \int_1^o \frac{t^2 dt}{\sqrt{[a^2 + (\beta^2 - a^2)t^2][a^2 + (\gamma^2 - a^2)t^2]}}$$

$$= \frac{3Ma}{a} \int_o^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{[a^2 + (\beta^2 - a^2)t^2][a^2 + (\gamma^2 - a^2)t^2]}}.$$

Um ähnliche Formeln für Y und Z zu finden, bedarf es keiner neuen Rechnung, sondern es ist hinreichend in der so eben erhaltenen a und a im ersten Falle mit b und β, und im zweiten mit c und γ zu verwechseln.

Das Integral $\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{[a^2 + (\beta^2 - a^2)t^2][a^2 + (\gamma^2 - a^2)t^2]}}$ läßt sich, wenn a, β, γ sämmtlich von einander verschieden sind, nicht auf die gewöhnlichen transcendenten Functionen zurückführen; es bleibt daher nichts anderes zu thun übrig, als sich der unendlichen Reihen zu bedienen, welche um so schneller convergiren werden, je weniger das gegebene elliptische Sphäroid von der Kugelgestalt abweicht.

Gibt man dem für X gefundenen Ausdrucke die zur Rechnung bequeme Form

$$X = \frac{4\mu\pi a\beta\gamma}{a^2} \int_o^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{\left[1 - \left(1 - \frac{\beta^2}{a^2}\right)t^2\right]\left[1 - \left(1 - \frac{\gamma^2}{a^2}\right)t^2\right]}},$$

so sieht man, daß X, und folglich auch Y, Z keine Änderung erleiden, wenn bei einer Veränderung der Dimensionen des elliptischen Sphäroids die Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ ungeändert bleiben, und zugleich der angezogene Punct aus dem Inneren dieses Körpers nicht heraustritt. Jedoch ist es erlaubt, die Dimensionen des Sphäroids dabei so zu verringern, daß dieser Punct sich in der Oberfläche desselben befindet. Wird also durch einen im Innern eines elliptischen Sphäroids angenommenen Punct die Grenzfläche eines zweiten mit ersterem concentrischen Sphäroids verzeichnet, dessen Hauptaxen der Lage nach mit jenen des vorigen übereinstimmen, und der Größe nach beziehungsweise in demselben Verhältnisse stehen, so ist die Wirkung des zwischen den beiden krummen Flächen enthaltenen Körperstückes auf den genannten Punct gleich Null, welcher Satz bloß eine Erweiterung des von der Kugel bewiesenen ist. Man nennt zwei elliptische Sphäroide von der beschriebenen Art ähnliche und ähnlich liegende.

Die Kräfte, welche ein elliptisches Sphäroid auf einen außerhalb desselben befindlichen Punct parallel mit den Hauptaxen ausübt, lassen sich, des bereits oben erwähnten Umstandes wegen, nicht durch so einfache Ausdrücke angeben, wie dieß angeht, wenn der angezogene Punct innerhalb des Sphäroids liegt. Aber zum Glücke hat Ivory gezeigt, daß jener schwierigere Fall keine eigene Rechnung erheischt, sondern ganz auf den leichteren reducirt werden kann. Wir wollen die hiezu dienliche Analyse nach Legendre's Anleitung vortragen.

Die in der zweiten Vorlesung aufgestellten Formeln geben uns

$$X = \mu \iiint \frac{(a-x)\, dx\, dy\, dz}{r^3},$$

wenn wir, wie es oben geschehen ist, durch r die von dem angezogenen Puncte a, b, c zu dem im Innern des elliptischen Sphäroids befindlichen Puncte x, y, z gezogene Gerade vorstellen. Da

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$

ist, so haben wir $\frac{a-x}{r} = -\frac{dr}{dx}$, folglich

$$X = -\mu \iiint \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dx}\, dx\, dy\, dz.$$

Integriren wir in Bezug auf x, so erhalten wir wegen $-\int \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r}$, wenn r_1 und r_2 die an der Oberfläche des Sphä-

roids sich endigenden Radienvectoren bedeuten, welche gewissen festgesetzten Werthen von y und z correspondiren,

$$X = \mu \iint \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) dy\, dz.$$

Hier ist, in so fern x mit y und z durch die Gleichung der Oberfläche des elliptischen Sphäroids, nämlich durch

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

verbunden wird,

$$r_1 = \sqrt{(a+x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}.$$

Die Kraft, welche ein zweites mit dem vorigen gleich dichtes concentrisches und ähnlich liegendes elliptisches Sphäroid

$$\frac{x'^2}{\alpha'^2} + \frac{y'^2}{\beta'^2} + \frac{z'^2}{\gamma'^2} = 1$$

auf einen Punct a', b', c' parallel zur Axe der x ausübt, wird aus demselben Grunde durch die Formel

$$X' = \mu \iint \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) dy'\, dz'$$

ausgedrückt, in welcher

$$\rho_1 = \sqrt{(a'+x')^2 + (b'-y')^2 + (c'-z')^2}$$

und $\rho_2 = \sqrt{(a'-x')^2 + (b'-y')^2 + (c'-z')^2}$ ist.

Suchen wir nun a', b', c', α', β', γ', x', y', z' so zu wählen, daß ρ_2 mit r_2, folglich auch ρ_1 mit r_1 identisch wird. Zu diesem Ende sey erstlich

$$ax = a'x', \quad by = b'y', \quad cz = c'z',$$

so muß noch der Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Genüge geleistet werden.

Setzen wir

$$\frac{a}{a'} = \frac{x'}{x} = \xi, \quad \frac{b}{b'} = \frac{y'}{y} = v, \quad \frac{c}{c'} = \frac{z'}{z} = \zeta,$$

so geht diese Gleichung nach vollbrachter Wegschaffung von a', b', c' und x', y', z' in

$$(\xi^2-1)x^2+(v^2-1)y^2+(\zeta^2-1)z^2=\frac{(\xi^2-1)a^2}{\xi^2}+\frac{(v^2-1)b^2}{v^2}+\frac{(\zeta^2-1)c^2}{\zeta^2}.$$

über. Dieses Resultat muß offenbar mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

harmoniren. Um dieser Forderung zu entsprechen, sey

$$\xi^2-1=\frac{\lambda}{\alpha^2}, \text{ folglich auch } v^2-1=\frac{\lambda}{\beta^2}, \quad \zeta^2-1=\frac{\lambda}{\gamma^2},$$

so wird λ durch die Gleichung

$$\frac{a^2}{\alpha^2+\lambda}+\frac{b^2}{\beta^2+\lambda}+\frac{c^2}{\gamma^2+\lambda}=1$$

gegeben. Dieß ist eine Gleichung des dritten Grades; nehmen wir den Punct a, b, c außerhalb des elliptischen Sphäroids, dessen Halbaxen α, β, γ sind, an, so ist

$$\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}>1,$$

daher fällt die Summe rechter Hand des Gleichheitszeichens für $\lambda=0$ größer als 1 aus: durch das negativ Werden von λ wird diese Summe noch mehr vergrößert, und zuletzt negativ; wächst aber λ von 0 angefangen bis ins Unendliche, so nimmt dieselbe fortwährend in das Unendliche ab, und wird also gewiß ein Mal der Einheit gleich; woraus erhellet, daß es jederzeit einen positiven reellen Werth für λ gibt, welcher dieser Gleichung entspricht, daß aber dieselbe sonst keine andere reelle Wurzel zuläßt.

Ist λ gefunden, so hat man

$$\xi=\sqrt{1+\frac{\lambda}{\alpha^2}}, \quad v=\sqrt{1+\frac{\lambda}{\beta^2}}, \quad \zeta=\sqrt{1+\frac{\lambda}{\gamma^2}}$$

$$\text{und} \quad a'=\frac{a}{\xi}, \quad b'=\frac{b}{\xi}, \quad c'=\frac{c}{\xi},$$

wodurch die Position des Punctes a', b', c' festgesetzt ist.

Aus $x=\frac{x'}{\xi}$, $y=\frac{y'}{v}$, $z=\frac{z'}{\zeta}$ folgt durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung des gegebenen Sphäroids

$$\frac{x'^2}{\xi^2\alpha^2}+\frac{y'^2}{v^2\beta^2}+\frac{z'^2}{\zeta^2\gamma^2}=1,$$

welches die Gleichung des zweiten Sphäroids ist; für dieses haben wir demnach

$$\alpha' = \xi\alpha, \; \beta' = \upsilon\beta, \; \gamma' = \zeta\gamma,$$

woraus sich wegen

$$\xi^2\alpha^2 = \alpha^2 + \lambda, \quad \upsilon^2\beta^2 = \beta^2 + \lambda, \quad \zeta^2\gamma^2 = \gamma^2 + \lambda$$

$$\alpha'^2 - \beta'^2 = \alpha^2 - \beta^2, \quad \alpha'^2 - \gamma'^2 = \alpha^2 - \gamma^2, \quad \beta'^2 - \gamma'^2 = \beta^2 - \gamma^2$$

ergibt. Es stimmen also die Brennpuncte der Hauptschnitte des zweiten Sphäroids mit jenen der Hauptschnitte des ersten überein.

Endlich bestehen die Gleichungen

$$\frac{a'^2}{\alpha^2} + \frac{b'^2}{\beta^2} + \frac{c'^2}{\gamma^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\beta'^2} + \frac{c^2}{\gamma'^2} = 1,$$

woraus erhellet, daß der Punct a, b, c in der Oberfläche des zweiten, und a′, b′, c′ in der Oberfläche des ersten Sphäroids sich befindet.

Die Gleichungen $y' = \upsilon y$, $z' = \zeta z$ geben $dy' = \upsilon dy$, $dz' = \zeta dz$. Da nun auch $\rho_2 = r_2$ und $\rho_1 = r_1$ ist, so ergibt sich

$$X' = \mu\upsilon\zeta\int\!\!\int\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) dy\, dz = \upsilon\zeta X,$$

$$\text{also} \quad X = \frac{X'}{\upsilon\zeta} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'} \cdot X'.$$

Es kommt demnach, um X zu erhalten, nur mehr auf die Berechnung von X′ an. Da der Punct a′, b′, c′ innerhalb des Sphäroids $\frac{x'^2}{\alpha'^2} + \frac{y'^2}{\beta'^2} + \frac{z'^2}{\gamma'^2} = 1$ liegt, so kann diese mittelst der oben gegebenen Formeln vollzogen werden. Denselben gemäß ist, wenn $M' = \frac{4}{3}\mu\pi\alpha'\beta'\gamma'$ gesetzt wird:

$$X' = \frac{3M'a'}{\alpha'}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{[\alpha'^2 + (\beta'^2 - \alpha'^2)t^2]\,[\alpha'^2 + (\gamma'^2 - \alpha'^2)t^2]}};$$

also mit Rücksicht auf

$$\beta'^2 - \alpha'^2 = \beta^2 - \alpha^2, \quad \gamma'^2 - \alpha'^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$

$$\text{und} \quad a' = \frac{a}{\xi} = \frac{\alpha a}{\alpha'}, \quad \frac{M'}{M} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma}$$

$$X = \frac{3Ma}{\alpha'}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{[\alpha'^2 + (\beta^2 - \alpha^2)t^2]\,[\alpha'^2 + (\gamma^2 - \alpha^2)t^2]}}.$$

Durch Vertauschung von α', α mit β', β erhält man Y, und durch Vertauschung der ersteren Größen mit γ', γ ergibt sich Z.

Sechste Vorlesung.

Über das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Zwischen der Resultirenden mehrerer auf einen Punct wirkenden Kräfte und diesen Kräften selbst findet eine merkwürdige und folgenreiche Relation Statt, mit deren Entwickelung wir in gegenwärtiger Vorlesung den Anfang machen wollen.

Es seyen an einem Puncte, dessen rechtwinklige Coordinaten durch x, y, z bezeichnet werden mögen, die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 u. s. w. angebracht. Ihre Resultirende heiße R. In den rückwärts verlängerten Richtungen aller dieser Kräfte nehme man, von dem gemeinschaftlichen Angriffspuncte derselben ausgehend, beliebige Stücke an, welche beziehungsweise p_1, p_2, p_3, p_4, ... r genannt werden sollen. Denkt man sich nun den Punct x, y, z aus seiner ursprünglichen Lage unendlich wenig verrückt, und stellt man die hiedurch erzeugten unendlich abnehmenden Änderungen der Coordinaten desselben durch δx, δy, δz vor (wobei wir den Buchstaben δ an die Stelle des Differenzialzeichens *d* treten lassen, damit die durch willkürliche Verschiebung eines Punctes sich ergebenden Änderungen seiner Coordinaten, welche ganz die Beschaffenheit der sogenannten Variationen haben, von den eigentlichen Differenzialien unterschieden werden, zu welchen der Übergang von einem Puncte zu einem nächsten, an dieselben Gleichungen gebundenen, führt), so erleiden die Linien p_1, p_2, p_3, p_4, ... r, deren Endpuncte als fix betrachtet werden, ebenfalls gewisse Änderungen δp_1, δp_2, δp_3, δp_4, ... δr. Nennen wir die Coordinaten des Punctes, in welchem sich die Linie p_1 endigt, a_1, b_1, c_1, so haben wir

$$p_1 = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2},$$

folglich

$$\delta p_1 = \frac{x-a_1}{p_1} \cdot \delta x + \frac{y-b_1}{p_1} \cdot \delta y + \frac{z-c_1}{p_1} \cdot \delta z.$$

Aber $x-a_1$, $y-b_1$, $z-c_1$ sind die Projectionen der Geraden p_1 auf die Axen der x, y, z, mithin $\frac{x-a_1}{p_1}$, $\frac{y-b_1}{p_1}$, $\frac{z-c_1}{p_1}$ die Co-

flusse der Winkel, unter welchen die Verlängerung dieser Geraden nach der Richtung der Kraft P_1 gegen drei durch den Punct x, y, z gezogene den positiven Theilen der Axen der x, y, z parallele Geraden geneigt ist; bezeichnen wir daher diese Winkel durch α_1, β_1, γ_1, so besteht die Gleichung

$$\delta p_1 = \cos.\alpha_1 \,.\, \delta x + \cos.\beta_1 \,.\, \delta y + \cos.\gamma_1 \,.\, \delta z.$$

Auf dieselbe Art findet man, wenn α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3; α_4, β_4, γ_4; &c. in Bezug auf P_2, P_3, P_4, ... dieselbe Bedeutung haben, wie α_1, β_1, γ_1 in Bezug auf P_1,

$$\delta p_2 = \cos.\alpha_2 \,.\, \delta x + \cos.\beta_2 \,.\, \delta y + \cos.\gamma_2 \,.\, \delta z$$
$$\delta p_3 = \cos.\alpha_3 \,.\, \delta x + \cos.\beta_3 \,.\, \delta y + \cos.\gamma_3 \,.\, \delta z$$
$$\delta p_4 = \cos.\alpha_4 \,.\, \delta x + \cos.\beta_4 \,.\, \delta y + \cos.\gamma_4 \,.\, \delta z$$
. . . .

Multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit P_1, P_2, P_3, P_4, &c., und addiren wir sie sodann, so ergibt sich, wenn wir

$$P_1 \cos.\alpha_1 + P_2 \cos.\alpha_2 + P_3 \cos.\alpha_3 + P_4 \cos.\alpha_4 + \ldots = X$$
$$P_1 \cos.\beta_1 + P_2 \cos.\beta_2 + P_3 \cos.\beta_3 + P_4 \cos.\beta_4 + \ldots = Y$$
$$P_1 \cos.\gamma_1 + P_2 \cos.\gamma_2 + P_3 \cos.\gamma_3 + P_4 \cos.\gamma_4 + \ldots = Z$$

setzen,

$$P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + P_3 \delta p_3 + P_4 \delta p_4 + \ldots =$$
$$= X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Es seyen nun α, β, γ die Winkel, welche die Neigung der Richtung der Resultirenden R gegen jene der positiven Coordinaten bestimmen, so ist bekanntlich

$$R \cos.\alpha = X, \quad R \cos.\beta = Y, \quad R \cos.\gamma = Z;$$

ferner ist aus den oben angeführten Gründen

$$\delta r = \cos.\alpha \,.\, \delta x + \cos.\beta \,.\, \delta y + \cos.\gamma \,.\, \delta z,$$

wir haben daher

(1) $$R\delta r = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

und somit gilt die Gleichung

(2) $$R\delta r = P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + P_3 \delta p_3 + P_4 \delta p_4 + \ldots$$

Man pflegt den unendlich kleinen Weg, welchen ein Punct vermöge einer willkürlichen Verrückung beschreibt, seine virtuelle Geschwindigkeit zu nennen; die Variationen δp_1, δp_2, δp_3, δp_4, ... δr können als die Projectionen des vom Puncte x, y, z be-

schriebenen Weges auf die Richtungen der Kräfte $P_1, P_2, P_3, P_4 \ldots R$ angesehen werden; deßhalb heißen diese Variationen die nach den Richtungen der genannten Kräfte geschätzten oder zerlegten virtuellen Geschwindigkeiten ihres gemeinschaftlichen Angriffspunctes x, y, z. Nennt man nun noch mit Lagrange das Product einer Kraft mit der nach ihrer Richtung geschätzten virtuellen Geschwindigkeit ihres Angriffspunctes das der vorgenommenen Verschiebung dieses Punctes entsprechende Moment derselben, so drückt die Gleichung (2) nachstehenden Satz aus:

Wenn mehrere Kräfte auf einen Punct wirken, so ist in Bezug auf jede unendlich kleine Verrückung dieses Punctes das Moment ihrer Resultirenden der Summe der Momente der einzelnen Kräfte gleich.

Die Gleichung (1) ist, in so fern R die Resultirende der Kräfte X, Y, Z vorstellt, unter der Gleichung (2) enthalten, denn δx, δy, δz können offenbar als die nach den Richtungen der Kräfte X, Y, Z geschätzten virtuellen Geschwindigkeiten des Punctes x, y, z betrachtet werden.

Es seyen nun die auf den Punct x, y, z wirkenden Kräfte $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ mit einander im Gleichgewichte. Ist der genannte Angriffspunct ein freier, d. h. nach allen denkbaren Richtungen beweglicher Punct, so kann das Gleichgewicht dieser Kräfte nur in so ferne bestehen, als die Resultirende derselben gleich Null ist, denn die Existenz jeder Resultirenden würde nothwendig eine Bewegung des Angriffspunctes zur Folge haben. Es ist also unter der gemachten Voraussetzung $R = 0$, folglich auch

(3) $$P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + P_3 \delta p_3 + P_4 \delta p_4 + \ldots = 0.$$

Ist aber der Angriffspunct der gegebenen Kräfte nur jener Bewegungen fähig, bei welchen er nie aufhört eine vorgezeichnete Fläche oder Linie zu verlassen, d. h. ist er an irgend eine Fläche oder Linie gebunden, so wird zum Bestehen des Gleichgewichtes dieser Kräfte bloß erfordert, daß die Richtung ihrer Resultirenden R in die Normallinie der vorgeschriebenen Fläche oder in die Normalebene der vorgeschriebenen Linie falle, damit die Wirkung der Kraft R durch den Widerstand der Fläche oder Linie gänzlich vernichtet werden könne. Dann ist aber, in so ferne man von dem Angriffspuncte dieser Kraft zu einem nächsten Puncte der Fläche oder Linie übergeht, wie eine leichte Rechnung lehrt, $\delta r = 0$; wovon man sich auch überzeugt, wenn man δr

als die Projection des vom Angriffspuncte der Kräfte beschriebenen, in der Fläche oder Linie liegenden unendlich kleinen Weges auf die Richtung von R betrachtet, da hier die projicirte Linie der Projectionslinie unter einem rechten Winkel begegnet; es besteht also wieder die Gleichung (3), welche demnach eine nothwendige Bedingung des Gleichgewichtes mehrerer einen Punct zur Bewegung anregender Kräfte ausspricht.

Aber nicht nur allein, wenn sich Kräfte an einem Puncte das Gleichgewicht halten, ist die Summe ihrer Momente in Bezug auf jede, den Bedingungen, welchen dieser Punct unterliegt, angemessene unendlich kleine Verschiebung desselben gleich Null; sondern dieser Satz läßt sich auch für Kräfte beweisen, welche an irgend einem Systeme von Puncten im Gleichgewichte stehen, vorausgesetzt, daß die diesem Systeme eigenthümliche Verbindung der Puncte durch die denselben ertheilten unendlich geringen Änderungen ihrer Positionen nicht verletzt wird.

Es seyen m_1, m_2, m_3, m_4, ... was immer für ein System bildende materielle Puncte, auf welche, nachdem man alle an einem und demselben Puncte angebrachten Kräfte zu einer einzigen Kraft vereinigt hat, beziehungsweise die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, ... wirken. Vermöge der unter den genannten Puncten bestehenden Verbindung werden durch jede einzelne Kraft nebst ihrem Angriffspuncte auch mittelbar die übrigen zur Bewegung angeregt, gerade so, als ob im Allgemeinen jeder Punct auf jeden anderen eine gewisse Kraft ausübte. Sind nun die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, ... im Gleichgewichte, so muß die an jedem einzelnen Puncte des gegebenen Systems unmittelbar thätige Kraft, den Kräften, welche von den übrigen Puncten auf diesen geäußert werden, das Gleichgewicht halten; eine Bemerkung, die uns in den Stand setzt, von der Gleichung (3) auch bei der Betrachtung mehrerer auf ein System von Puncten wirkender Kräfte Gebrauch zu machen.

Bezeichnen wir überhaupt die Kraft, mit welcher der Punct m_u von dem Puncte m_v afficirt wird, durch $Q_{u,v}$, und die Länge einer in der rückwärts verlängerten Richtung derselben von ihrem Angriffspuncte m_u aus angenommenen Geraden durch $q_{u,v}$, so wie auch die Länge einer eben so in der rückwärts verlängerten Richtung der Kraft P_u angenommenen Geraden durch p_u, so haben wir für die an den Puncten m_1, m_2, m_3, m_4 im Gleichgewichte befindlichen Kräfte

die Gleichungen:

$$P_1\,\delta p_1 + Q_{1,2}\,\delta q_{1,2} + Q_{1,3}\,\delta q_{1,3} + Q_{1,4}\,\delta q_{1,4} + \ldots = 0,$$
$$P_2\,\delta p_2 + Q_{2,1}\,\delta q_{2,1} + Q_{2,3}\,\delta q_{2,3} + Q_{2,4}\,\delta q_{2,4} + \ldots = 0,$$
$$P_3\,\delta p_3 + Q_{3,1}\,\delta q_{3,1} + Q_{3,2}\,\delta q_{3,2} + Q_{3,4}\,\delta q_{3,4} + \ldots = 0,$$
$$P_4\,\delta p_4 + Q_{4,1}\,\delta q_{4,1} + Q_{4,2}\,\delta q_{4,2} + Q_{4,3}\,\delta q_{4,3} + \ldots = 0$$

u. s. w.

Addiren wir dieselben, und bedenken wir, daß im Zustande des Gleichgewichtes offenbar die Wirkung $Q_{u,v}$, welche ein Punct m_u unsers Systems auf einen andern m_v ausübt, der Gegenwirkung $Q_{v,u}$ dieses auf jenen gleich ist, so finden wir:

$$\left.\begin{array}{l} P_1\,\delta p_1 + P_2\,\delta p_2 + P_3\,\delta p_3 + P_4\,\delta p_4 + \ldots \\ + Q_{1,2}\,[\delta q_{1,2} + \delta q_{2,1}] + Q_{1,3}\,[\delta q_{1,3} + \delta q_{3,1}] \\ \qquad\qquad + Q_{1,4}\,[\delta q_{1,4} + \delta q_{4,1}] + \ldots \\ + Q_{2,3}\,[\delta q_{2,3} + \delta q_{3,2}] + Q_{2,4}\,[\delta q_{2,4} + \delta q_{4,2}] + \ldots \\ + Q_{3,4}\,[\delta q_{3,4} + \delta q_{4,3}] + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Es sey nun $E_{u,v}$ die Entfernung der Puncte, $m_{u,v}$ und $\delta' E_{u,v}$ die partielle, bloß durch eine unendlich geringe Verrückung des Punctes m_u, d. i. während m_v an seinem ursprünglichen Orte bleibt, hervorgebrachte Variation dieser Entfernung; so ist, da, wie man leicht sieht, die Summe oder die Differenz der Größen $q_{u,v}$ und $E_{u,v}$ dabei ungeändert bleibt, je nachdem die Kraft $Q_{u,v}$ von m_u gegen m_v hin oder umgekehrt wirkt, im ersten Falle $\delta q_{u,v} = -\delta' E_{u,v}$, und im zweiten $\delta q_{u,v} = +\delta' E_{u,v}$. Aber die Kraft $Q_{v,u}$ ist der Kraft $Q_{u,v}$ entgegengesetzt; also aus denselben Gründen im ersten Falle $\delta q_{v,u} = -\delta' E_{v,u}$, und im zweiten $\delta q_{v,u} = +\delta' E_{v,u}$, folglich

$$\delta q_{u,v} + \delta q_{v,u} = \mp (\delta' E_{u,v} + \delta' E_{v,u}).$$

Betrachtet man $E_{u,v}$ als eine Function der Coordinaten der beiden Puncte m_u, m_v, so überzeugt man sich durch die bekannte Regel des Differenzirens einer Function mehrerer Variablen, daß $\delta' E_{u,v} + \delta' E_{v,u}$ die totale, oder der gleichzeitigen Verrückung beider Puncte m_u, m_v entsprechende Variation der Entfernung derselben $E_{u,v}$ vorstellt. Bezeichnen wir diese letztere Variation durch $\delta E_{u,v}$, so ist also

$$\delta q_{u,v} + \delta q_{v,u} = \mp\, \delta E_{u,v}.$$

Dieses Resultat, auf obige Gleichung angewandt, gibt uns

$$(4)\quad \left.\begin{array}{l} P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + P_3\delta p_3 + P_4\delta p_4 + \ldots \\ \mp Q_{1,2}\,\delta E_{1,2} \mp Q_{1,3}\,\delta E_{1,3} \mp Q_{1,4}\,\delta E_{1,4} \mp \ldots \\ \mp Q_{2,3}\,\delta E_{2,3} \mp Q_{2,4}\,\delta E_{2,4} \mp \ldots \\ \mp Q_{3,4}\,\delta E_{3,4} \mp \ldots \\ \quad \text{u. s. w.} \end{array}\right\} = 0,$$

wobei die Zeichen der Variationen der Entfernungen je zweier Puncte nach Beschaffenheit der Umstände zu nehmen sind.

Bis jetzt haben wir über die Beschaffenheit der unendlich kleinen Verrückungen der Puncte m_1, m_2, m_3, m_4, ... nichts Näheres festgesetzt, so daß die Gleichung (4), ohne Rücksicht auf die zwischen diesen Puncten bestehende Verbindung, für alle solche Verrückungen gilt, bei welchen dieselben die Flächen oder Linien, an welche sie etwa gebunden sind, nicht verlassen. Puncte, welche unbeweglich seyn sollen, dürfen natürlich in dieser Gleichung gar nicht vorkommen.

Wir wollen nun annehmen, daß die Variationen $\delta E_{1,2}$, $\delta E_{1,3}$, ... $\delta E_{2,3}$, ... der Natur des gegebenen Systems der Puncte m_1, m_2, m_3, ... gemäß bestimmt seyen.

Ist dieses System ein unveränderliches, d. h. können die einzelnen Puncte desselben ihre relativen Positionen, oder was dasselbe heißt, ihre gegenseitigen Entfernungen nicht ändern, so haben wir stets

$$\delta E_{1,2} = 0;\ \delta E_{1,3} = 0;\ \delta E_{1,4} = 0;\ \ldots\ldots$$
$$\delta E_{2,3} = 0;\ \delta E_{2,4} = 0;\ \ldots\ \text{ꝛc.}$$

folglich verwandelt sich die Gleichung (4) in

$$P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + P_3\delta p_3 + P_4\delta p_4 + \ldots = 0,$$

welche mit (3) einerlei ist.

Dieselbe Gleichung läßt sich auch noch dann rechtfertigen, wenn das vorhandene System zwar eine Änderung der gegenseitigen Entfernungen der einzelnen Puncte gestattet, aber doch die Summe der Entfernungen gewisser Puncte von einander stets dieselbe bleibt. Um sich ein solches System klar vorzustellen, denke man sich gewisse Puncte desselben paarweise mit einander durch völlig biegsame, aber weder einer Verlängerung noch einer Verkürzung fähige Linien oder Fäden verbunden, auf welchen die übrigen Puncte so hin und her gleiten, daß das zwischen je zwei nächsten Puncten enthaltene Stück der Linie oder des Fadens geradlinig gespannt ist. Die Spannung aller Theile jedes einzelnen Fadens wird, wenn das System unter der Einwirkung der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, ... im Gleichgewichte ist, gleich groß

seyn; sind also z. B. die Puncte m_u und m_v durch einen solchen Faden verbunden, auf welchem der Punct m_w frei zu gleiten vermag, so werden in der Gleichung (4) die Glieder

$$\mp Q_{u,w}\,\delta E_{u,w} \mp Q_{w,v}\,\delta E_{w,v}$$

vorkommen, welche, wegen $Q_{u,w} = Q_{w,v}$ und der hier nothwendig Statt findenden Übereinstimmung der Zeichen vor $\delta E_{u,w}$ und $\delta E_{w,v}$, sich auf

$$\mp Q_{u,w}\,[\delta E_{u,w} + \delta E_{w,v}]$$

reduciren. Allein vermöge der Beschaffenheit der zwischen m_u, m_w, m_v bestehenden Verknüpfung haben wir

$$\delta E_{u,w} + \delta E_{w,v} = o,$$

daher fallen die so eben betrachteten Glieder aus der Gleichung (4) weg. Da ein Gleiches auch von den übrigen Parthien der Glieder gesagt werden kann, welche von den mit Q bezeichneten Kräften abhängen, so verwandelt sich die Gleichung (4) in die Gleichung (3).

Umgekehrt, besteht zwischen den auf ein System der hier betrachteten Art wirkenden Kräften P_1, P_2, P_3, P_4, ... in Bezug auf jede der Natur dieses Systems angemessene unendlich geringe Verrückung ihrer Angriffspuncte m_1, m_2, m_3, m_4, ... die Gleichung

$$P_1\,\delta p_1 + P_2\,\delta p_2 + P_3\,\delta p_3 + P_4\,\delta p_4 + \ldots\ldots = o,$$

so befinden sich die genannten Kräfte im Gleichgewichte. Denn fände dieses nicht Statt, so müßte eine Bewegung erfolgen, bei deren Anfange die Puncte m_1, m_2, m_3, m_4, ... die unendlich kleinen Wege μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, ... beschreiben mögen.

Durch Hinzufügung neuer, auf die genannten Puncte der Richtung der beginnenden Bewegung gerade entgegen wirkender Kräfte T_1, T_2, T_3, T_4, ... könnte das Gleichgewicht hergestellt werden, und es bestände, wenn t_1, t_2, t_3, t_4, ... in Bezug auf T_1, T_2, T_3, T_4, ... dieselbe Bedeutung haben, wie p_1, p_2, p_3, p_4, ... in Bezug auf P_1, P_2, P_3, P_4, ..., dem bereits bewiesenen Satze zu Folge, die Gleichung

$$P_1\,\delta p_1 + P_2\,\delta p_2 + P_3\,\delta p_3 + P_4\,\delta p_4 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + T_1\,\delta t_1 + T_2\,\delta t_2 + T_3\,\delta t_3 + T_4\,\delta t_4 + \ldots\ldots = o$$

oder $T_1\,\delta t_1 + T_2\,\delta t_2 + T_3\,\delta t_3 + T_4\,\delta t_4 + \ldots\ldots = o.$

Wir können ohne Zweifel die Puncte m_1, m_2, m_3, m_4, ... ohne Verletzung der Bedingungen des Systems so verschieben, daß sie

die unendlich kleinen Wege μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, ... beschreiben; dann haben wir $\delta t_1 = -\mu_1$, $\delta t_2 = -\mu_2$, $\delta t_3 = -\mu_3$, $\delta t_4 = -\mu_4$, ... folglich

$$T_1\mu_1 + T_2\mu_2 + T_3\mu_3 + T_4\mu_4 + \ldots\ldots = 0.$$

In dieser Gleichung sind offenbar alle Glieder positiv; sie gibt daher $T_1\mu_1 = 0$, $T_2\mu_2 = 0$, $T_3\mu_3 = 0$, $T_4\mu_4 = 0$, u. s. w.

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt entweder $T_1 = 0$ oder $\mu_1 = 0$; in beiden Fällen bleibt m_1 in Ruhe. Da nun dasselbe auch von m_2, m_3, m_4, ... gilt, so herrscht unter den Kräften P_1, P_2, P_3, P_4, ... nothwendig Gleichgewicht.

Der in gegenwärtiger Vorlesung bewiesene allgemeine Satz, welchen wir der ganzen Statik zum Grunde legen werden, heißt das **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten**.

Siebente Vorlesung.

Über die Bedingungen des Gleichgewichtes gegebener, auf einen einzelnen Punct, oder auch auf ein System mehrerer Puncte wirkenden Kräfte.

I. Denken wir uns an einem materiellen Puncte, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z seyen, beliebige Kräfte thätig, und untersuchen wir, unter welchen Bedingungen sich dieselben das Gleichgewicht halten. Zerlegen wir jede einzelne der gegebenen Kräfte in drei, den Axen der Coordinaten parallel wirkende, und bezeichnen wir die algebraische Summe aller zur Axe der x parallelen Kräfte durch X, ferner die Summen aller zu den Axen der y und der z parallelen Kräfte durch Y und Z, so stehen die ursprünglich vorhandenen Kräfte, und folglich auch X, Y, Z im Gleichgewichte, wenn, in Bezug auf jede mögliche unendlich geringe Verschiebung ihres gemeinschaftlichen Angriffspunctes, die Gleichung

(1) $$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = o$$

Statt findet.

Hier sind nun mehrere Fälle zu erwägen. Es sey erstlich der Angriffspunct der Kräfte völlig frei, also jeder denkbaren Verschiebung fähig, so sind die Variationen δx, δy, δz willkürliche unendlich abnehmende Größen, und deßhalb zerfällt die Gleichung (1) in die drei Gleichungen

$$X\delta x = o, \quad Y\delta y = o, \quad Z\delta z = o,$$

welche

(2) $$X = o, \quad Y = o, \quad Z = o$$

als Bedingungen des Gleichgewichtes der vorgelegten Kräfte darbieten.

Zu derselben Folgerung gelangt man sogleich durch die Bemerkung, daß ein freier Punct unter der Einwirkung mehrerer Kräfte nur dann im Gleichgewichte bleibt, wenn die Resultirende dieser Kräfte verschwindet. Aber die Resultirende der in dem vorliegenden Falle thätigen Kräfte wird durch $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ausgedrückt; es muß demnach für das Gleichgewicht

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = o$$

seyn, woraus ebenfalls $X=o$, $Y=o$, $Z=o$ folgt.

Es sey zweitens der Angriffspunct aller Kräfte auf einer bestimmten Fläche zu bleiben genöthigt, deren Differenzialgleichung durch

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

vorgestellt werde, so können die Variationen der Coordinaten dieses Angriffspunctes nicht mehr als völlig willkürliche Größen gelten, sondern sie müssen der Gleichung der genannten Fläche Genüge leisten, d. h. es muß

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$$

seyn. Dieser Ausdruck für δz in (1) substituirt, führt auf

$$(X + Zp)\,\delta x + (Y + Zq)\,\delta y = 0,$$

in welcher Gleichung δx und δy nach Belieben angenommen werden dürfen. Wir haben somit

(3) $$X + Zp = 0, \quad Y + Zq = 0$$

als Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes der auf den gegebenen Punct wirkenden Kräfte. Die Gleichungen (3) sagen bloß, daß die Richtung der Resultirenden dieser Kräfte auf der Fläche, an welche ihr Angriffspunct gebunden ist, senkrecht steht. Denn nennen wir R dieser Resultirende, so ist

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

und die Winkel, welche die Richtung derselben mit den Axen der x, y, z bildet, entsprechen den Cosinussen

$$\frac{X}{R}, \quad \frac{Y}{R}, \quad \frac{Z}{R}.$$

Mittelst der Gleichungen (3) finden wir für diese Cosinusse die Ausdrücke

$$-\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad -\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

welche bekanntlich die Cosinusse der Winkel anzeigen, unter welchen die dem Puncte x, y, z gehörende Normale der Fläche $dz = p\,dx + q\,dy$ gegen die Axen der x, y, z geneigt ist.

Es sey drittens der Angriffspunct der Kräfte an eine bestimmte Linie gebunden, welcher die Differenzialgleichungen

$$dy = p\,dx, \quad dz = q\,dx$$

gehören mögen, so muß die unendlich geringe Verschiebung desselben, auf welche sich die Gleichung (1) bezieht, so eingerichtet werden, daß die Gleichungen

$$\delta y = p\,\delta x, \quad \delta z = q\,\delta x$$

bestehen. Hiedurch nimmt die Gleichung (1) die Gestalt

$$(X + Yp + Zq)\,\delta x = 0$$

an, in welcher δx willkürlich ist. Wir erhalten mithin

$$(4) \qquad X + Yp + Zq = 0$$

als Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes der gegebenen Kräfte.

Gibt man dieser Gleichung die Form

$$\frac{X}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{Y}{R} \cdot \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{Z}{R} \cdot \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0,$$

so sieht man, daß sie die Bedingung darstellt, unter welcher die Resultirende dieser Kräfte eine die Tangente der Bahn des Angriffspunctes senkrecht treffende Richtung besitzt.

II. Auf ein System unveränderlich mit einander verbundener Puncte m_1, m_2, m_3, ... sollen nun beziehungsweise die Kräfte P_1, P_2, P_3, ... wirken, und die Bedingungen näher bestimmt werden, unter welchen sich diese Kräfte das Gleichgewicht halten.

Stellen wir die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes m_1 durch x_1, y_1, z_1, ferner die Kräfte, welche sich durch Zerlegung der Kraft P_1 parallel mit den Axen der x, y, z ergeben, durch X_1, Y_1, Z_1 vor, und lassen wir eine ähnliche Bezeichnung in Bezug auf die übrigen Puncte m_2, m_3, ... gelten, so gibt uns das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für das Gleichgewicht aller das vorhandene System afficirenden Kräfte die Bedingungsgleichung

$$X_1\delta x_1 + Y_1\delta y_1 + Z_1\delta z_1 + X_2\delta x_2 + Y_2\delta y_2 + Z_2\delta z_2$$
$$+ X_3\delta x_3 + Y_3\delta y_3 + Z_3\delta z_3 + \text{etc.} = 0.$$

Bezeichnen wir durch x, y, z die Coordinaten eines unbestimmten Punctes m dieses Systems, und durch X, Y, Z die an demselben parallel mit den Axen der x, y, z angebrachten Kräfte, so können wir die letztere Gleichung der Kürze halber auf die Form

$$(5) \qquad \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

bringen, wobei das Summenzeichen Σ andeuten mag, daß die Größe, über welche es sich erstreckt, auf jeden einzelnen Punct des gegebenen Systems zu beziehen, und die Summe aller hiedurch sich darbietenden Ausdrücke zu nehmen sey.

Führen wir nun durch einen beliebigen Punct ξ, v, z drei auf

einander senkrechte Ebenen, und bezeichnen wir die Coordinaten des Punctes m in Hinsicht auf dieselben durch x', y', z', so haben wir, mit Hülfe der aus der ersten und zweiten Vorlesung über die analytische Geometrie bekannten Formeln für die Transformation der Coordinaten, wenn die Cosinusse der Winkel, welche
die Richtung der x' mit jenen der x, y, z bildet, durch a_1, a_2, a_3
. . . . y' . . . . b_1, b_2, b_3
. . . . z' . . . . c_1, c_2, c_3
vorgestellt werden,

$$(6)\qquad \begin{aligned} x &= \xi + a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \\ y &= \upsilon + a_2 x' + b_2 y' + c_2 z', \\ z &= \zeta + a_3 x' + b_3 y' + c_3 z'. \end{aligned}$$

Lassen wir die Axen der x', y', z' mit dem Systeme der Puncte m_1, m_2, m_3, ꝛc. in eine unveränderliche Verbindung treten, so erleiden die diesen Axen parallelen Coordinaten der genannten Puncte durch keine Verrückung des Systems aus seiner ursprünglichen Position eine Änderung, sondern diese findet nur bei den Größen ξ, υ, ζ; a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, ꝛc. Statt. Wir haben somit

$$(7)\qquad \begin{aligned} \delta x &= \delta\xi + x'\delta a_1 + y'\delta b_1 + z'\delta c_1, \\ \delta y &= \delta\upsilon + x'\delta a_2 + y'\delta b_2 + z'\delta c_2, \\ \delta z &= \delta\zeta + x'\delta a_3 + y'\delta b_3 + z'\delta c_3. \end{aligned}$$

Da zwischen den Cosinussen a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, ꝛc. die Gleichungen

$$\begin{array}{l|l} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \end{array}$$

bestehen, so erhalten wir durch Multiplication der Gleichungen (6) mit a_1, a_2, a_3, und Addition der Producte

$$x' = a_1(x-\xi) + a_2(y-\upsilon) + a_3(z-\zeta),$$

und auf dieselbe Art mittelst der Multiplicatoren b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3

$$y' = b_1(x-\xi) + b_2(y-\upsilon) + b_3(z-\zeta),$$
$$z' = c_1(x-\xi) + c_2(y-\upsilon) + c_3(z-\zeta);$$

folglich, wenn wir diese Ausdrücke in die Formeln (7) einführen:

$$\begin{aligned} \delta x = \delta\xi &+ (x-\xi)(a_1\delta a_1 + b_1\delta b_1 + c_1\delta c_1) \\ &+ (y-\upsilon)(a_2\delta a_1 + b_2\delta b_1 + c_2\delta c_1) \\ &+ (z-\zeta)(a_3\delta a_1 + b_3\delta b_1 + c_3\delta c_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta y = \delta\upsilon &+ (x-\xi)(a_1\delta a_2 + b_1\delta b_2 + c_1\delta c_2)\\ &+ (y-\upsilon)(a_2\delta a_2 + b_2\delta b_2 + c_2\delta c_2)\\ &+ (z-\zeta)(a_3\delta a_2 + b_3\delta b_2 + c_3\delta c_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta z = \delta\zeta &+ (x-\xi)(a_1\delta a_3 + b_1\delta b_3 + c_1\delta c_3)\\ &+ (y-\upsilon)(a_2\delta a_3 + b_2\delta b_3 + c_2\delta c_3)\\ &+ (z-\zeta)(a_3\delta a_3 + b_3\delta b_3 + c_3\delta c_3).\end{aligned}$$

Nun ist aber auch

$$\begin{aligned}a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, &\quad \text{folglich} \quad a_1\delta a_1 + b_1\delta b_1 + c_1\delta c_1 = 0,\\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, &\quad \text{»} \quad a_2\delta a_2 + b_2\delta b_2 + c_2\delta c_2 = 0,\\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1, &\quad \text{»} \quad a_3\delta a_3 + b_3\delta b_3 + c_3\delta c_3 = 0;\end{aligned}$$

ferner
$$\begin{aligned}a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0,\\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 &= 0,\\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0,\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}a_2\delta a_1 + b_2\delta b_1 + c_2\delta c_1 &= -(a_1\delta a_2 + b_1\delta b_2 + c_1\delta c_2),\\ a_1\delta a_3 + b_1\delta b_3 + c_1\delta c_3 &= -(a_3\delta a_1 + b_3\delta b_1 + c_3\delta c_1),\\ a_3\delta a_2 + b_3\delta b_2 + c_3\delta c_2 &= -(a_2\delta a_3 + b_2\delta b_3 + c_2\delta c_3);\end{aligned}$$

setzen wir nun

$$(8) \qquad \begin{aligned}a_1\delta a_2 + b_1\delta b_2 + c_1\delta c_2 &= \delta\mu,\\ a_3\delta a_1 + b_3\delta b_1 + c_3\delta c_1 &= \delta\lambda,\\ a_2\delta a_3 + b_2\delta b_3 + c_2\delta c_3 &= \delta\varkappa,\end{aligned}$$

so haben wir

$$(9) \qquad \begin{aligned}\delta x &= \delta\xi + (z-\zeta)\,\delta\lambda - (y-\upsilon)\,\delta\mu,\\ \delta y &= \delta\upsilon + (x-\xi)\,\delta\mu - (z-\zeta)\,\delta\varkappa,\\ \delta z &= \delta\zeta + (y-\upsilon)\,\delta\varkappa - (x-\xi)\,\delta\lambda.\end{aligned}$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in die Gleichung (5), so finden wir, da ξ, υ, ζ, $\delta\xi$, $\delta\upsilon$, $\delta\zeta$, $\delta\varkappa$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$ durch den bloßen Übergang von einem Puncte des Systems zum anderen keine Änderung erleiden, folglich als gemeinschaftliche Factoren aller hinter den Summenzeichen erscheinenden Glieder vor dieselben gestellt werden dürfen,

$$(10) \qquad \left.\begin{aligned}&\delta\xi\,\Sigma X + \delta\upsilon\,\Sigma Y + \delta\zeta\,\Sigma Z\\ &+ \delta\mu\,\Sigma(Yx - Xy) + \delta\lambda\,\Sigma(Xz - Zx) + \delta\varkappa\,\Sigma(Zy - Yz)\\ &+ (\upsilon\delta\mu - \zeta\delta\lambda)\,\Sigma X + (\zeta\delta\varkappa - \xi\delta\mu)\,\Sigma Y + (\xi\delta\lambda - \upsilon\delta\varkappa)\,\Sigma Z\end{aligned}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung wird uns zur näheren Kenntniß der Bedingungen des Gleichgewichtes eines Systemes unveränderlich mit einander verbundenen Puncte verhelfen. Hiebei sind folgende Fälle zu betrachten:

Es sey **erstens** das System ein freies, d. h. aller Bewegungen fähig, durch welche die gegenseitigen Entfernungen der Puncte desselben nicht geändert werden, so kann man dem mit dem Systeme fix verbundenen Puncte ξ, v, z, wie auch dem Inbegriffe der durch denselben gelegten Axen x', y', z' jede mögliche Bewegung ertheilen; und umgekehrt, jede beliebige Verrückung des Systems aus seiner gegenwärtigen Position kann durch Verrückung des Punctes ξ, v, z und der durch ihn gezogenen mit dem Systeme in unveränderlicher Verbindung stehenden Axen realisirt werden.

Man ersieht hieraus, daß für ein freies System die Variationen $\delta\xi$, δv, δz, wie auch diejenigen unter den neun Variationen δa_1, δb_1, δc_1, δa_2, δb_2, δc_2, δa_3, δb_3, δc_3, durch welche sich die übrigen ausdrücken lassen, völlig willkürlich angenommen werden können. Da zwischen diesen neun Größen sechs Bedingungsgleichungen Statt finden, so bleiben nur die Werthe dreier derselben der freien Wahl überlassen. An die Stelle der drei independenten unter den genannten neun Variationen können auch $\delta\varkappa$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$ treten; in der That läßt sich jede der erwähnten neun Variationen durch die letzteren drei ausdrücken. Multiplicirt man z. B. die drei Gleichungen

$$a_1\delta a_1 + b_1\delta b_1 + c_1\delta c_1 = 0,$$
$$a_2\delta a_1 + b_2\delta b_1 + c_2\delta c_1 = -\delta\mu,$$
$$a_3\delta a_1 + b_3\delta b_1 + c_3\delta c_1 = \delta\lambda$$

nach der Reihe mit a_1, a_2, a_3, und addirt man die Producte, so ergibt sich mit Rücksicht auf die oben angeführten Gleichungen

$$\delta a_1 = a_3\delta\lambda - a_2\delta\mu.$$

Eben so findet man durch Multiplication obiger Gleichungen mit b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3

$$\delta b_1 = b_3\delta\lambda - b_2\delta\mu,$$
$$\delta c_1 = c_3\delta\lambda - c_2\delta\mu.$$

Um δa_2, δb_2, δc_2 zu erhalten, muß man zu den Gleichungen

$$a_1\delta a_2 + b_1\delta b_2 + c_1\delta c_2 = \delta\mu,$$
$$a_2\delta a_2 + b_2\delta b_2 + c_2\delta c_2 = 0,$$
$$a_3\delta a_2 + b_3\delta b_2 + c_3\delta c_2 = -\delta\varkappa$$

seine Zuflucht nehmen. Es ergibt sich aus denselben

$$\delta a_2 = a_1\delta\mu - a_3\delta\varkappa,\quad \delta b_2 = b_1\delta\mu - b_3\delta\varkappa,\quad \delta c_2 = c_1\delta\mu - c_3\delta\varkappa.$$

Eben so geben die Gleichungen

$$a_1 \delta a_3 + b_1 \delta b_3 + c_1 \delta c_3 = - \delta\lambda,$$
$$a_2 \delta a_3 + b_2 \delta b_3 + c_2 \delta c_3 = \delta\varkappa,$$
$$a_3 \delta a_3 + b_3 \delta b_3 + c_3 \delta c_3 = o,$$
$$\delta a_3 = a_2 \delta\varkappa - a_1 \delta\lambda, \quad \delta b_3 = b_2 \delta\varkappa - b_1 \delta\lambda, \quad \delta c_3 = c_2 \delta\varkappa - c_1 \delta\lambda.$$

Wegen der Independenz der Variationen $\delta\xi$, δv, δz verschwindet jedes der Glieder der Gleichung (10), welche dieselben als Factoren enthalten, für sich; wir haben somit

$$(11) \qquad \Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma Z = o.$$

Die Gleichung (10) reducirt sich hiedurch auf

$$(12) \quad \delta\mu \Sigma(Yx - Xy) + \delta\lambda \Sigma(Xz - Zx) + \delta\varkappa \Sigma(Zy - Yz) = o;$$

woraus, wegen der Unbestimmtheit von $\delta\varkappa$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, die Gleichungen

$$(13) \quad \Sigma(Yx - Xy) = o, \quad \Sigma(Xz - Zx) = o, \quad \Sigma(Zy - Yz) = o$$

folgen. Die sechs Gleichungen (11) und (13) drücken die Bedingungen aus, unter welchen die auf ein freies System unveränderlich mit einander verbundener Puncte wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind.

Es enthalte zweitens das gegebene System einen fixen Punct, um welchen es nach Belieben gedreht werden kann. Nehmen wir diesen fixen Punct für denjenigen an, dessen Coordinaten wir ξ, v, z genannt haben, so ist der Natur desselben gemäß

$$\delta\xi = o, \quad \delta v = o, \quad \delta z = o.$$

Aus der Gleichung (10) fallen daher die drei ersten Glieder weg. Wählen wir überdieß noch den fixen Punct zum Anfangspuncte der Coordinaten x, y, z, so verschwinden wegen $\xi = o$, $v = o$, $z = o$ auch die drei letzten Glieder dieser Gleichung, und sie geht in (12) über, woraus sich wegen der Independenz von $\delta\varkappa$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$ die drei Gleichungen (13) ergeben. Diese Gleichungen stellen demnach die Bedingungen dar, unter welchen die an dem gegebenen Systeme angebrachten Kräfte einander das Gleichgewicht halten, wenn der Anfangspunct der Coordinaten unbeweglich gedacht wird.

Es seyen drittens zwei Puncte des vorhandenen Systems fix, oder was dasselbe heißt, dasselbe sey bloß einer drehenden Bewegung um die durch diese zwei Puncte gehende Gerade, welche wir die fixe Axe dieses Systems nennen wollen, fähig.

Nehmen wir diese fixe Axe für diejenige an, welcher die Coordinaten z' parallel sind, so haben wir, da der Punct ξ, v, z unter den gegenwärtigen Umständen nothwendig unbeweglich ist, $\delta\xi = o$,

$\delta v = o$, $\delta z = o$; ferner sind die Winkel, welche die fixe Axe mit den Richtungen der x, y, z bildet, unveränderlich, und deßhalb verschwinden die Variationen δc_1, δc_2, δc_3.

Aber wir haben, der obigen Rechnung zu Folge,

$\delta c_1 = c_3 \delta\lambda - c_2 \delta\mu$, $\delta c_2 = c_1 \delta\mu - c_3 \delta\varkappa$, $\delta c_3 = c_2 \delta\varkappa - c_1 \delta\lambda$,

daher bestehen die Gleichungen

$$c_3 \delta\lambda - c_2 \delta\mu = o, \; c_1 \delta\mu - c_3 \delta\varkappa = o, \; c_2 \delta\varkappa - c_1 \delta\lambda = o,$$

welche uns

$$\delta\varkappa = \frac{c_1}{c_3}\delta\mu, \quad \delta\lambda = \frac{c_2}{c_3}\delta\mu$$

geben; woraus hervorgeht, daß nunmehr bloß eine der drei Variationen $\delta\varkappa$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$ als willkürlich angenommen werden darf, und sich demnach im vorliegenden Falle bloß eine Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes der Kräfte ergeben wird. Um dieselbe sogleich in der einfachsten Form, deren sie fähig ist, zu erhalten, lassen wir die Axe der z mit der fixen Axe zusammenfallen. Hiedurch verschwinden c_1 und c_2 als Cosinusse rechter Winkel, und c_3 wird der Einheit gleich; daher ergibt sich $\delta\varkappa = o$, $\delta\lambda = o$; ferner ist, der angenommenen Lage der Axe der z zu Folge, $\xi = o$, $v = o$: es reducirt sich demnach die Gleichung (10) auf $\delta\mu \Sigma (Yx - Xy) = o$, woraus

(14) $$\Sigma (Yx - Xy) = o$$

für die verlangte Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes erhalten wird.

Könnte das gegebene System längst der Axe, um welche es drehbar ist, auch verschoben werden, so wäre unter der Voraussetzung, daß diese Axe mit jener der z übereinstimmt, δz nicht nothwendig $= o$; daher müßten, wenn Gleichgewicht Statt finden soll, die auf dieses System wirkenden Kräfte nebst der Gleichung (14) auch noch der Bedingung

$$\Sigma Z = o$$

Genüge leisten.

Aus der Vergleichung der Bedingungsgleichungen (13) und (14) geht der Satz hervor, daß ein System, worin sich ein fixer Punct befindet, im Gleichgewichte bleibt, wenn sich die dasselbe afficirenden Kräfte, in Bezug auf drei durch diesen fixen Punct gelegte, einander rechtwinklig durchschneidende Axen, das Gleichgewicht halten.

Achte Vorlesung.

Über einige Folgerungen aus den Resultaten der vorhergehenden Vorlesung.

Wenn mehrere auf ein System unveränderlich mit einander verbundener Puncte einwirkende Kräfte einander nicht das Gleichgewicht halten, so bietet sich die Frage dar, ob sich dieselben, wie dieß bei Kräften, welche an einem und demselben Puncte angebracht sind, der Fall ist, auf eine einzige ihnen der Wirkung nach gleichgeltende Kraft zurückführen lassen.

Es seyen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; u. s. w. die rechtwinkligen Coordinaten der Puncte des gegebenen Systems; X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3; u. s. w. die auf dieselben parallel mit den Axen der x, y, z wirkenden Kräfte. Gibt es für diese Kräfte eine Resultirende R, so muß dieselbe, nach entgegengesetzter Richtung genommen, mit den genannten Kräften, abgesehen von jedem die freie Bewegung des Systems hemmenden Hindernisse, im Gleichgewichte stehen. Bezeichnen wir die Coordinaten irgend eines Punctes der Richtung der Kraft R durch x', y', z', und die Kräfte, welche durch Zerlegung einer der R gleichen und gerade entgegengesetzten Kraft parallel mit den Axen der x, y, z entspringen, durch X', Y', Z'; ferner durch x, y, z die Coordinaten jedes Punctes unseres Systems, und durch X, Y, Z die auf denselben wirkenden Kräfte im Allgemeinen, so müssen, wenn anders zwischen den Kräften X', Y', Z' und X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2, ꝛc. Gleichgewicht Statt finden soll, die sechs Gleichungen

$$X' + \Sigma X = 0,\quad Y' + \Sigma Y = 0,\quad Z' + \Sigma Z = 0,$$

$$Y'x' - X'y' + \Sigma(Yx - Xy) = 0,$$

$$X'z' - Z'x' + \Sigma(Xz - Zx) = 0,$$

$$Z'y' - Y'z' + \Sigma(Zy - Yz) = 0$$

erfüllt werden, in welchen die durch Σ angedeuteten Summen auf alle Puncte des gegebenen Systems auszudehnen sind.

Die ersten drei dieser Gleichungen geben uns

$$X' = -\Sigma X,\quad Y' = -\Sigma Y,\quad Z' = -\Sigma Z,$$

wodurch sich die drei letzten in

$$(1) \qquad \begin{aligned} x'\Sigma Y - y'\Sigma X &= \Sigma(Yx - Xy), \\ z'\Sigma X - x'\Sigma Z &= \Sigma(Xz - Zx), \\ y'\Sigma Z - z'\Sigma Y &= \Sigma(Zy - Yz) \end{aligned}$$

verwandeln. Dieselben gehören den Projectionen der Richtung der Kraft R auf die drei coordinirten Ebenen. Da zwei dieser Gleichungen zur unzweideutigen Bestimmung der Geraden, in welche die Richtung der Kraft R fällt, hinreichen, so muß jede derselben eine Folge der beiden anderen seyn, was jedoch nur bei einer gewissen Beschaffenheit der Größen ΣX, ΣY, ΣZ, $\Sigma(Yx - Xy)$, $\Sigma(Xz - Zx)$, $\Sigma(Zy - Yz)$ möglich ist, welche durch eine eigene Bedingungsgleichung ausgedrückt werden kann.

Um zu dieser Gleichung zu gelangen, multiplicire man die obigen Gleichungen (1) der Reihe nach mit ΣZ, ΣY, ΣX, und addire sie sodann, so erhält man

$$(2) \quad \Sigma Z . \Sigma(Yx - Xy) + \Sigma Y . \Sigma(Xz - Zx) + \Sigma X . \Sigma(Zy - Yz) = 0.$$

Leisten die auf das gegebene System einwirkenden Kräfte dieser Gleichung nicht Genüge, so lassen sie sich auch nicht durch eine einzige Kraft ersetzen. Erfüllen sie aber diese Gleichung, so gehört denselben im Allgemeinen eine Resultirende, deren Größe durch

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}$$

ausgedrückt wird, und deren Richtung gegen jene der positiven x, y, z unter Winkeln, welche den Cosinussen

$$\frac{\Sigma X}{R}, \quad \frac{\Sigma Y}{R}, \quad \frac{\Sigma Z}{R}$$

entsprechen, geneigt ist.

Wir müssen hier jedoch den Fall ausnehmen, wenn

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0$$

ist, ohne daß die Gleichungen

$$\Sigma(Yx - Xy) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Zy - Yz) = 0$$

Statt finden. In diesem findet man $R = 0$, ohne daß die vorhandenen Kräfte das völlig freie System der gegebenen Puncte im Gleichgewichte zu erhalten vermögen, was offenbar ungereimt ist. Es bedarf aber bloß einer Erinnerung an den Umstand, daß die Gleichung (2) aus den Gleichungen (1) durch Multiplication der letzteren mit ΣZ, ΣY, ΣX abgeleitet wurde, um sogleich einzusehen, daß die ganze

Rechnung keinen sicheren Schluß gewährt, sobald diese Multiplicatoren sämmtlich verschwinden. In allen übrigen Fällen entscheidet die Gleichung (2) mit völliger Sicherheit über die Anwesenheit einer Resultirenden für die das vorliegende System materieller Puncte afficirenden Kräfte.

Lassen diese Kräfte sich nicht auf eine einzige Kraft reduciren, so kann man denselben doch auf unzählige Arten zwei, ihnen der Wirkung nach gleichgeltende Kräfte substituiren. Die Gesammtwirkung der genannten Kräfte auf das System, an welchem sie angebracht sind, wird nicht geändert, wenn man zu denselben zwei an einem mit dem Systeme in unveränderliche Verbindung tretenden Puncte nach gerade entgegengesetzten Richtungen thätige Kräfte hinzufügt, da die beiden letzteren Kräfte sich gegenseitig aufheben. Durch Änderung der Lage der Geraden, in welche die Richtungen dieser zwei Kräfte fallen, wie auch der Größe derselben, kann man es auf unzählige Arten dahin bringen, daß der Gleichung (2) Genüge geschieht, folglich eine der beiden Kräfte, in Vereinigung mit den ursprünglich vorhandenen, eine Resultirende darbietet. Die übrig gebliebene der beiden neu hinzugekommenen Kräfte, und die so eben erhaltene Resultirende ersetzen also die anfänglich gegebenen Kräfte der Wirkung nach vollkommen, wodurch obige Behauptung gerechtfertiget ist.

Ist in Bezug auf die ursprünglich vorhandenen Kräfte $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, so kommen, wenn man zu denselben eine neue Kraft treten läßt, in den Gleichungen (1) an die Stelle von ΣX, ΣY, ΣZ bloß die durch Zerlegung dieser letzteren Kraft nach den Richtungen der Axen der Coordinaten sich ergebenden Kräfte, und die Resultirende aller erhält somit eine der neuen Kraft parallele Richtung, und fällt ihr der Größe nach gleich aus.

Sind also für die auf ein gegebenes System wirkenden Kräfte die Summen ΣX, ΣY, ΣZ gleich Null, so lassen sich diese Kräfte durch zwei einander gleiche, nach parallelen und entgegengesetzten Richtungen strebende Kräfte ersetzen.

Ist ein System um einen fixen Punct, welchen wir zugleich den Anfangspunct der Coordinaten seyn lassen, im Gleichgewichte, so finden, wie wir in der vorhergehenden Vorlesung gesehen haben, die Gleichungen

$$\Sigma(Yx - Xy) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Zy - Yz) = 0$$

Statt, und somit wird die Gleichung (2) befriediget. Es gehört also in diesem Falle dem Inbegriffe aller Kräfte nothwendig eine Resultirende, deren Richtung, wie die Gleichungen (1) zeigen, durch den Anfangspunct der Coordinaten geht. Offenbar kann nur auf diese Weise die Gesammtwirkung aller Kräfte durch den Widerstand, welchen der fixe Punct leistet, vernichtet werden. Die Bestimmung der Größe und der Richtung des Druckes, welchen der fixe Punct auszuhalten hat, ist nach den oben vorgetragenen Formeln leicht zu vollziehen.

Man wird nun auch einsehen, daß es nicht möglich ist, ein freies System, welches durch mehrere Kräfte zur Bewegung angetrieben wird, durch Festhalten eines einzigen Punctes in den Zustand des Gleichgewichtes zu versetzen, wenn sich diese Kräfte nicht auf eine Resultirende zurückführen lassen. Geht dieß aber an, so wird durch Fixirung jedes in der Richtung dieser Resultirenden liegenden, mit dem erwähnten Systeme unveränderlich verbundenen Punctes das Gleichgewicht hergestellt.

Hingegen kann ein System materieller Puncte bei jeder beliebigen Anordnung der darauf wirkenden Kräfte auf unzählige Arten durch unveränderliche Verbindung desselben mit einer fixen Axe in das Gleichgewicht kommen. Legen wir diese Axe den durch z bezeichneten Coordinaten parallel, und sind h, k die Entfernungen des Punctes, in welchem sie der Ebene x y begegnet, von den Axen der y und x, so erreichen wir unseren Zweck, wenn die Größen h, k der Gleichung

$$\Sigma(Y(x-h)-X(y-k))=0 \text{ oder } h\Sigma Y-k\Sigma X=\Sigma(Yx-Xy)$$

Genüge leisten.

Wir wollen nun die Summen $\Sigma(Yx-Xy)$, $\Sigma(Xz-Zx)$, $\Sigma(Zy-Yz)$, welche im Folgenden der Kürze wegen L, M, N heißen mögen, näher betrachten. Es sey P die auf einen unbestimmten Punct des gegebenen Systems wirkende Kraft, aus deren Zerlegung nach den Richtungen der x, y, z die Kräfte X, Y, Z hervorgehen; die Winkel, welche die Richtung von P mit jenen der positiven x, y, z bildet, seyen α, β, γ, so ist

$$X = P\cos.\alpha,\quad Y = P\cos.\beta,\quad Z = P\cos.\gamma.$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke nehmen obige Summen die Formen

$$(3)\qquad \begin{aligned} L &= \Sigma P(x\cos.\beta - y\cos.\alpha),\\ M &= \Sigma P(z\cos.\alpha - x\cos.\gamma),\\ N &= \Sigma P(y\cos.\gamma - z\cos.\beta)\end{aligned}$$

an. Um zu zeigen, wie dieselben weiter transformirt werden können, wird es hinreichend seyn, uns bloß mit der Größe L zu beschäftigen.

Stellen wir den Winkel, welchen die Projection der Richtung der Kraft P auf die Ebene xy mit dem positiven Theile der Axe der x bildet, durch λ vor, so haben wir, da die projicirte Richtung gegen die Projectionsebene unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \gamma$ geneigt ist, offenbar

$$\cos.\alpha = \sin.\gamma \,.\, \cos.\lambda \quad \text{und} \quad \cos.\beta = \sin.\gamma \,.\, \sin.\lambda, \text{ also}$$

(4) $$L = \Sigma P \sin.\gamma\,(x \sin.\lambda - y \cos.\lambda).$$

Wird die Kraft P bloß in zwei Kräfte zerlegt, wovon die eine mit der Axe der z, und die andere mit der Ebene xy parallel wirkt, so ist die erstere $= P \cos.\gamma$, und die letztere, welche Q heißen mag, $= P \sin.\gamma$. Es sey ferner μ der Winkel, welchen der aus dem Anfangspuncte der Coordinaten zu dem Puncte x, y der Ebene xy gezogene Radiusvector r mit der Axe der x darstellt, so ist

$$x = r \cos.\mu, \quad y = r \sin.\mu, \quad \text{also}$$

$$x \sin.\lambda - y \cos.\lambda = r(\sin.\lambda \cos.\mu - \cos.\lambda \sin.\mu) = r \sin.(\lambda - \mu).$$

Das Product $r \sin.(\lambda - \mu)$ gibt, ohne Rücksicht auf sein Zeichen, offenbar die Länge q des Perpendikels an, welches aus dem Anfangspuncte der Coordinaten auf die Projection der Richtung von P in die Ebene xy, oder was dasselbe heißt, aus der Axe der z auf die Richtung der Kraft Q, oder auch der Kraft P, fällt; es ist daher

$$P \sin.\gamma\,(x \sin.\lambda - y \cos.\lambda) = \pm\, Qq.$$

Denkt man sich alle durch Q vorgestellten Kräfte auf die Puncte, in welchen ihre Richtungen von den Perpendikeln q getroffen werden, unmittelbar wirkend, und diese Perpendikel um ihre Durchschnittspuncte mit der Axe der z zu drehen strebend, so überzeugt man sich durch Betrachtung aller möglichen Fälle an einer Figur sehr leicht, daß für Kräfte, welche entgegengesetzte Drehungen anregen, q mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden muß.

Mit gehöriger Rücksicht auf diese Bemerkung haben wir also

(5) $$L = \Sigma Qq.$$

Da zur Aufhebung jeder Drehung des gegebenen Systems um die als fix gedachte Axe der z bloß das Stattfinden der Gleichung $L = 0$ nöthig ist, so tilgt eine Kraft das Bestreben mehrerer anderen, ein System materieller Puncte um eine fixe Axe zu drehen, wenn

der ihr zugehörige Werth des Productes Qq der algebraischen Summe der diesen anderen Kräften entsprechenden Werthe des genannten Productes gleich kommt.

Hieraus folgt, daß das Bestreben einer Kraft, eine Drehung um eine fixe Axe zu erzeugen, durch das Product der durch Zerlegung derselben parallel zu einer auf die Rotationsaxe senkrechten Ebene sich ergebenden Kraft mit dem Abstande ihrer Richtung von der Rotationsaxe gemessen wird. Man nennt dieses Product das Moment jener Kraft in Bezug auf die gegebene Axe.

Sieht man jene Momente, welche entgegengesetzten Drehungen um eine Axe entsprechen, als entgegengesetzte Größen an, so kann man die Bedingung, unter welcher sich mehrere Kräfte in Bezug auf eine fixe Axe das Gleichgewicht halten, durch den Satz: »die Summe ihrer Momente in Bezug auf die gegebene Axe muß verschwinden,« in Kürze darstellen.

Ein freies System ist daher im Gleichgewichte, wenn jede der Summen der Kräfte, welche sich durch Zerlegung aller dasselbe afficirenden Kräfte nach drei aufeinander senkrechten Richtungen ergeben, wie auch jede der Summen der Momente aller dieser Kräfte in Bezug auf drei diesen Richtungen parallele Axen verschwindet. Zum Gleichgewichte eines mit einem fixen Puncte versehenen Systems wird bloß das Verschwinden der Summen der Momente aller Kräfte in Bezug auf drei durch den fixen Punct gehende Axen erfordert.

Wenn die Summen der Momente aller an einem Systeme materieller Puncte angebrachten Kräfte in Bezug auf drei einander rechtwinklig durchschneidende Axen gegeben sind, so läßt sich die Summe der Momente dieser Kräfte in Bezug auf jede andere, durch den Durchschnittspunct der genannten Axen gezogene und der Lage nach bekannte Axe berechnen. Denn nehmen wir die ersteren drei Axen für jene der Coordinaten an, und nennen wir die gegebenen Summen der Momente L, M, N, indem wir, die obigen Bezeichnungen beibehaltend,

$$L = \Sigma P(x \cos.\beta - y \cos.\alpha),$$
$$M = \Sigma P(z \cos.\alpha - x \cos.\gamma),$$
$$N = \Sigma P(y \cos.\gamma - z \cos.\beta)$$

setzen; denken wir uns ferner ein zweites zu demselben Anfangspuncte gehöriges Coordinatensystem, dessen Axen wir durch x', y', z' andeuten, und wovon die Axe der z' diejenige ist, in Bezug auf welche das

Moment der Kräfte gesucht wird: so haben wir, wenn wir den Buchstaben L', α', β', γ' hinsichtlich des neuen Coordinatensystems dieselbe Bedeutung beilegen, welche L, α, β, γ hinsichtlich des ursprünglichen Coordinatensystems besitzen,

$$L' = \Sigma P(x' \cos.\beta' - y' \cos.\alpha').$$

Werden, wie es in der vorhergehenden Vorlesung geschehen ist, die Cosinusse der Winkel, welche
die Axe der x' mit jenen der x, y, z bildet, durch a_1, a_2, a_3, ferner dieselben Größen in Bezug auf die Axe der y' durch b_1, b_2, b_3,
» » » » » » » » z' » c_1, c_2, c_3
angezeigt, so bestehen, der Formel (44) zu Folge, welche wir in der zweiten Vorlesung über die analytische Geometrie kennen gelernt haben, die Gleichungen

$$\cos.\alpha' = a_1 \cos.\alpha + a_2 \cos.\beta + a_3 \cos.\gamma,$$
$$\cos.\beta' = b_1 \cos.\alpha + b_2 \cos.\beta + b_3 \cos.\gamma.$$

Mit Hülfe derselben wird

$$L' = \Sigma P[(b_1x' - a_1y') \cos.\alpha + (b_2x' - a_2y') \cos.\beta + (b_3x' - a_3y') \cos.\gamma].$$

Nun ist

$$x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z,$$
$$y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z,$$

folglich

$$b_1 x' - a_1 y' = (a_2 b_1 - a_1 b_2) y + (a_3 b_1 - a_1 b_3) z,$$
$$b_2 x' - a_2 y' = (a_1 b_2 - a_2 b_1) x + (a_3 b_2 - a_2 b_3) z,$$
$$b_3 x' - a_3 y' = (a_1 b_3 - a_3 b_1) x + (a_2 b_3 - a_3 b_2) y;$$

ferner haben wir, wegen

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \quad \text{und} \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1,$$
$$a_1^2 + a_2^2 = 1 - a_3^2 \quad \text{und} \quad b_1^2 + b_2^2 = 1 - b_3^2;$$

mithin durch Multiplication dieser zwei Gleichungen

$$a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 = 1 - a_3^2 - b_3^2 + a_3^2 b_3^2 = c_3^2 + a_3^2 b_3^2:$$

aber die Gleichung $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ gibt uns

$$a_1^2 b_1^2 + 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 = a_3^2 b_3^2,$$

daher ist $a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 = c_3^2$

oder $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm c_3$..

Um zu entscheiden, welches Zeichen hier zu nehmen ist, lassen wir die Axen x', y', z' mit x, y, z zusammenfallen; da hiebei $a_1 = 1$,

$b_2 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $c_3 = 1$ wird, so gilt das obere Zeichen, und es ist

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = c_3.$$

Auf dieselbe Art findet man

$$a_3 b_1 - a_1 b_3 = c_2,$$
$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = c_1,$$

es ist demnach

$$b_1 x' - a_1 y' = c_2 z - c_3 y,$$
$$b_2 x' - a_2 y' = c_3 x - c_1 z,$$
$$b_3 x' - a_3 y' = c_1 y - c_2 x,$$

folglich

$$L' = c_3 \Sigma P (x \cos.\beta - y \cos.\alpha) + c_2 \Sigma P (z \cos.\alpha - x \cos.\gamma) + c_1 \Sigma P (y \cos.\gamma - z \cos.\beta),$$

d. h. $L' = c_3 L + c_2 M + c_1 N.$

Stellen M' und N' die Summen der Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf die Axen der y' und x' vor, so ergibt sich durch dasselbe Verfahren

$$M' = b_3 L + b_2 M + b_1 N,$$
$$N' = a_3 L + a_2 M + a_1 N.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$L'^2 + M'^2 + N'^2 = L^2 + M^2 + N^2;$$

es ist also die Summe $L^2 + M^2 + N^2$ für jede drei in einem und demselben Puncte sich rechtwinklig durchschneidende Axen eine beständige Größe.

Man kann die Lage der Axe, auf welche sich die Summe L' bezieht, immer so wählen, daß M' und N' verschwinden, folglich

$$L' = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

wird, und somit den größten Werth erhält, dessen diese Größe fähig ist. Die Gleichungen

$$L' = c_3 L + c_2 M + c_1 N,$$
$$0 = b_3 L + b_2 M + b_1 N,$$
$$0 = a_3 L + a_2 M + a_1 N$$

geben uns nämlich, wenn wir sie der Reihe nach mit c_3, b_3, a_3 multipliciren und addiren:

$$c_3 L' = L, \quad \text{also} \quad c_3 = \frac{L}{L'};$$

eben so finden wir mittelst der Multiplicatoren c_2, b_2, a_2 und c_1, b_1, a_1

$$c_2 L' = M, \quad c_1 L' = N,$$

$$\text{also} \quad c_2 = \frac{M}{L'}, \quad c_1 = \frac{N}{L'}:$$

wodurch die Position der in der Frage stehenden Axe unzweideutig bestimmt ist.

Wir sehen zugleich, daß der größte Werth der Summe der Momente aller auf irgend ein System materieller Puncte einwirkenden Kräfte hinsichtlich einer durch einen gegebenen Punct gezogenen Axe, wie auch die Position dieser Axe, von den Summen der Momente, welche die genannten Kräfte in Bezug auf drei in eben diesem Puncte einander senkrecht durchschneidende Axen darbieten, nach demselben Gesetze abhängt, nach welchem die Größe und die Richtung der Resultirenden dreier auf einander wechselweise senkrechter Kräfte durch diese Kräfte bestimmt wird.

Neunte Vorlesung.

Über das Gleichgewicht und die Zusammensetzung paralleler Kräfte.

Der besondere Fall, wenn die Richtungen der Kräfte, welche ein gegebenes System materieller Puncte afficiren, sämmtlich einander parallel laufen, verdient seiner Eigenthümlichkeiten und seiner häufigen Anwendung wegen, eine nähere Betrachtung.

Stellen wir im Allgemeinen irgend eine dieser Kräfte durch P, die rechtwinkligen Coordinaten ihres Angriffspunctes durch x, y, z, und die Winkel, welche ihre Richtung mit jenen der positiven x, y, z bildet, durch α, β, γ vor, und lassen wir das System der Puncte, auf welche die erwähnten Kräfte wirken, ein freies seyn, so wird zum Bestehen des Gleichgewichtes das Stattfinden der sechs Gleichungen

$$\Sigma P \cos.\alpha = 0, \quad \Sigma P \cos.\beta = 0, \quad \Sigma P \cos.\gamma = 0,$$
$$\Sigma P (x \cos.\beta - y \cos.\alpha) = 0,$$
$$\Sigma P (z \cos.\alpha - x \cos.\gamma) = 0,$$
$$\Sigma P (y \cos.\gamma - z \cos.\beta) = 0$$

erfordert, wobei die durch Σ angezeigten Summen auf das ganze vorhandene System ausgedehnt werden müssen.

Da die geraden Linien, in welche die Richtungen der Kräfte fallen, einander parallel sind, so kommen den Winkeln α, β, γ für alle nach derselben Gegend wirkende Kräfte einerlei Werthe zu; für jene Kräfte hingegen, welche nach entgegengesetzten Gegenden gerichtet sind, ergänzen sich diese Winkel zu zwei Rechten. In beiden Fällen stimmen die numerischen Werthe der Cosinusse dieser Winkel mit einander überein; jedoch zieht der Gegensatz der Kräfte eine Verschiedenheit der Zeichen der genannten Cosinusse nach sich. Wir können aber auch die den Cosinussen anklebenden Zeichen auf die Kräfte selbst übertragen, d. h. α, β, γ für alle Kräfte als identische Größen ansehen, wenn wir nur dafür je zwei im entgegengesetzten Sinne thätige Kräfte als entgegengesetzte Größen in die Rechnung einführen; unter dieser Voraussetzung nehmen obige Gleichungen die Formen

$$\cos.\alpha \Sigma P = 0, \quad \cos.\beta \Sigma P = 0, \quad \cos.\gamma \Sigma P = 0,$$

$$\cos.\beta\Sigma Px - \cos.\alpha\Sigma Py = 0,$$
$$\cos.\alpha\Sigma Pz - \cos.\gamma\Sigma Px = 0,$$
$$\cos.\gamma\Sigma Py - \cos.\beta\Sigma Pz = 0$$

an. Die drei ersten Gleichungen geben, da $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$, $\cos.\gamma$ an die Bedingungsgleichung

$$\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = 1$$

gebunden sind, also nicht zugleich verschwinden können,

$$\Sigma P = 0;$$

ferner ist jede der drei letzten Gleichungen eine Folge der beiden anderen: es reduciren sich demnach die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes paralleler Kräfte auf folgende drei

$$\Sigma P = 0,$$
$$\cos.\gamma\Sigma Px - \cos.\alpha\Sigma Pz = 0,$$
$$\cos.\gamma\Sigma Py - \cos.\beta\Sigma Pz = 0.$$

Um dieselben noch mehr zu vereinfachen, wollen wir eine der Axen der Coordinaten, z. B. die der z, den Richtungen der gegebenen Kräfte parallel annehmen. Hiedurch wird $\cos.\gamma = \pm 1$, $\cos.\alpha = 0$, $\cos.\beta = 0$, und es gehen die zwei letzten Gleichungen in

$$\Sigma Px = 0, \quad \Sigma Py = 0$$

über.

In Hinsicht auf zwei andere unter einander und gegen die Axe der z rechtwinklige Axen ist

$$x = x'\cos.\theta - y'\sin.\theta,$$
$$y = x'\sin.\theta + y'\cos.\theta,$$

wobei θ die Neigung der Axe der x gegen jene der x' anzeigt; daher haben wir

$$\Sigma Px = \cos.\theta\Sigma Px' - \sin.\theta\Sigma Py',$$
$$\Sigma Py = \sin.\theta\Sigma Px' + \cos.\theta\Sigma Py'.$$

Aus diesen Gleichungen erhellet, daß die Bedingung $\Sigma Py = 0$ auch durch $\Sigma Px' = 0$ ersetzt werden kann.

Die Größe ΣPx stellt die algebraische Summe der Producte aller Kräfte mit den der Axe der x parallelen oder auf die Ebene yz senkrechten Ordinaten ihrer Angriffspuncte vor; da man nun das Product einer Kraft mit dem Perpendikel, welches aus ihrem Angriffspuncte auf eine bestimmte Ebene fällt, das Moment jener Kraft in Bezug auf diese Ebene zu nennen pflegt, so lassen sich die Be-

dingungen des Gleichgewichtes paralleler Kräfte an einem freien Systeme in Kürze folgender Maßen ausdrücken:

Die algebraische Summe dieser Kräfte, wie auch die Summen ihrer Momente in Bezug auf zwei den gemeinschaftlichen Richtungen derselben parallele Ebenen müssen gleich Null seyn.

Enthält das gegebene System einen fixen Punct, so genügt die Erfüllung der beiden letztgenannten Bedingungen, vorausgesetzt, daß die Ebenen, auf welche sich die Momente der Kräfte beziehen, auch noch durch den fixen Punct gehen.

Untersuchen wir nun, unter welchen Bedingungen parallele, an einem Systeme materieller Puncte angebrachte Kräfte sich auf eine Resultirende zurückführen lassen.

Den in der vorhergehenden Vorlesung vorgetragenen Lehren gemäß hängt die Existenz dieser Resultirenden von dem Stattfinden der Gleichung

$$\cos.\alpha\Sigma P.[\cos.\gamma\Sigma Py - \cos.\beta\Sigma Pz] + \cos.\beta\Sigma P.[\cos.\alpha\Sigma Pz - \cos.\gamma\Sigma Px]$$
$$+ \cos.\gamma\Sigma P.[\cos.\beta\Sigma Px - \cos.\alpha\Sigma Py] = 0$$

ab, den einzigen Fall ausgenommen, wenn $\Sigma P = 0$ ist, ohne daß sich die Kräfte das Gleichgewicht halten. Aber die so eben aufgestellte Gleichung ist eine identische; daher gehört parallelen Kräften, deren algebraische Summe von der Nulle verschieden ist, jederzeit eine Resultirende; im entgegengesetzten Falle bringen sie entweder dieselbe Wirkung hervor, wie zwei parallele, gleiche und entgegengesetzte Kräfte, oder sie sind im Gleichgewichte.

Die Gleichungen der Richtung der Resultirenden, falls es eine solche gibt, sind:

$$(x'\cos.\gamma - z'\cos.\alpha)\Sigma P = \cos.\gamma\Sigma Px - \cos.\alpha\Sigma Pz,$$
$$(y'\cos.\gamma - z'\cos.\beta)\Sigma P = \cos.\gamma\Sigma Py - \cos.\beta\Sigma Pz;$$

diese Kraft wirkt mit den gegebenen Kräften parallel, und ihre Größe ist $= \Sigma P$.

Stellen wir uns vor, die gegebenen Kräfte nehmen ohne Veränderung ihrer Angriffspuncte und ohne Aufhebung ihres Parallelismus und der Art ihres etwa vorhandenen Gegensatzes, andere Richtungen an, für welche α, β, γ sich in α', β', γ' verwandeln, so bestehen für die neue Richtung der Resultirenden die Gleichungen

$$(x'\cos.\gamma' - z'\cos.\alpha')\Sigma P = \cos.\gamma'\Sigma Px - \cos.\alpha'\Sigma Pz,$$
$$(y'\cos.\gamma' - z'\cos.\beta')\Sigma P = \cos.\gamma'\Sigma Py - \cos.\beta'\Sigma Pz.$$

Lassen wir die letzteren vier Gleichungen zusammen bestehen, um zu sehen, ob die neue Richtung der Resultirenden die frühere durchschneidet, und, wenn dieß der Fall ist, die Coordinaten des Durchschnittspunctes beider auszumitteln, so gibt uns die Elimination von x' aus der ersten und dritten

$$z' \Sigma P = \Sigma P z;$$

da nun die Elimination von y aus der zweiten und vierten Gleichung auf das nämliche Resultat führt, so durchschneiden sich die genannten Richtungen wirklich, und es gelten für die Coordinaten ihres Durchschnittspunctes, welche wir durch ξ, v, z andeuten wollen, die Ausdrücke:

$$\xi = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}, \quad v = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P}, \quad z = \frac{\Sigma P z}{\Sigma P}.$$

Diese Ausdrücke sind von α, β, γ, α', β', γ' unabhängig; ändern daher die Richtungen paralleler Kräfte ihre Lage gegen ein System materieller Puncte, ohne ihre Angriffspuncte und ihre übrige Anordnung zu verlassen, so geht die Richtung der Resultirenden stets durch einen bestimmten Punct, dessen Abstand von irgend einer Ebene man findet, wenn man die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf diese Ebene durch die Summe der Kräfte dividirt. Dieser Punct heißt der Mittelpunct der parallelen Kräfte; betrachtet man ihn als den Angriffspunct der Resultirenden, so sieht man aus der für jede Lage der Ebene yz geltenden Gleichung $\xi . \Sigma P = \Sigma P x$, daß das Moment der Resultirenden paralleler Kräfte in Bezug auf irgend eine Ebene, der Summe der Momente dieser Kräfte in Bezug auf dieselbe Ebene gleich kömmt.

Ist $\Sigma P = 0$, ohne daß $\Sigma P x$, $\Sigma P y$, $\Sigma P z$ verschwinden, so erhalten die Coordinaten ξ, v, z des Mittelpunctes der parallelen Kräfte unendliche Werthe; welcher Umstand auf die Unmöglichkeit, den Inbegriff aller gegebenen Kräfte durch eine einzige Kraft zu ersetzen, hindeutet.

Man wird nun aus dem Gesagten leicht einsehen, daß Kräfte, welche stets mit einer gegebenen fixen Geraden parallel auf ein System unveränderlich verbundener materieller Puncte wirken, bei jeder Position dieses Systems im Gleichgewichte stehen, sobald der Mittelpunct dieser Kräfte mit dem Systeme in eine unveränderliche Verbindung gesetzt und unbeweglich gemacht wird.

Begründet man diesen Satz zuerst, so läßt sich die Theorie der

parallelen Kräfte sehr vereinfachen. Die Bedingungen des Gleichgewichtes paralleler Kräfte, in so fern der Anfangspunct der Coordinaten fix ist, bestehen nämlich in dem Stattfinden der Gleichungen

$$\cos.\gamma \Sigma P x - \cos.\alpha \Sigma P z = 0, \quad \cos.\gamma \Sigma P y - \cos.\beta \Sigma P z = 0.$$

Sollen dieselben bei jeder Position des Systems der Angriffspuncte dieser Kräfte in Bezug auf ihre Richtungen, ohne Verletzung des Parallelismus derselben, realisirt werden, so gibt uns die erste der angeführten Gleichungen, da zwei der Größen $\cos.\gamma$, $\cos.\beta$, $\cos.\alpha$ jetzt als willkürliche betrachtet werden können:

$$\Sigma P x = 0, \quad \Sigma P z = 0;$$

wenden wir diese Resultate auf die zweite Gleichung an, so erhalten wir noch

$$\Sigma P y = 0.$$

Ob es aber immer möglich ist, dem Anfangspuncte der Coordinaten eine solche Lage zu geben, daß die Gleichungen

$$\Sigma P x = 0, \quad \Sigma P y = 0, \quad \Sigma P z = 0$$

in Erfüllung gehen, kann leicht entschieden werden. Nennen wir ξ, v, z die Coordinaten irgend eines Punctes, so gehen, wenn dieser als Anfangspunct der Coordinaten, ohne Änderung der Richtungen der Axen, auftritt, die Größen x, y, z in $x-\xi$, $y-v$, $z-z$ über. Setzen wir nun

$$\Sigma P(x-\xi) = 0, \quad \Sigma P(y-v) = 0, \quad \Sigma P(z-z) = 0,$$

so ergibt sich

$$\xi \Sigma P = \Sigma P x, \quad v \Sigma P = \Sigma P y, \quad z \Sigma P = \Sigma P z,$$

$$\text{also} \quad \xi = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}, \quad v = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P}, \quad z = \frac{\Sigma P z}{\Sigma P},$$

welches die bekannten Werthe der Coordinaten des Mittelpunctes paralleler Kräfte sind. Da dieselben, wenn $\Sigma P = 0$ ist, ohne daß $\Sigma P x$, $\Sigma P y$, $\Sigma P z$ verschwinden, unendlich werden, so gibt es in diesem Falle keinen Mittelpunct der Kräfte, und folglich auch keine Resultirende. Sind auch noch $\Sigma P x$, $\Sigma P y$, $\Sigma P z$ gleich Null, so werden ξ, v, z, da sie unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, unbestimmt; es kann also jeder Punct für denjenigen gelten, um welchen sich die Kräfte das Gleichgewicht halten, d. h. das System ihrer Angriffspuncte bleibt auch, abgesehen von jedem Hindernisse der Bewegung, im Gleichgewichte.

Denken wir uns alle Puncte einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers von parallel und nach einerlei Gegend wirkenden Kräften getrieben, so lassen sich dieselben, da sie dem Zeichen nach übereinstimmen, folglich ihre Summe von Null verschieden ist, jederzeit auf eine Resultirende zurückführen, welcher bei jeder Lage der Linie, der Fläche oder des Körpers gegen die Richtungen dieser Kräfte stets ein und derselbe Angriffspunct, nämlich der Mittelpunct der parallelen Kräfte, gehört. Die Coordinaten dieses Punctes ergeben sich auf dem oben vorgezeichneten Wege, nur muß jetzt die Summirung der Kräfte, wie auch ihrer Momente in Bezug auf die coordinirten Ebenen, durch Integration bewerkstelliget werden.

Es seyen x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines willkürlichen Punctes der gegebenen Linie, Fläche oder des gegebenen Körpers; ds das auf die bekannte Weise genommene, dem Puncte x, y, z entsprechende Differenzial der Länge der Linie, des Inhaltes der Fläche, oder des vom Körper ausgefüllten Raumes; P die Summe der Kräfte, welche auf die Einheit der Längen, der Flächen, oder der Rauminhalte wirkten, wenn jeder ihrer Puncte eben so wie der Punct x, y, z afficirt würde, wobei wir P als eine gegebene Function der Coordinaten x, y, z betrachten, so drückt $P ds$ die Kraft aus, mit welcher das Element ds getrieben wird, und wir haben, wenn ξ, v, z die Coordinaten des Mittelpunctes der Kräfte andeuten, und die Integralien sich über die ganze Linie oder Fläche, oder über den ganzen Körper erstrecken:

$$\xi = \frac{\int P x\, ds}{\int P\, ds}, \quad v = \frac{\int P y\, ds}{\int P\, ds}, \quad z = \frac{\int P z\, ds}{\int P\, ds}.$$

Hiebei ist für eine Linie

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

für eine Fläche $ds = dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$,

für einen Körper $ds = dx\, dy\, dz$.

Im zweiten Falle wird eine doppelte, und im dritten eine dreifache Integration erfordert.

Nehmen wir P als constant an, so vereinfachen sich obige Formeln. Es wird nämlich

$$\xi = \frac{\int x\, ds}{s}, \quad v = \frac{\int y\, ds}{s}, \quad z = \frac{\int z\, ds}{s},$$

wobei s die Länge der gegebenen Linie, oder den Inhalt der Fläche oder des Körpers vorstellt.

In besonderen Fällen können diese Formeln noch einfacher werden. Sucht man z. B. den Mittelpunct aller über eine durch eine gegebene Curve begrenzte ebene Figur gleichförmig vertheilter paralleler Kräfte, so nehme man die Ebene der Figur für die Ebene der xy an. Hiedurch verschwindet jedes z, wie auch $\mathfrak{z}$, und ds reducirt sich auf $dx\,dy$. Integrirt man in Bezug auf y, indem man diese Variable an der Axe der x anfangen, und an der Curve aufhören läßt, so ergibt sich

$$\int dx\,dy = y\,dx, \quad \int x\,dx\,dy = xy\,dx, \quad \int y\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}y^2\,dx,$$

wobei y durch x der Gleichung der Curve gemäß auszudrücken ist. Die Coordinaten des Mittelpunctes der Kräfte für die von einem Stücke der Abscissenaxe, von den in den Endpuncten dieses Stückes errichteten Perpendikeln, und dem dazwischen liegenden Bogen der Curve eingeschlossene Figur sind nun

$$\xi = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}, \quad v = \frac{\int y^2\,dx}{2\int y\,dx};$$

wobei, wenn a und b die Entfernungen der Endpuncte des erwähnten Stückes der Abscissenaxe vom Anfangspuncte der Coordinaten vorstellen, die Integralien von $x=a$ bis $x=b$ ausgedehnt werden müssen.

Begegnet die der Abscisse x correspondirende Ordinate der Curve in zwei Puncten, deren Abstände von der Axe der x durch y_1 und y_2 angezeigt werden, und verrichtet man die Integrationen in Bezug auf y innerhalb der Grenzen y_1 und y_2, wodurch

$$\int dx\,dy = (y_2 - y_1)\,dx,$$
$$\int x\,dx\,dy = x(y_2 - y_1)\,dx, \quad \int y\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2)\,dx$$

ausfällt, so findet man die Coordinaten des Mittelpunctes der parallelen Kräfte, welche über die zwischen zwei Ordinaten und den durch dieselben bestimmten Bogen der Curve enthaltene Figur gleichförmig vertheilt sind, mittelst der Formeln

$$\xi = \frac{\int x(y_2 - y_1)\,dx}{\int (y_2 - y_1)\,dx}, \quad v = \frac{\int (y_2^2 - y_1^2)\,dx}{2\int (y_2 - y_1)\,dx}.$$

Hier können auch y_2 und y_1 zu verschiedenen Curven gehören.

Der Mittelpunct der parallelen Kräfte, welche auf alle Puncte eines von einer Rotationsfläche begrenzten Körpers gleichförmig wirken, liegt offenbar in der Rotationsaxe, da die Resultirende dieser

Kräfte, wenn ihre Richtungen der genannten Axe parallel laufen, nothwendig mit derselben zusammenfällt. Es sey die Rotationsfläche durch Umdrehung einer ebenen Curve um die Axe der x erzeugt worden, so können wir, wenn y die der Abscisse x entsprechende Ordinate der Curve ist, für den gegebenen Körper

$$ds = \pi y^2 dx$$

setzen. Der Abstand des Mittelpunctes der Kräfte vom Anfangspuncte der Coordinaten wird durch die Formel

$$\xi = \frac{\int x y^2 dx}{\int y^2 dx}$$

ausgedrückt.

Das Integral $\pi \int y^2 dx$, welches den Inhalt des durch die Rotationsfläche umschlossenen Raumes angibt, läßt sich auch auf die Form

$$2\pi \,.\, \int y dx \,.\, \frac{\int y^2 dx}{2\int y dx}$$

bringen, woraus erhellet, daß man den so eben genannten körperlichen Inhalt auch findet, wenn man den Flächeninhalt der denselben beschreibenden Figur mit dem Umfange des Kreises multiplicirt, welchen unter der Voraussetzung, daß diese Figur von parallelen Kräften gleichförmig afficirt wird, der Mittelpunct dieser Kräfte durchlauft; eine Regel, die unter dem Namen der Guldin'schen bekannt ist, und manchmal mit Vortheil gebraucht werden kann.

Alle in dieser Vorlesung vorgetragenen Sätze finden bei der Lehre von der Schwerkraft, durch welche jedes Theilchen eines jeden uns bekannten Körpers gegen die Erde getrieben wird, eine schöne Anwendung, in so ferne es nämlich die geringe Ausdehnung der Körper, mit welchen wir es gewöhnlich zu thun haben, gestattet, die Richtungen aller auf dieselben einwirkenden Schwerkräfte als parallel zu betrachten. Der Mittelpunct dieser Kräfte führt den Namen Schwerpunct.

Zehnte Vorlesung.

Über den Gebrauch des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten bei der Auflösung der Probleme der Statik.

Alle Fragen, welche sich über das Gleichgewicht eines von beliebigen Kräften afficirten Systems materieller Puncte darbieten, fordern entweder die Entscheidung, ob dieses System in einer gegebenen Position im Gleichgewichte sey oder nicht; oder sie verlangen überhaupt die Angabe der Positionen des Systems, für welche das Gleichgewicht bei den vorhandenen Kräften eintritt, oder endlich, die Ausmittelung der Kräfte, welche zu den gegebenen hinzuzufügen sind, damit das Gleichgewicht für irgend eine bestimmte oder unbestimmte Position des Systems Statt finde. Die Beantwortung jeder dieser Fragen läßt sich aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten bloß mittelst analytischer Operationen schöpfen.

Nehmen wir an, auf die Puncte m_1, m_2, m_3, ..., deren Inbegriff das System, von welchem die Rede ist, ausmacht, wirken beziehungsweise die Kräfte P_1, P_2, P_3, ..., in so fern nämlich die an jedem einzelnen dieser Puncte angebrachten Kräfte in eine Resultirende vereinigt worden sind, und auf den rückwärts verlängerten Richtungen von P_1, P_2, P_3, ... seyen, von den Puncten m_1, m_2, m_3, ... an gerechnet, die Stücke p_1, p_2, p_3, ... abgeschnitten, welche also die genannten Kräfte gleichsam zu verlängern streben, so muß, wenn diese Kräfte einander das Gleichgewicht halten sollen, in Bezug auf jede unendlich geringe Verrückung der Puncte m_1, m_2, m_3, ... aus den ihnen dabei zukommenden Positionen, welche ohne Störung der zwischen denselben festgesetzten Verbindung möglich ist, die Gleichung

$$(1) \qquad P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + P_3 \delta p_3 + \ldots\ldots = 0$$

bestehen.

Die Variationen δp_1, δp_2, δp_3, ... lassen sich (sechste Vorlesung) durch die Variationen der Coordinaten der Puncte m_1, m_2, m_3, ... für jedes beliebige Coordinatensystem, oder wenn man will, durch die Variationen anderer veränderlicher Größen, welche mit jenen

Coordinaten in einer bekannten Verbindung stehen, ausdrücken. Da zwischen den Puncten m_1, m_2, m_3, ... eine durch die Natur des von denselben gebildeten Systems gegebene Verbindung obwaltet, welche in allen Fällen ohne Schwierigkeit durch Bedingungsgleichungen zwischen ihren Coordinaten oder zwischen den anderen Variablen, auf welche man diese Coordinaten zurückführen will, darstellbar ist, so sind die Variationen der erwähnten Variablen ebenfalls an diese Gleichungen gebunden. Mittelst genannter Gleichungen lassen sich die Variationen aller Variablen durch die Variationen gewisser Variablen ξ, υ, ζ, ... darstellen, welche keiner weiteren Beschränkung unterworfen sind, und deßhalb als völlig willkürlich betrachtet werden dürfen. Die Variationen $\delta\xi$, $\delta\upsilon$, $\delta\zeta$, rc. sind es, deren willkürliche Annahme alle der Verbindung der Puncte m_1, m_2, m_3, ... angemessenen Änderungen ihrer Positionen bedingt.

Betrachten wir sogleich p_1, p_2, p_3, ... als Functionen von ξ, υ, ζ, ..., so haben wir

$$(2)\qquad \begin{aligned}\delta p_1 &= \frac{dp_1}{d\xi}\,\delta\xi + \frac{dp_1}{d\upsilon}\,\delta\upsilon + \frac{dp_1}{d\zeta}\,\delta\zeta + \ldots\ldots\\ \delta p_2 &= \frac{dp_2}{d\xi}\,\delta\xi + \frac{dp_2}{d\upsilon}\,\delta\upsilon + \frac{dp_2}{d\zeta}\,\delta\zeta + \ldots\ldots\\ \delta p_3 &= \frac{dp_3}{d\xi}\,\delta\xi + \frac{dp_3}{d\upsilon}\,\delta\upsilon + \frac{dp_3}{d\zeta}\,\delta\zeta + \ldots\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.,

wobei die partiellen Differenzialquotienten

$$\frac{dp_1}{d\xi},\ \frac{dp_1}{d\upsilon},\ \text{rc. statt}\ \frac{\delta p_1}{\delta\xi},\ \frac{\delta p_2}{\delta\upsilon},\ \text{rc.}$$

stehen, da dieselben durch Vertauschung des Zeichens d mit δ keine Änderung erleiden.

Verbinden wir nun (2) mit (1), so folgt

$$(3)\qquad \left.\begin{aligned}&\left(P_1\frac{dp_1}{d\xi} + P_2\frac{dp_2}{d\xi} + P_3\frac{dp_3}{d\xi} + \ldots\right)\delta\xi\\ +&\left(P_1\frac{dp_1}{d\upsilon} + P_2\frac{dp_2}{d\upsilon} + P_3\frac{dp_3}{d\upsilon} + \ldots\right)\delta\upsilon\\ +&\left(P_1\frac{dp_1}{d\zeta} + P_2\frac{dp_2}{d\zeta} + P_3\frac{dp_3}{d\zeta} + \ldots\right)\delta\zeta\\ +&\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} = 0.$$

Da diese Gleichung, wenn das gegebene System sich im Zustande des Gleichgewichtes befindet, für alle Werthe der Variationen

$\delta\xi$, $\delta\upsilon$, δz, ... bestehen muß, so zerfällt sie in die Gleichungen

$$(4)\quad P_1 \frac{dp_1}{d\xi} + P_2 \frac{dp_2}{d\xi} + P_3 \frac{dp_3}{d\xi} + \ldots = 0,$$
$$P_1 \frac{dp_1}{d\upsilon} + P_2 \frac{dp_2}{d\upsilon} + P_3 \frac{dp_3}{d\upsilon} + \ldots = 0,$$
$$P_1 \frac{dp_1}{d\zeta} + P_2 \frac{dp_2}{d\zeta} + P_3 \frac{dp_3}{d\xi} + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

welche die Bedingungen enthalten, unter denen das Gleichgewicht des gegebenen Systems materieller Puncte besteht.

Da die Anzahl der Gleichungen (4) mit jener der independenten Variablen ξ, υ, z, ... übereinstimmt, so wird man immer im Stande seyn, die Werthe, welche ξ, υ, z, ... im Falle des Gleichgewichtes haben müssen, auszumitteln. Führt man nun die erhaltenen Resultate in die durch die Natur des Systems selbst festgesetzten Gleichungen ein, so lassen sich die Positionen der Puncte m_1, m_2, m_3, ..., für welche das Gleichgewicht Statt findet, bestimmen.

Bezeichnen wir die Coefficienten der Variationen $\delta\xi$, $\delta\upsilon$, δz, ... in der Gleichung (3) durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, ..., so ist, obiger Rechnung zu Folge:

$$P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + P_3\delta p_3 + \ldots = \mathfrak{X}\delta\xi + \mathfrak{Y}\delta\upsilon + \mathfrak{Z}\delta z + \ldots,$$

folglich

$$(5)\quad P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + P_3\delta p_3 + \ldots - \mathfrak{X}\delta\xi - \mathfrak{Y}\delta\upsilon - \mathfrak{Z}\delta z - \ldots = 0.$$

Betrachten wir nun $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, ... als Kräfte, welche die Größen ξ, υ, z, ... zu verändern streben, so ersehen wir aus (5), daß zwischen P_1, P_2, P_3, ... und $-\mathfrak{X}$, $-\mathfrak{Y}$, $-\mathfrak{Z}$, ꝛc. Gleichgewicht besteht. Es lassen sich demnach in dem Falle, wenn P_1, P_2, P_3, ... sich das Gleichgewicht nicht halten, die zur Herstellung desselben nöthigen Kräfte in der kürzesten Form angeben, wodurch zugleich, wenn man die letzteren Kräfte in entgegengesetzter Richtung nimmt, die Zusammensetzung der Kräfte P_1, P_2, P_3, ... bewerkstelliget werden kann.

Lagrange, von welchem die hier vorgetragene allgemeine Behandlungsweise der Probleme der Statik herrührt, hat die obige Rechnung noch auf folgende, in mehrfacher Hinsicht vorzüglichere Art, anzustellen gelehrt.

Es seyen $U = 0$, $V = 0$, ꝛc. die durch die Beschaffenheit des vorliegenden Systems materieller Puncte selbst gegebenen Bedingungs-

gleichungen zwischen ihren Coordinaten. Statt mittelst der Gleichungen $\delta U = 0$, $\delta V = 0$, ... aus δp_1, δp_2, δp_3, ... so viele der Variationen dieser Coordinaten, oder der Variablen, auf welche sie reducirt worden sind, als möglich wegzuschaffen, addire man zu dem linker Hand des Gleichheitszeichens in der Gleichung (1) erscheinenden Ausdrucke die Glieder $\lambda\delta U$, $\mu\delta V$, ..., wobei λ, μ, ... bis jetzt noch unbestimmte Multiplicatoren vorstellen. In der hiedurch sich ergebenden Gleichung lasse man die Coefficienten sowohl der zu eliminirenden, als auch der zurückbleibenden independenten Variationen verschwinden; d. h. wenn ξ eine dieser Coordinaten oder sonstigen Variablen ist, setze man

$$P_1\frac{dp_1}{d\xi} + P_2\frac{dp_2}{d\xi} + P_3\frac{dp_3}{d\xi} + \ldots + \lambda\frac{dU}{d\xi} + \mu\frac{dV}{d\xi} + \ldots = 0,$$

und verfahre eben so in Bezug auf die übrigen Variablen. Man erhält auf diesem Wege so viele Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes, als Variable vorhanden sind. Aus denselben eliminire man nun die unbestimmten Größen λ, μ, ..., deren Anzahl eben so groß ist als jene der durch die Beschaffenheit des Systems dargebotenen Gleichungen; die Ergebnisse dieser Operation sind die Gleichungen (4) selbst, oder andere ihnen völlig gleichgeltende.

Das hier beschriebene Verfahren ist der von Bezout erdachten, in mehreren Lehrbüchern der Algebra auseinander gesetzten Eliminationsmethode für Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Variablen nachgebildet, und beruht auf denselben Gründen.

Betrachten wir U als eine Function der rechtwinkligen Coordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; ꝛc. der Puncte m_1, m_2, m_3, ..., so haben wir

$$\delta U = \frac{dU}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dU}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dU}{dz_1}\delta z_1 + \frac{dU}{dx_2}\delta x_2 + \frac{dU}{dy_2}\delta y_2 + \frac{dU}{dz_2}\delta z_2$$
$$+ \frac{dU}{dx_3}\delta x_3 + \frac{dU}{dy_3}\delta y_3 + \frac{dU}{dz_3}\delta z_3 + \ldots;$$

oder, wenn wir die Summe der drei ersten Glieder dieses Ausdruckes durch δU_1, die Summe der drei folgenden durch δU_2 vorstellen, u. s. w.

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2 + \delta U_3 + \ldots,$$

folglich $$\lambda\delta U = \lambda\delta U_1 + \lambda\delta U_2 + \lambda\delta U_3 + \ldots.$$

Nachstehende Betrachtung wird über die Bedeutung der einzelnen Glieder dieses Ausdruckes einiges Licht verbreiten.

Es sey P eine auf den Punct x, y, z wirkende Kraft, in deren rückwärts verlängerter Richtung von dem genannten Angriffspuncte angefangen das Stück p angenommen wurde; die Coordinaten des Endpunctes dieses Stückes seyen a, b, c, so ist

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2};$$

daher, in so ferne der Punct x, y, z um unendlich Wenig aus seiner gegenwärtigen Lage verrückt wird:

$$\delta p = \frac{(x-a)\,\delta x + (y-b)\,\delta y + (z-c)\,\delta z}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Stellen wir uns nun vor, der Punct x, y, z befinde sich auf einer Fläche, deren Differenzialgleichung

$$du = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz = 0$$

ist, und die Richtung der Kraft P stehe auf dieser Fläche senkrecht, d. h. a, b, c seyen Coordinaten der zu dem Puncte x, y, z der Fläche $du = 0$ gehörenden Normallinie, so bestehen, wegen

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{du}{dx} : \frac{du}{dz} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{du}{dy} : \frac{du}{dz},$$

die Gleichungen

$$x - a - (z-c)\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}} = 0, \quad y - b - (z-c)\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dz}} = 0,$$

oder

$$(x-a)\frac{du}{dz} = (z-c)\frac{du}{dx}, \quad (y-b)\frac{du}{dz} = (z-c)\frac{du}{dy}.$$

Mit Hülfe derselben verwandelt sich der obige Ausdruck für δp, wenn man den Zähler und den Nenner desselben mit $\frac{du}{dz}$ multiplicirt, in

$$\delta p = \frac{\frac{du}{dx}\delta x + \frac{du}{dy}\delta y + \frac{du}{dz}\delta z}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}}$$

$$= \frac{\delta u}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}};$$

daher ist das Moment einer an dem Puncte x, y, z der Fläche $du = 0$

normal angebrachten Kraft P, nämlich

$$P\delta p = \frac{P\delta u}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}}.$$

Dieß vorausgesetzt, geben wir dem Producte $\lambda\delta U_1$ die Form

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dU_1}{dy_1}\right)^2+\left(\frac{dU_1}{dz_1}\right)^2} \cdot \frac{\delta U_1}{\sqrt{\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dU_1}{dy_1}\right)^2+\left(\frac{dU_1}{dz_1}\right)^2}}$$

so zeigt sich mit Rücksicht auf

$$\frac{dU_1}{dx_1} = \frac{dU}{dx_1}, \quad \frac{dU_1}{dy_1} = \frac{dU}{dy_1}, \quad \frac{dU_1}{dz_1} = \frac{dU}{dz_1},$$

daß dasselbe das Moment einer Kraft

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dU}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy_1}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz_1}\right)^2}$$

ausdrückt, welche auf die Fläche, deren Differenzialgleichung

$$\frac{dU}{dx_1}dx_1 + \frac{dU}{dy_1}dy_1 + \frac{dU}{dz_1}dz_1 = 0$$

ist, normal wirkt. Eine ähnliche Deutung lassen auch die Producte $\lambda\delta U_2$, $\lambda\delta U_3$, ... zu, daher zeigt $\lambda\delta U$ die Summe der Momente der auf den Punct x, y, z einwirkenden und beziehungsweise gegen die Flächen

$$\frac{dU}{dx_1}dx_1 + \frac{dU}{dy_1}dy_1 + \frac{dU}{dz_1}dz_1 = 0,$$
$$\frac{dU}{dx_2}dx_2 + \frac{dU}{dy_2}dy_2 + \frac{dU}{dz_2}dz_2 = 0,$$
$$\frac{dU}{dx_3}dx_3 + \frac{dU}{dy_3}dy_3 + \frac{dU}{dz_3}dz_3 = 0, \text{ ꝛc.}$$

normal gerichteten Kräfte

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dU}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dU}{dy_1}\right)^2+\left(\frac{dU}{dz_1}\right)^2},\ \lambda\sqrt{\left(\frac{dU}{dx_2}\right)^2+\left(\frac{dU}{dy_2}\right)^2+\left(\frac{dU}{dz_2}\right)^2},$$
$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dU}{dx_3}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy_3}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz_3}\right)^2}, \text{ ꝛc.}$$

an. Diese Bemerkung kann mit Vortheil zur Bestimmung der Kräfte gebraucht werden, welche die einzelnen Bestandtheile des gegebenen Systems vermöge ihrer wechselseitigen Verbindung auszuhalten haben.

Sobald man zu den Kräften, welche auf jeden einzelnen Punct

eines Systems wirken, noch diejenigen hinzusetzt, welche die übrigen Puncte auf ersteren, ihrer Verknüpfung mit demselben gemäß, ausüben, kann jeder Punct des Systems als ein völlig freier betrachtet werden, und es gelten die Variationen der seine Position bezeichnenden Variablen für independente Größen, so daß es verstattet ist, den Coefficienten jeder dieser Variationen gleich Null anzunehmen. Auch aus diesem Gesichtspuncte läßt sich die Zuläßigkeit der so eben gezeigten Eliminationsmethode der dependenten Variationen mittelst unbestimmter Multiplicatoren rechtfertigen.

Wenn die materiellen Puncte, deren Inbegriff das gegebene System darstellt, nicht isolirt sind, sondern wenn alle Puncte einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers von Kräften afficirt werden, so bedarf das obige Verfahren zur Behandlung der das Gleichgewicht dieser Kräfte betreffenden Probleme einiger Modificationen, mit deren Auseinandersetzung wir uns noch beschäftigen müssen.

Die Kräfte, von welchen hier die Rede ist, sind im Allgemeinen von zweifacher Art; die einen wirken auf jeden Punct der vorliegenden Linie, Fläche oder des Körpers, und es ist das Gesetz gegeben, nach welchem sie sich von Punct zu Punct ändern; die anderen aber afficiren bloß einzelne Puncte des genannten Systems.

Ist dm das irgend einem Puncte der Linie, der Fläche oder des Körpers entsprechende Differenzial der Masse, das ist die Menge der unter dem Differenzial eines unbestimmten Theiles des vorhandenen Systems enthaltenen Materie, und ist P eine, jeden Punct des Differenzials dm zur Bewegung anregende, Kraft der ersteren Art, welche wir als eine Function der Coordinaten desselben gegeben voraussetzen, und so wie wir es bereits früher thaten, auf die Einheit der Massen beziehen; so wird die auf das erwähnte Differenzial einwirkende Gesammtkraft durch das Product $P\,dm$ ausgedrückt. Stellt nun p eine in der rückwärts verlängerten Richtung der Kraft P angenommene, von einem zu dm gehörenden Puncte anfangende Linie vor, so erscheint in der Gleichung (1) wegen P das auf das ganze System auszudehnende Integral

$$\int P\,dm\,\delta p.$$

Sind alle Puncte unseres Systems an gewisse Bedingungsgleichungen $U = o$, $V = o$, $W = o$, deren Anzahl, da jedem Puncte nur drei Coordinaten gehören, nie die Zahl 3 übersteigen kann, gebunden, so füge man zu diesem Integral noch die Ausdrücke

$$\int \lambda \delta U, \ \int \mu \delta V, \ \int \nu \delta W$$

hinzu, in welchen λ, μ, ν unbestimmte, von Punct zu Punct variable, Multiplicatoren vorstellen, und die Integration den oben ausgesprochenen Umfang erfordert.

Jede an einem einzelnen Puncte des Systems angebrachte Kraft P' liefert zur Gleichung (1) ein Glied von der Form $P'\delta p'$, und jede einen einzelnen Punct angehende Bedingungsgleichung $U' = 0$ ein Glied von der Form $\lambda' \delta U'$, wobei p', λ' in Bezug auf P', U' dieselbe Bedeutung haben, wie p, λ in Bezug auf P, U.

Die Gleichung, aus welcher die Auflösung der vorgelegten Aufgabe geschöpft werden muß, hat daher die Gestalt

$$(6) \quad P'\delta p' + \ldots + \lambda'\delta U' + \ldots + \int (P\,dm\,\delta p + \ldots + \lambda \delta U + \ldots) = 0.$$

Diese Gleichung muß ganz nach den Methoden behandelt werden, welche wir in unseren Vorlesungen über die Variationsrechnung und über ihre Anwendung auf geometrische Probleme vorgetragen haben. Mit Hülfe der bekannten Reductionsformel

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

entferne man aus dem darin erscheinenden Integrale alle in demselben etwa vorhandenen Differenzialien der Variationen der Variablen; ist dieß geschehen, so nimmt diese Gleichung, wenn wir der Rechnung beispielsweise ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde legen, die Form

$$(7) \qquad K + \int (\mathfrak{X}\,\delta x + \mathfrak{Y}\,\delta y + \mathfrak{Z}\,\delta z) = 0$$

an, wobei K den Inbegriff aller vor dem Integralzeichen stehenden Glieder andeutet, und zerfällt zunächst in die Gleichungen

$$(8) \qquad K = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{X}\,\delta x + \mathfrak{Y}\,\delta y + \mathfrak{Z}\,\delta z = 0.$$

Die letztere kann man, der in die Rechnung verwebten unbestimmten Multiplicatoren λ, μ, ν wegen, in die Gleichungen

$$(9) \qquad \mathfrak{X} = 0, \quad \mathfrak{Y} = 0, \quad \mathfrak{Z} = 0$$

zerlegen, welche, mit den Gleichungen $U=0$, $V=0$, $W=0$, deren Anzahl eben so groß ist, als jene der Größen λ, μ, ν, verbunden, zur Ausmittelung der Beschaffenheit von x, y, z im Falle des Gleichgewichtes aller Kräfte hinreichen.

Die Gleichungen, welche uns $K=0$ darbietet, gehören einzelnen Puncten des Systems, und dienen vornehmlich zur Bestimmung der in den allgemeinen Ausdrücken für x, y, z enthaltenen Constanten.

Eilfte Vorlesung.

Über das Gleichgewicht eines vollkommen biegsamen Fadens.

Um die in der vorhergehenden Vorlesung vorgetragene Auflösungsmethode der Aufgaben der Statik an einem besonderen Falle anschaulich zu machen, wollen wir das Gleichgewicht eines vollkommen biegsamen Fadens unter der Voraussetzung untersuchen, daß auf jeden Punct desselben eine Kraft wirke.

Beziehen wir diesen Faden auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, und bezeichnen wir die Coordinaten irgend eines Punctes desselben durch x, y, z; die Länge eines an diesem Puncte sich endigenden Stückes des Fadens durch s, und die Masse, welche auf der Länge 1 vorhanden wäre, wenn auf derselben jedes Theilchen $= ds$ so viel Materie enthielte, als das genannte Fadenstück, durch μ: so ist die Masse des letzteren $= \mu ds$, wobei wir uns μ als eine gegebene Function der Coordinaten x, y, z denken. Zerlegen wir ferner alle an dem Faden thätigen Kräfte parallel zu den Axen der x, y, z, und nennen wir die in dieser Beziehung dem Puncte x, y, z correspondirenden Kräfte X, Y, Z, wobei die Zahlen X, Y, Z eigentlich die Kräfte vorstellen, welche die Einheit der Massen afficirten, wenn jedes Theilchen derselben $= \mu ds$ so zur Bewegung angeregt würde, wie letzteres Differenzial, so wirken auf das Fadenstück ds die Kräfte $\mu X ds$, $\mu Y ds$, $\mu Z ds$, und die Summe der Momente derselben ist

$$(1) \qquad \mu (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds,$$

welche die Stelle des in der vorhergehenden Vorlesung durch $P dm \delta p$ angedeuteten Momentes vertritt.

In Bezug auf die Beschaffenheit des Fadens muß unterschieden werden, ob derselbe ausdehnbar oder unausdehnbar ist. Betrachten wir den letzteren Fall zuerst.

Die Bedingung der Unausdehnbarkeit des Fadens wird analytisch durch die Gleichung

$$\delta ds = 0$$

ausgedrückt, welche aussagt, daß die Länge keines noch so kleinen Theiles desselben einer Änderung fähig ist. Verbinden wir die Variation

δds mit dem Multiplicator λ, und fügen wir das Product zu dem Momente (1) hinzu, so muß, wenn der Faden unter der Einwirkung sämmtlicher Kräfte im Gleichgewichte seyn soll, die Gleichung

$$(2) \qquad \int[\mu(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,ds + \lambda\,\delta ds] = 0$$

Statt finden, wobei die Integration auf die Länge des ganzen Fadens auszudehnen ist.

Wegen $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ haben wir

$$\delta ds = \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dx}{ds}\,d\delta x + \frac{dy}{ds}\,d\delta y + \frac{dz}{ds}\,d\delta z;$$

substituiren wir diesen Ausdruck in die Gleichung (2), und schaffen wir mittelst der Reductionsformel $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ die Differenzialien $d\delta x$, $d\delta y$, $d\delta z$ weg, so ergibt sich, wenn wir die auf den Anfangspunct des Fadens sich beziehenden Größen durch Ansetzen des Zeigers 1, und die auf den Endpunct sich beziehenden durch den Zeiger 2 kenntlich machen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\frac{\lambda_2\,dx_2}{ds_2}\delta x_2 + \frac{\lambda_2\,dy_2}{ds_2}\delta y_2 + \frac{\lambda_2\,dz_2}{ds_2}\delta z_2 \\ &- \frac{\lambda_1\,dx_1}{ds_1}\delta x_1 - \frac{\lambda_1\,dy_1}{ds_1}\delta y_1 - \frac{\lambda_1\,dz_1}{ds_1}\delta z_1 \\ &+ \int\left[\left(\mu X ds - d\frac{\lambda dx}{ds}\right)\delta x + \left(\mu Y ds - d\frac{\lambda dy}{ds}\right)\delta y + \left(\mu Z ds - d\frac{\lambda dz}{ds}\right)\delta z\right] = 0. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir folgende:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mu X ds - d\frac{\lambda dx}{ds} &= 0, \\ \mu Y ds - d\frac{\lambda dy}{ds} &= 0, \\ \mu Z ds - d\frac{\lambda dz}{ds} &= 0 \end{aligned}$$

und

$$(5) \qquad \left.\begin{aligned} &\frac{\lambda_2\,dx_2}{ds_2}\delta x_2 + \frac{\lambda_2\,dy_2}{ds_2}\delta y_2 + \frac{\lambda_2\,dz_2}{ds_2}\delta z_2 \\ &- \frac{\lambda_1\,dx_1}{ds_1}\delta x_1 - \frac{\lambda_1\,dy_1}{ds_1}\delta y_1 - \frac{\lambda_1\,dz_1}{ds_1}\delta z_1 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Die Gleichungen (4) verhelfen uns nach vollbrachter Elimination von λ zur Kenntniß der Gestalt, welche der Faden durch die Einwirkung der vorhandenen Kräfte erhält.

Sind μ, X, Y, Z bloß als Functionen des Bogens s gegeben, so können wir diese Gleichungen geradezu integriren, wodurch wir

$$(6)\qquad \frac{\lambda dx}{ds} = A + \int \mu X ds,$$

$$\frac{\lambda dy}{ds} = B + \int \mu Y ds,$$

$$\frac{\lambda dz}{ds} = C + \int \mu Z ds$$

erhalten, wobei A, B, C constante Größen bedeuten. Hieraus folgt

$$(7)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{B + \int \mu Y ds}{A + \int \mu X ds},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C + \int \mu Z ds}{A + \int \mu X ds},$$

welches die Differenzialgleichungen der Gestalt des Fadens sind.

Findet aber die so eben ausgesprochene Voraussetzung nicht Statt, so gebe man den Gleichungen (4) die Form

$$(8)\qquad \mu X ds - \lambda d\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds} d\lambda = 0,$$

$$\mu Y ds - \lambda d\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds} d\lambda = 0,$$

$$\mu Z ds - \lambda d\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds} d\lambda = 0.$$

Verbindet man die erste dieser Gleichungen mit den beiden anderen durch Elimination von $d\lambda$, so hat man

$$(9)\qquad \mu(X dy - Y dx) = \lambda\left(\frac{dy}{ds} d\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds} d\frac{dy}{ds}\right),$$

$$\mu(X dz - Z dx) = \lambda\left(\frac{dz}{ds} d\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds} d\frac{dz}{ds}\right).$$

Multiplicirt man aber die Gleichungen (8) der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, und bedenkt man, daß

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1,$$

folglich $\quad \frac{dx}{ds} d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d\frac{dz}{ds} = 0$

ist, so ergibt sich durch Addition derselben

$$(10)\qquad \mu(X dx + Y dy + Z dz) = d\lambda.$$

Ist die Differenzialformel $\mu(X dx + Y dy + Z dz)$ integrabel, so bietet uns die Gleichung (10) λ als Function von x, y, z dar, und die Gleichungen (9) verwandeln sich nach vollzogener Substitution des

für λ erhaltenen Ausdruckes in die beiden Differenzialgleichungen der Gestalt des Fadens, welche zur zweiten Ordnung gehören. Geht aber die Integration der erwähnten Differenzialformel nicht an, so muß man beide aus (9) sich ergebenden Ausdrücke für $d\lambda$ in die Gleichung (10) einführen, um die Differenzialgleichungen der Gestalt des Fadens, zu erhalten, welche sich nunmehr bis zur dritten Ordnung erheben.

Die Größe λ zeigt, der in der vorhergehenden Vorlesung gemachten Bemerkung gemäß, eine längs des Differenzials ds oder längs der zum Puncte x, y, z gehörenden Tangente des Fadens wirkende Kraft an; d. h. sie mißt die Spannung, welche der Faden in diesem Puncte erleidet. Der Bedingung $\delta ds = o$ zu Folge müssen wir uns jeden Theil des Fadens nicht bloß keiner Verlängerung, sondern auch keiner Verkürzung fähig denken, also unter dem Worte Spannung nicht bloß eine Kraft, welche die im Puncte x, y, z an einander grenzenden Stücke des Fadens von einander zu entfernen strebt, sondern nach Umständen auch eine diese Stücke gegen einander drückende Kraft verstehen.

Die Gleichung (5) ist bei der Bestimmung der Constanten, welche bei den vorzunehmenden Integrationen in die Rechnung verwebt werden, zu berücksichtigen. Denken wir uns beide Enden des Fadens völlig frei, und außer den oben genannten keine anderen Kräfte auf dieselben wirksam, so folgt aus (5), wie man leicht sieht, sowohl

$$\lambda_1 = o, \quad \text{als auch} \quad \lambda_2 = o.$$

Die Gleichungen (6) geben uns, da die Integralien $\int \mu X ds$, $\int \mu Y ds$, $\int \mu Z ds$ für den Anfangspunct des Fadens verschwinden,

$$(11) \qquad \frac{\lambda_1 dx_1}{ds_1} = A, \quad \frac{\lambda_1 dy_1}{ds_1} = B, \quad \frac{\lambda_1 dz_1}{ds_1} = C;$$

es verschwinden also auch die Constanten A, B, C. Da ferner, wenn wir die Werthe der über die ganze Länge des Fadens ausgedehnten Integralien $\int \mu X ds$, $\int \mu Y ds$, $\int \mu Z ds$ durch S, S′, S″ vorstellen,

$$(12) \qquad \frac{\lambda_2 dx_2}{ds_2} = A + S, \quad \frac{\lambda_2 dy_2}{ds_2} = B + S', \quad \frac{\lambda_2 dz_2}{ds_2} = C + S''$$

ist, so haben wir

$$S = o, \quad S' = o, \quad S'' = o.$$

Nehmen wir aber an, auf die beiden Endpuncte des Fadens wirken, außer den allen Puncten gemeinschaftlichen, noch Kräfte, welche parallel mit den Axen der Coordinaten zerlegt, beziehungsweise in X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 zerfallen, so müssen zu dem ersten Theile der Gleichung (3) die Glieder

$$X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1 + X_2 \delta x_2 + Y_2 \delta y_2 + Z_2 \delta z_2$$

hinzukommen, und die Gleichung (5) hat nun die Form

$$(13) \quad \left.\begin{aligned} &\left(X_2 + \frac{\lambda_2 dx_2}{ds_2}\right)\delta x_2 + \left(Y_2 + \frac{\lambda_2 dy_2}{ds_2}\right)\delta y_2 + \left(Z_2 + \frac{\lambda_2 dz_2}{ds_2}\right)\delta z_2 \\ + &\left(X_1 - \frac{\lambda_1 dx_1}{ds_1}\right)\delta x_1 + \left(Y_1 - \frac{\lambda_1 dy_1}{ds_1}\right)\delta y_1 + \left(Z_1 - \frac{\lambda_1 dz_1}{ds_1}\right)\delta z_1 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Da der Ungebundenheit der Endpuncte des Fadens zu Folge die Variationen der Coordinaten derselben von einander unabhängig sind, so gibt uns diese Gleichung

$$(14) \quad \frac{\lambda_1 dx_1}{ds_1} = X_1, \quad \frac{\lambda_1 dy_1}{ds_1} = Y_1, \quad \frac{\lambda_1 dz_1}{ds_1} = Z_1,$$
$$\frac{\lambda_2 dx_2}{ds_2} = -X_2, \quad \frac{\lambda_2 dy_2}{ds_2} = -Y_2, \quad \frac{\lambda_2 dz_2}{ds_2} = -Z_2.$$

Aber $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sind im Allgemeinen die Cosinusse der Winkel, welche die zum Puncte x, y, z gehörende Tangente des Fadens mit den Richtungen der positiven x, y, z bildet; es fallen demnach die Richtungen der an den Endpuncten des Fadens angebrachten Kräfte in die zu diesen Puncten gezogenen Tangenten, und heben daselbst die von den übrigen Kräften herrührenden Spannungen auf.

Die Gleichungen (12) reduciren sich in dem so eben betrachteten Falle auf

$$X_1 + X_2 + S = 0, \quad Y_1 + Y_2 + S' = 0, \quad Z_1 + Z_2 + S'' = 0;$$

daher wird zum Gleichgewichte aller auf den Faden wirkenden Kräfte erfordert, daß die algebraischen Summen der durch die Zerlegung derselben parallel mit den Axen der Coordinaten entstehenden Kräfte verschwinden. Diese Bedingungen stimmen mit einigen derjenigen überein, von welchen das Gleichgewicht eines Systems unveränderlich mit einander verbundener Puncte abhängt. In der That, bedenkt man, daß das Gleichgewicht eines Systems wie immer mit einander verknüpfter Puncte fortbestehen muß, wenn man dieselben durch unbiegsame und der Länge nach unveränderliche Geraden mit einander in Verbindung

bringt, weil hiedurch keine Bewegungen angeregt, sondern bloß gehindert werden, so überzeugt man sich leicht, daß unter den Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes jedes veränderlichen Systems, welches weniger als drei fixe Puncte enthält, nothwendig die auf ein ähnliches unveränderliches System sich beziehenden erscheinen.

Um zu zeigen, daß auch die algebraischen Summen der Momente aller auf den gegebenen Faden wirkenden Kräfte in Bezug auf die coordinirten Ebenen gleich Null sind, multipliciren wir die erste der Gleichungen (8) mit y, und die zweite mit x, und subtrahiren jene von dieser, so ergibt sich

$$\mu(Yx - Xy)\,ds - \lambda\left(x\,d\frac{dy}{ds} - y\,d\frac{dx}{ds}\right) - \left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)d\lambda = 0,$$

d. h. $\mu(Yx - Xy)\,ds - d\left[\lambda\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)\right] = 0.$

Bezeichnen wir das über den ganzen Faden ausgedehnte Integral $\int\mu(Yx - Xy)\,ds$ durch $\mathfrak{S}$, so erhalten wir aus dieser Gleichung durch gehörige Integration

$$\mathfrak{S} + \lambda_1\left(x_1\frac{dy_1}{ds_1} - y_1\frac{dx_1}{ds_1}\right) - \lambda_2\left(x_2\frac{dy_2}{ds_2} - y_2\frac{dx_2}{ds_2}\right) = 0,$$

welche Gleichung wegen (14) die Gestalt

$$\mathfrak{S} + Y_1x_1 - X_1y_1 + Y_2x_2 - X_2y_2 = 0$$

annimmt, unter der sie den zu beweisenden Satz ausdrückt.

Ist einer der beiden Endpuncte des Fadens fix, so sind die auf ihn sich beziehenden Variationen der Coordinaten sämmtlich gleich Null, und die von denselben abhängenden Glieder kommen in der Gleichung (5) nicht vor; ist aber einer dieser Endpuncte an eine gegebene Fläche oder Linie gebunden, so müssen die Variationen seiner Coordinaten den Gleichungen der Fläche oder Linie Genüge leisten.

Soll der Faden, an dessen Endpuncten parallel zu den Axen der x, y, z die Kräfte X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 angebracht sind, seiner ganzen Länge nach auf der Fläche, welcher die Differenzialgleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ gehört, liegen, so muß man in der Gleichung (3) unter dem Integralzeichen $p\,\delta x + q\,\delta y$ statt δz setzen, um daselbst bloß independente Variationen der Coordinaten vor Augen zu haben. Ist dieß geschehen, so erhält man aus dieser Gleichung

$$(15)\qquad \mu X\,ds - d\frac{\lambda\,dx}{ds} + p\left(\mu Z\,ds - d\frac{\lambda\,dz}{ds}\right) = 0,$$

$$\mu Y\,ds - d\frac{\lambda\,dy}{ds} + q\left(\mu Z\,ds - d\frac{\lambda\,dz}{ds}\right) = 0.$$

Das Resultat der Elimination von λ aus diesen Gleichungen bestimmt die Lage des im Zustande des Gleichgewichtes befindlichen Fadens auf der gegebenen Fläche. Eben so muß man aus (13) die Variationen δz_1, δz_2 mittelst der Ausdrücke

$$\delta z_1 = p_1 \delta x_1 + q_1 \delta y_1, \quad \delta z_2 = p_2 \delta x_2 + q_2 \delta y_2$$

wegschaffen. Die genannte Gleichung zerfällt sodann in vier andere, durch deren Hülfe die in den Gleichungen der Gestalt des Fadens vorhandenen Constanten bestimmt werden können.

Man kann aber auch zu dem ersten Theile der Gleichung (3) das Glied

$$\int \varkappa (\delta z - p \delta x - q \delta y),$$

worin $\varkappa$ einen unbestimmten Multiplicator bedeutet, hinzufügen, und sodann die Coefficienten von δx, δy, δz unter dem Integralzeichen gleich Null setzen, wodurch man die Gleichungen

$$(16) \quad \begin{aligned} \mu X ds - d\frac{\lambda dx}{ds} - \varkappa p &= 0, \\ \mu Y ds - d\frac{\lambda dy}{ds} - \varkappa q &= 0, \\ \mu Z ds - d\frac{\lambda dz}{ds} + \varkappa &= 0 \end{aligned}$$

bekömmt. Eliminirt man aus denselben den Multiplicator $\varkappa$, so hat man die Gleichungen (15) vor sich. Die Kenntniß der Größe $\varkappa$ verschafft uns aber den Vortheil, den Druck angeben zu können, welchen der Faden vermöge seiner Spannung in jedem einzelnen Puncte auf die Fläche $dz = p\,dx + q\,dy$ ausübt. Die Größe dieses Druckes wird nämlich für das Element ds durch das Product $\varkappa\sqrt{p^2 + q^2 + 1}$, folglich für den Punct x, y, z durch $\frac{\varkappa\sqrt{p^2+q^2+1}}{ds}$, d. h. mit Rücksicht auf obige Gleichungen (16) durch

$$\frac{\sqrt{\left(\mu X ds - d\frac{\lambda dx}{ds}\right)^2 + \left(\mu Y ds - d\frac{\lambda dy}{ds}\right)^2 + \left(\mu Z ds - d\frac{\lambda dz}{ds}\right)^2}}{ds}$$

ausgedrückt.

Wird der Faden bloß durch die an seinen Endpuncten angebrachten Kräfte über die gegebene Fläche gespannt, ohne in seinen übrigen Puncten durch Kräfte afficirt zu werden, so haben wir $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, daher wegen (15), woraus ebenfalls (10) folgt,

$$d\lambda = 0, \quad \text{d. h.} \quad \lambda = \text{einer Constanten.}$$

Hieraus erhellet, daß der Faden in allen Puncten gleich stark gespannt ist. Ferner geben uns die Gleichungen (15) für die Gestalt des Fadens

$$\frac{dx}{ds} + p\frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{dy}{ds} + q\frac{dz}{ds} = 0,$$

welche Gleichungen (neun und zwanzigste Vorlesung über die Geometrie) der kürzesten Linie gehören, welche man auf der Fläche zwischen den Endpuncten des Fadens ziehen kann; eine Eigenschaft, die schon aus dem Umstande in die Augen fällt, daß die Gleichung (2) unter gegenwärtigen Voraussetzungen sich auf

$$\lambda \int \delta ds = 0 \quad \text{oder} \quad \delta s = 0$$

reducirt. Der Druck, welchen die Fläche $dz = p dx + q dy$ vom Puncte x, y, z des Fadens erleidet, ist

$$= \frac{\lambda \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}{ds};$$

oder, wenn ρ den diesem Puncte entsprechenden Krümmungshalbmesser des Fadens vorstellt, $= \frac{\lambda}{\rho}$; dieser Druck steht also mit der Spannung des Fadens im geraden, und mit dem Halbmesser seiner Krümmung an jedem einzelnen Orte im verkehrten Verhältnisse.

Ist der Faden einer Verlängerung oder Verkürzung fähig, und ist ε die Kraft, mit welcher sich das Theilchen ds desselben auszudehnen oder zusammenzuziehen strebt, so muß, da man ε als eine nach der Tangente des Fadens gerichtete Kraft betrachten kann, zu den Momenten der Kräfte, welche auf ds wirken, noch $\varepsilon \delta ds$, folglich zu der Summe aller noch das Integral $\int \varepsilon \delta ds$ hinzukommen. Hiedurch wird die Rechnung für gegenwärtigen Fall, von jener, welche für einen unausdehnbaren Faden dient, bloß darin verschieden, daß überall ε statt λ vorkommt, und bedarf somit keiner eigenen Erläuterung.

Zwölfte Vorlesung.

Über die Kettenlinie.

Das Problem, die Gestalt der Curve zu finden, welche ein vollkommen biegsamer, unausdehnbarer, gleichförmig dicker, an seinen Endpuncten aufgehängter Faden vermöge der Schwere darstellt, ist nur ein besonderer Fall des in der vorhergehenden Vorlesung betrachteten. Man nennt diese Curve die Kettenlinie.

Nehmen wir die Axe der y vertical und der Richtung der Schwere entgegengesetzt an, und bezeichnen wir die Kraft, mit welcher die Schwere die Einheit der Massen afficirt, d. i. das Gewicht der Einheit der Massen, durch g, so ist

$$X = o, \quad Y = -g, \quad Z = o.$$

Die Größe, welche wir in der vorhergehenden Vorlesung μ genannt haben, ist in dem gegenwärtigen Falle constant, folglich geben uns die Gleichungen (6)

$$\frac{\lambda dx}{ds} = A, \quad \frac{\lambda dy}{ds} = B - \mu g s, \quad \frac{\lambda dz}{ds} = C.$$

Eliminiren wir λ aus der ersten und letzten Gleichung, so haben wir

$$A dz - C dx = o,$$

$$\text{woraus} \quad Az - Cx = D$$

folgt, wenn nämlich D eine constante Größe vorstellt. Da dieß die Gleichung einer mit der Axe der y parallelen, mithin verticalen Ebene ist, so befindet sich die verlangte Curve ganz in dieser Ebene.

Wählen wir die Ebene der Curve selbst zur Ebene der xy, so wird für alle Puncte der Curve $z = o$, und die obigen Gleichungen reduciren sich bloß auf folgende zwei:

$$\frac{\lambda dx}{ds} = A, \quad \frac{\lambda dy}{ds} = B - \mu g s,$$

wobei $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist.

Um die Rechnung möglichst zu vereinfachen, sey der tiefste Punct der Curve der Anfangspunct der Coordinaten, also die Axe der x eine Tangente der Curve in diesem Puncte, so ist für diesen Punct $\frac{dx}{ds} = 1$, und daher die Constante A dem diesem Puncte zugehörigen

Werthe von λ gleich. Da λ eine der Richtung von ds entgegen wirkende Kraft vorstellt, so wollen wir den dem Anfangspuncte der Coordinaten entsprechenden Werth dieser Größe durch $-a$ andeuten, folglich

$$(1) \qquad \frac{\lambda\, dx}{ds} = -a$$

setzen.

Für den Anfangspunct der Coordinaten ist ferner $\frac{dy}{ds} = 0$; und in so ferne jeder Bogen s der Curve vom Anfangspuncte der Coordinaten an gerechnet wird, auch $s = 0$, daher finden wir $B = 0$, folglich

$$(2) \qquad \frac{\lambda\, dy}{ds} = -\mu g s.$$

Verbinden wir die Gleichungen (1) und (2) durch Elimination von λ, so ergibt sich

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\mu g s}{a},$$

welches die Differenzialgleichung der Kettenlinie ist. Aus derselben ersehen wir, daß die trigonometrische Tangente des Winkels, unter welchem die zu irgend einem Puncte der Kettenlinie gezogene Berührungslinie gegen die zu dem tiefsten Puncte dieser Curve geführte Berührungslinie geneigt ist, mit der Länge des zwischen beiden Puncten enthaltenen Bogens im geraden Verhältnisse steht.

Quadriren wir die Gleichungen (1) und (2), und nehmen wir ihre Summe, so erhalten wir

$$(4) \qquad \lambda = -\sqrt{a^2 + \mu^2 g^2 s^2}.$$

Diese Formel gibt die Spannung, welche in jedem Puncte der Kettenlinie Statt findet, durch a und durch das Gewicht des Bogens s an.

Substituiren wir diesen Werth von λ in (1), so wird

$$dx = \frac{a\, ds}{\sqrt{a^2 + \mu^2 g^2 s^2}},$$

woraus durch Integration

$$x = \frac{a}{\mu g}\, l\left(\mu g s + \sqrt{a^2 + \mu^2 g^2 s^2}\right) + Const.$$

folgt. Da x und s zugleich verschwinden, so haben wir zur Bestim-

mung der Constante die Gleichung

$$o = \frac{a}{\mu g}\, l\, a + Const., \text{ also}$$

(5) $$x = \frac{a}{\mu g}\, l\left(\frac{\mu g s + \sqrt{a^2 + \mu^2 g^2 s^2}}{a}\right).$$

Um s durch x auszudrücken, sey der Kürze wegen

$$\frac{\mu g x}{a} = \xi,$$

so erhalten wir aus (5)

$$l\left(\frac{\mu g s + \sqrt{a^2 + \mu^2 g^2 s^2}}{a}\right) = \xi,$$

folglich $$\frac{\mu g s + \sqrt{a^2 + \mu^2 g^2 s^2}}{a} = e^{\xi} \text{ und}$$

(6) $$s = \frac{a\,(e^{2\xi} - 1)}{2 \mu g e^{\xi}}.$$

Es läßt sich also die Kettenlinie rectificiren. Die Gleichung zwischen s und y hat eine einfachere Form. Man erhält sie durch Verbindung von (4) mit (2), woraus

$$dy = \frac{\mu g s\, ds}{\sqrt{a^2 + \mu^2 g^2 s^2}}$$

und $$y = \frac{1}{\mu g}\sqrt{a^2 + \mu^2 g^2 s^2} + Const.,$$

oder wegen $o = \frac{a}{\mu g} + Const.$

(7) $$y = \frac{\sqrt{a^2 + \mu^2 g^2 s^2} - a}{\mu g}$$

folgt. Drückt man aber s durch y aus, so ergibt sich

(8) $$s = \frac{\sqrt{2 \mu g a y + \mu^2 g^2 y^2}}{\mu g} = \sqrt{\frac{2 a y + \mu g y^2}{\mu g}}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck für s in (5), so erhält man

(9) $$x = \frac{a}{\mu g}\, l\left(\frac{a + \mu g y + \sqrt{2 \mu g a y + \mu^2 g^2 y^2}}{a}\right),$$

welches die Gleichung der Kettenlinie selbst ist. Verbindet man aber (6) mit (7), so erscheint y als eine Function von x.

Will man die Gleichung der Kettenlinie durch Integration der Differenzialgleichung (3) erhalten, so muß man dieselbe wegen der An-

wesenheit von s zuerst differenziren, und $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ statt ds setzen. Man findet, wenn man bei dem Differenziren dx als constant betrachtet,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu g}{a}\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

und wenn man $\frac{dy}{dx}$ durch p vorstellt:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p\,dp}{dy} = \frac{\mu g\sqrt{1+p^2}}{a},$$

$$\text{woraus}\quad dy = \frac{a p\,dp}{\mu g\sqrt{1+p^2}}$$

$$\text{und}\quad y = \frac{a}{\mu g}\sqrt{1+p^2} + Const.$$

folgt. Für $y=0$ wird offenbar $p=0$; es ist demnach

$$y = \frac{a}{\mu g}(\sqrt{1+p^2} - 1),$$

$$\text{daher}\quad ap = \sqrt{2\mu g a y + \mu^2 g^2 y^2}\quad\text{und}$$

$$(10)\qquad dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{2\mu g a y + \mu^2 g^2 y^2}}.$$

Wird diese Gleichung integrirt, so erhält man die Gleichung (9).

Die Gleichung der Kettenlinie läßt sich noch auf einem anderen Wege herleiten, welchen ein allgemeiner Lehrsatz der Statik, den wir sogleich begründen wollen, eröffnet.

Es seyen nämlich $P_1, P_2, P_3, \ldots$ die auf irgend ein System materieller Puncte wirkenden Kräfte; $p_1, p_2, p_3, \ldots$ beziehungsweise von ihren Angriffspuncten anfangende Stücke ihrer rückwärts verlängerten Richtungen, und diese Kräfte so beschaffen, daß die Differenzialformel

$$P_1 dp_1 + P_2 dp_2 + P_3 dp_3 + \ldots$$

integrabel ist, was insbesondere immer Statt findet, wenn $P_1, P_2, P_3, \ldots$ als Functionen der zugehörigen Linien $p_1, p_2, p_3, \ldots$ gegeben sind, so besteht, wenn wir das Integral dieser Differenzialformel $\mathfrak{P}$ nennen, sobald die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte sich befinden, dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten gemäß, die Gleichung

$$\delta\mathfrak{P} = 0;$$

und umgekehrt, leisten die gegebenen Kräfte dieser Gleichung Genüge, so herrscht unter denselben Gleichgewicht.

Aber $\delta\mathfrak{P} = 0$ ist die Bedingung, unter welcher die Function $\mathfrak{P}$ im Zustande des Maximums oder Minimums erscheint; sobald also diese Function ein Größtes oder Kleinstes wird, halten sich die gegebenen Kräfte das Gleichgewicht. Da jedoch nicht jederzeit, wenn $\delta\mathfrak{P}$ verschwindet, $\mathfrak{P}$ einen größten oder kleinsten Werth erhält, so darf man diesen Satz nicht unbedingt umkehren, sondern dieses kann nur dann geschehen, wenn aus der Form der Function $\mathfrak{P}$ erhellet, daß die Gleichung $\delta\mathfrak{P} = 0$ stets ein Maximum oder Minimum derselben zur Folge habe:

Sind die Intensitäten der Kräfte P_1, P_2, P_3, ... constant, so ist

$$\mathfrak{P} = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \ldots + Const.;$$

sind überdieß die Richtungen dieser Kräfte parallel, und z_1, z_2, z_3, ... die Abstände ihrer Angriffspuncte von einer fixen diese Richtungen senkrecht durchschneidenden Ebene, so kann man offenbar

$$p_1 = a_1 \pm z_1,\quad p_2 = a_2 \pm z_2,\quad p_3 = a_3 \pm z_3, \ldots$$

setzen, wobei a_1, a_2, a_3, ... beständige Größen anzeigen, und die Verbindung beider Glieder in Bezug auf entgegengesetzt wirkende Kräfte durch entgegengesetzte Zeichen erfolgt: mithin ist, in so ferne man entgegengesetzte Kräfte als entgegengesetzte Größen betrachtet,

$$\mathfrak{P} = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + \ldots + Const.$$

Nehmen wir nun an, die Summe $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$ sey von der Nulle verschieden, in welchem Falle es für die vorhandenen parallelen Kräfte einen Mittelpunct gibt, und bezeichnen wir den Abstand desselben von der fixen Ebene durch $\mathfrak{z}$, so haben wir, einem in der neunten Vorlesung bewiesenen Satze gemäß,

$$P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + \ldots = (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots)\,\mathfrak{z},$$

folglich $\mathfrak{P} = (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots)\,\mathfrak{z} + Const.$

Diese Gleichung gibt zu erkennen, daß in dem gegenwärtigen Falle $\delta\mathfrak{P}$ nicht gleich Null seyn kann, wofern nicht auch die Gleichung $\delta\mathfrak{z} = 0$ Statt findet; halten sich also parallele Kräfte, für welche ein Mittelpunct existirt, an irgend einem Systeme materieller Puncte das Gleichgewicht, so muß dieses System sich dabei in einer solchen Lage befinden, daß die durch jede unendlich geringe Änderung dieser Lage erzeugte Variation des Abstandes seines Mittelpunctes von einer auf die Richtungen der Kräfte senkrechten Ebene verschwindet. Im Allge-

meinen ist dieser Abstand bei dem Gleichgewichte der Kräfte ein Größtes oder ein Kleinstes.

Aus dem hier Gesagten wird man nun leicht folgern, daß ein freihängender schwerer Faden stets jene Gestalt annimmt, bei welcher sein Schwerpunct den niedrigsten Stand erhält.

Nehmen wir die Axe der y vertical an, so wird der Abstand des Schwerpunctes einer gleichförmig beschwerten Curve von der Ebene xz, welche nun eine horizontale Lage hat, durch

$$\frac{\int y\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

ausgedrückt. Die Variation dieser Größe muß daher für die Kettenlinie in Bezug auf alle mit derselben gleich langen, oder einerlei $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ gebenden, Curven verschwinden, welche Bedingung, der dreißigsten Vorlesung über die analytische Geometrie zu Folge, auf die Gleichung

$$\delta\int y\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}+H\,\delta\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=0$$

führt, in welcher H eine Constante vorstellt. Aus derselben folgt

$$\int\delta\left[(y+H)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\right]=0$$

oder

$$\int\left[ds\,\delta y+(y+H)\frac{dx\,d\delta x+dy\,d\delta y+dz\,d\delta z}{ds}\right]=0,$$

wo ds statt $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ gesetzt worden ist. Integrirt man theilweise, und betrachtet man die Endpuncte der Curve als fix, so nimmt diese Gleichung die Gestalt

$$\int\left[d\left((y+H)\frac{dx}{ds}\right)\delta x+\left[d\left((y+H)\frac{dy}{ds}\right)-ds\right]\delta y\right.$$
$$\left.+\,d\left((y+H)\frac{dz}{ds}\right)\delta z\right]=0$$

an, aus welcher sich, wegen der Unabhängigkeit der Variationen der Coordinaten, die Gleichungen

$$d\left((y+H)\frac{dx}{ds}\right)=0,$$
$$d\left((y+H)\frac{dy}{ds}\right)-ds=0,$$
$$d\left((y+H)\frac{dz}{ds}\right)=0$$

ergeben. Es ist also

$$(y + H)\frac{dx}{ds} = A,$$

$$(y + H)\frac{dy}{ds} - s = B,$$

$$(y + H)\frac{dz}{ds} = C,$$

wobei A, B, C constante Größen bedeuten. Aus der ersten und dritten dieser Gleichungen folgt

$$A\,dz - C\,dx = 0,$$

woraus erhellet, daß die zu suchende Curve eine ebene ist; nehmen wir nun die Ebene derselben für jene der xy an, so fällt die dritte Gleichung weg, und ds reducirt sich auf $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Eliminiren wir aus den beiden rückständigen Gleichungen $y + H$ und ds, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s + B}{A};$$

und wenn wir den tiefsten Punct der Curve zum Anfangspunct des Bogens s wählen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{A},$$

welche Gleichung mit (3) übereinstimmt, und nach der oben ertheilten Anweisung weiter behandelt werden kann.

Zum Schlusse bemerken wir noch, daß sich jedes Problem über das Gleichgewicht einer wie immer beschaffenen Linie, deren jeder Punct von einer Kraft afficirt wird, auf die Bestimmung des relativen Maximums oder Minimums eines zwischen festgesetzten Grenzen genommenen Integrals reduciren läßt.

Denn es sey P die auf den Punct x, y, z der Linie wirkende Kraft, δp die ihr entsprechende virtuelle Geschwindigkeit, μ die Dichte des am Puncte x, y, z beginnenden Differenzials ds irgend eines Stückes dieser Linie, so muß, weil die Masse μds des erwähnten Differenzials bei allen möglichen Verschiebungen desselben ungeändert bleibt, im Falle des Gleichgewichtes sämmtlicher Kräfte, die Gleichung

$$\int[P\mu ds\,\delta p + \lambda\delta(\mu ds)] = 0$$

Statt finden. Es sey nun

$$\int P dp = \mathfrak{P},\quad \text{also}\quad P\delta p = \delta\mathfrak{P} = \frac{d\mathfrak{P}}{dx}\delta x + \frac{d\mathfrak{P}}{dy}\delta y + \frac{d\mathfrak{P}}{dz}\delta z,$$

so haben wir wegen

$$\delta(\mu ds) = ds\,\delta\mu + \mu\,\delta ds$$
$$= ds\left(\frac{d\mu}{dx}\delta x + \frac{d\mu}{dy}\delta y + \frac{d\mu}{dz}\delta z\right) + \mu\,\frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{ds}$$

nach Wegschaffung der Differenzialien der Variationen

$$\int\Big[\left(\frac{d\mathfrak{P}}{dx}\,\mu ds + \lambda\,\frac{d\mu}{dx}\,ds - d\left(\lambda\mu\,\frac{dx}{ds}\right)\right)\delta x$$
$$+ \left(\frac{d\mathfrak{P}}{dy}\,\mu ds + \lambda\,\frac{d\mu}{dy}\,ds - d\left(\lambda\mu\,\frac{dy}{ds}\right)\right)\delta y$$
$$+ \left(\frac{d\mathfrak{P}}{dz}\,\mu ds + \lambda\,\frac{d\mu}{dz}\,ds - d\left(\lambda\mu\,\frac{dz}{ds}\right)\right)\delta z\Big] = 0,$$

folglich

$$\frac{d\mathfrak{P}}{dx}\,\mu ds + \lambda\,\frac{d\mu}{dx}\,ds - d(\lambda\mu)\,\frac{dx}{ds} - \lambda\mu\,d\,\frac{dx}{ds} = 0,$$
$$\frac{d\mathfrak{P}}{dy}\,\mu ds + \lambda\,\frac{d\mu}{dy}\,ds - d(\lambda\mu)\,\frac{dy}{ds} - \lambda\mu\,d\,\frac{dy}{ds} = 0,$$
$$\frac{d\mathfrak{P}}{dz}\,\mu ds + \lambda\,\frac{d\mu}{dz}\,ds - d(\lambda\mu)\,\frac{dz}{ds} - \lambda\mu\,d\,\frac{dz}{ds} = 0.$$

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man die erste mit dx, die zweite mit dy, die dritte mit dz multiplicirt hat, so ergibt sich

$$d\mathfrak{P}\,.\,\mu ds + \lambda\,d\mu ds - d(\lambda\mu)\,ds = 0$$

oder $d\mathfrak{P}\,.\,\mu ds - \mu d\lambda ds = 0,$

d. i. $d\lambda = d\mathfrak{P}$, folglich $\lambda = \mathfrak{P} + H$,

wobei H eine Constante anzeigt. Hiedurch wird

$$\int[P\mu ds\,\delta p + \lambda\,\delta(\mu ds)] = \int[\delta\mathfrak{P}\,.\,\mu ds + \mathfrak{P}\,\delta(\mu ds) + H\,\delta(\mu ds)]$$
$$= \int[\delta(\mathfrak{P}\mu ds) + H\,\delta(\mu ds)],$$

und die Gleichung, aus welcher die Auflösung der vorgelegten Aufgabe geschöpft werden muß, hat nunmehr die Form

$$\delta\int\mathfrak{P}\mu ds + H\,\delta\int\mu ds = 0,$$

auf welche man kömmt, wenn man nach den Umständen fragt, unter welchen das Integral $\int\mathfrak{P}\mu ds$ für einen festgesetzten Werth von $\int\mu ds$ ein Größtes oder Kleinstes wird.

Dreizehnte Vorlesung.

Über das Gleichgewicht eines flüssigen Körpers.

Unter einem flüssigen Körper verstehen wir hier einen solchen, dessen Theile sich unter einander nach jeder Richtung und durch jede noch so geringe Kraft verschieben lassen.

Nehmen wir an, jeder Punct eines flüssigen Körpers werde von einer Kraft afficirt, und suchen wir die Bedingungen auf, an welche das Stattfinden des Gleichgewichtes sämmtlicher Kräfte gebunden ist.

Es seyen x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punctes der Flüssigkeit; X, Y, Z die an demselben parallel mit den Axen der genannten Coordinaten thätigen Kräfte; μ die Dichtigkeit des Theilchens $dx\,dy\,dz$, so wird die auf irgend eine unendlich geringe Verschiebung der Angriffspuncte sich beziehende Summe der Momente sämmtlicher Kräfte durch das Integral

$$(1)\qquad \int\!\!\int\!\!\int \mu (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dx\,dy\,dz$$

ausgedrückt, und dieses muß, wenn sich die Kräfte im Gleichgewichte befinden, dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten zu Folge, stets gleich Null seyn.

Setzen wir nun noch voraus, der flüssige Körper sey unzusammendrückbar, d. h. das Volum keines noch so kleinen Theiles desselben könne durch die Einwirkung der vorhandenen Kräfte geändert werden, so unterliegen die Variationen der Coordinaten jedes Punctes der Bedingung

$$(2)\qquad \delta(dx\,dy\,dz) = 0.$$

Wir haben also, der in der zehnten Vorlesung ertheilten Anweisung gemäß, die Gleichung

$$(3)\qquad \int\!\!\int\!\!\int [\mu (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dx\,dy\,dz + \lambda\,\delta(dx\,dy\,dz)] = 0$$

zu betrachten, in welcher λ einen bis jetzt noch unbestimmten Multiplicator vorstellt.

Da die der Gleichung (3) zum Grunde liegende Verrückung aller Puncte des flüssigen Körpers eine Änderung der Gestalt des rechtwinkligen Parallelepipeds $dx\,dy\,dz$ zur Folge haben kann, so müssen wir, um die Variation $\delta(dx\,dy\,dz)$ kennen zu lernen, das Volum

des Theilchens $\mu dx dy dz$ nach der vorgenommenen Verschiebung bestimmen, und das frühere Volum desselben von dem neuerlangten abziehen.

Die Coordinaten der vier Eckpuncte der zur Ebene xy parallelen Seitenfläche des Parallelepipeds sind:

$$x, \quad y, \quad z,$$
$$x + dx, \quad y, \quad z,$$
$$x, \quad y + dy, \quad z,$$
$$x + dx, \quad y + dy, \quad z.$$

Nach der Verschiebung haben dieselben Puncte die Coordinaten

$$x + \delta x, \quad y + \delta y, \quad z + \delta z,$$
$$x + dx + \delta x + \frac{d\delta x}{dx} dx, \quad y + \delta y + \frac{d\delta y}{dx} dx, \quad z + \delta z + \frac{d\delta z}{dx} dx,$$
$$x + \delta x + \frac{d\delta x}{dy} dy, \quad y + dy + \delta y + \frac{d\delta y}{dy} dy, \quad z + \delta z + \frac{d\delta z}{dy} dy,$$
$$x + dx + \delta x + \frac{d\delta x}{dx} dx + \frac{d\delta x}{dy} dy, \quad y + dy + \delta y + \frac{d\delta y}{dx} dx + \frac{d\delta y}{dy} dy,$$
$$z + \delta z + \frac{d\delta z}{dx} dx + \frac{d\delta z}{dy} dy.$$

Bezeichnen wir diese vier Puncte der Kürze wegen durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, und die Verbindungslinie zweier derselben dadurch, daß wir die correspondirenden Zahlen neben einander stellen und mit Klammern umgeben, so finden wir, da überhaupt die Distanz zweier Puncte durch die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Differenzen ihrer gleichnamigen Coordinaten ausgedrückt wird,

$$(1, 2) = dx \sqrt{\left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2},$$
$$(1, 3) = dy \sqrt{\left(\frac{d\delta x}{dy}\right)^2 + \left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dy}\right)^2},$$
$$(3, 4) = dx \sqrt{\left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2},$$
$$(2, 4) = dy \sqrt{\left(\frac{d\delta x}{dy}\right)^2 + \left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dy}\right)^2},$$

folglich $(1, 2) = (3, 4)$ und $(1, 3) = (2, 4)$,

woraus erhellet, daß die Seitenfläche $dx\, dy$ auch nach ihrer Verschiebung als ein Parallelogramm betrachtet werden darf.

Behalten wir, der Methode der Grenzen gemäß, unter dem Wur-

zelzeichen bloß die ersten Potenzen der unendlich abnehmenden Größen bei, so erhalten wir

$$(1, 2) = dx\left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\right) \text{ und } (1, 3) = dy\left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right).$$

Die Länge der Diagonale (2, 3) wird durch

$$\sqrt{\left(dx+\frac{d\delta x}{dx}dx-\frac{d\delta x}{dy}dy\right)^2+\left(dy-\frac{d\delta y}{dx}dx+\frac{d\delta y}{dy}dy\right)^2+\left(\frac{d\delta z}{dx}dx-\frac{d\delta z}{dy}dy\right)^2}$$

ausgedrückt, und der Cosinus des zwischen den Seiten (1, 2) und (1, 3) enthaltenen Winkels durch

$$\frac{(1, 2)^2 + (1, 3)^2 - (2, 3)^2}{2(1, 2) \cdot (1, 3)};$$

nennen wir nun diesen Winkel α, so erhalten wir nach gehöriger Substitution, mit Außerachtlassung der höheren Potenzen der Differenzialien,

$$\cos.\alpha = \frac{d\delta x}{dy} + \frac{d\delta y}{dx}.$$

Eben so läßt sich zeigen, daß die Seitenflächen $dx\,dz$, $dy\,dz$ des rechtwinkligen Parallelepipeds $dx\,dy\,dz$ auch nach der vorgenommenen unendlich kleinen Verschiebung als Parallelogramme betrachtet werden dürfen; es behält also das erwähnte Theilchen des flüssigen Körpers die Gestalt eines Parallelepipeds bei. Die Cosinusse der Winkel β und γ der Kanten dieses Parallelepipeds, welche mit α denselben Scheitel besitzen, werden auf ähnliche Art durch die Formeln

$$\cos.\beta = \frac{d\delta x}{dz} + \frac{d\delta z}{dx}, \quad \cos.\gamma = \frac{d\delta y}{dz} + \frac{d\delta z}{dy},$$

und die diesen Winkeln gemeinschaftliche Kante durch

$$dz\left(1 + \frac{d\delta z}{dz}\right)$$

angegeben.

Sind aber a, b, c die Längen der in einer Ecke eines Parallelepipeds zusammenstoßenden Seitenlinien, und α, β, γ die denselben gegenüber liegenden ebenen Winkel, d. h. ist α der von b und c, β der von a und c, γ der von a und b eingeschlossene Winkel, so ergibt sich für die Seitenfläche, zu welcher a und b gehören, der Ausdruck

$$ab\,\sin.\gamma,$$

und für das von dem Endpuncte der Kante c auf diese Seitenfläche fallende Perpendikel, da c $\sin.\beta$ die Länge der Senkrechten, welche

von demselben Puncte auf die Seite a geht, und $\frac{cos. a - cos. \beta \, cos. \gamma}{sin. \beta \, sin. \gamma}$ den Cosinus des Neigungswinkels der in a sich durchschneidenden Seitenflächen anzeigt, der Ausdruck

$$c \, sin. \beta \sqrt{1 - \left(\frac{cos. a - cos. \beta \, cos. \gamma}{sin. \beta \, sin. \gamma}\right)^2};$$

mithin ist der körperliche Inhalt des Parallelepipeds

$$= a b \, sin. \gamma \times c \, sin. \beta \sqrt{1 - \left(\frac{cos. a - cos. \beta \, cos. \gamma}{sin. \beta \, sin. \gamma}\right)^2}$$

$$= a b c \sqrt{sin. \beta^2 \, sin. \gamma^2 - (cos. a - cos. \beta \, cos. \gamma)^2}$$

$$= a b c \sqrt{(1 - cos. \beta^2)(1 - cos. \gamma^2) - (cos. a - cos. \beta \, cos. \gamma)^2}$$

$$= a b c \sqrt{1 - cos. a^2 - cos. \beta^2 - cos. \gamma^2 + 2 \, cos. a \, cos. \beta \, cos. \gamma}.$$

Setzt man in dieser Formel statt a, b, c die oben angegebenen Werthe der Seitenlinien des nach der Verschiebung der Theilchen der Flüssigkeit vorhandenen unendlich kleinen Parallelepipeds, und statt $cos. \alpha$, $cos. \beta$, $cos. \gamma$ die zugehörigen Ausdrücke, so findet man die Größe dieses Parallelepipeds

$$= dx \, dy \, dz \left(1 + \frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right);$$

und, wenn man davon die Größe der ursprünglichen Gestalt desselben, nämlich $dx \, dy \, dz$, abzieht,

(4) $$\delta(dx \, dy \, dz) = dx \, dy \, dz \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right).$$

Wollte man die Variationen δx, δy, δz beziehungsweise bloß als Functionen von x, y, z betrachten, so würde durch die Verschiebung nach der Richtung der x bloß dx, nach der Richtung der y bloß dy, und nach der Richtung der z bloß dz geändert werden; das Parallelepiped bliebe somit rechtwinklig, wie zuvor, und man fände, nach der für die Differenziation eines Productes geltenden Regel,

$$\delta(dx dy dz) = dy dz \frac{d\delta x}{dx} dx + dx dz \frac{d\delta y}{dy} dy + dx dy \frac{d\delta z}{dz} dz.$$

Da nun dieser Ausdruck mit (4) genau übereinstimmt, so sieht man, daß es, ohne der Allgemeinheit unserer Untersuchung zu schaden, angeht, δx bloß als eine Function von x, und eben so δy, δz bloß als Functionen von y, z zu behandeln.

Mit Rücksicht auf (4) verwandelt sich die Gleichung (3) in

$$(5) \int\int\int \left[\mu(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)+\lambda\left(\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right)\right]dx\,dy\,dz=0.$$

Bezeichnen wir alle auf den Anfang eines Integrals sich beziehenden Größen durch Beisetzung des Zeigers 1, und alle auf das Ende desselben sich beziehenden durch Beisetzung des Zeigers 2, so gibt uns die Formel $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, wenn wir in Bezug auf x integriren:

$$\int\int\int \lambda \frac{d\delta x}{dx}\,dx\,dy\,dz = \int\int(\lambda_2\delta x_2 - \lambda_1\delta x_1)\,dy\,dz - \int\int\int \frac{d\lambda}{dx}\,dx\,dy\,dz\,\delta x.$$

Eben so erhalten wir durch Integrationen hinsichtlich der Variablen y und z,

$$\int\int\int \lambda \frac{d\delta y}{dy}\,dx\,dy\,dz = \int\int(\lambda_2\delta y_2 - \lambda_1\delta y_1)\,dx\,dz - \int\int\int \frac{d\lambda}{dy}\,dx\,dy\,dz\,\delta y,$$

$$\int\int\int \lambda \frac{d\delta z}{dz}\,dx\,dy\,dz = \int\int(\lambda_2\delta z_2 - \lambda_1\delta z_1)\,dx\,dy - \int\int\int \frac{d\lambda}{dz}\,dx\,dy\,dz\,\delta z,$$

daher geht die Gleichung (5) in

$$(6) \quad \int\int(\lambda_2\delta x_2 - \lambda_1\delta x_1)\,dy\,dz + \int\int(\lambda_2\delta y_2 - \lambda_1\delta y_1)\,dx\,dz + \int\int(\lambda_2\delta z_2 - \lambda_1\delta z_1)\,dx\,dy$$
$$+ \int\int\int\left[\left(\mu X - \frac{d\lambda}{dx}\right)\delta x + \left(\mu Y - \frac{d\lambda}{dy}\right)\delta y + \left(\mu Z - \frac{d\lambda}{dz}\right)\delta z\right]dx\,dy\,dz = 0$$

über, in welcher die Summe aller zweifachen Integralien für sich, und das dreifache Integral ebenfalls für sich verschwindet. Das letztere gibt uns die Gleichungen

$$(7) \quad \mu X - \frac{d\lambda}{dx} = 0, \quad \mu Y - \frac{d\lambda}{dy} = 0, \quad \mu Z - \frac{d\lambda}{dz} = 0,$$

welche, wenn anders Gleichgewicht Statt finden soll, für jeden Punct des flüssigen Körpers gelten müssen.

Aus denselben folgt

$$(8) \qquad \frac{d\lambda}{dx} = \mu X, \quad \frac{d\lambda}{dy} = \mu Y, \quad \frac{d\lambda}{dz} = \mu Z;$$

es ist aber $d\lambda = \frac{d\lambda}{dx}dx + \frac{d\lambda}{dy}dy + \frac{d\lambda}{dz}dz$, daher

$$(9) \qquad d\lambda = \mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Sind nun X, Y, Z gegebene Functionen von x, y, z, wie

wir es hier voraussetzen wollen, so muß der Ausdruck

$$(10) \qquad \mu(Xdx + Ydy + Zdz),$$

der so eben gefundenen Gleichung zu Folge, eine integrable Differenzialformel seyn; eine Bedingung, welche dem Inbegriffe der Gleichungen (7) völlig gleich gilt, deren Erfüllung das Gleichgewicht des flüssigen Körpers zur nothwendigen Folge hat.

Man überzeugt sich hievon auch, wenn man aus (8) mit Hülfe der Gleichungen

$$\frac{d\frac{d\lambda}{dx}}{dy} = \frac{d\frac{d\lambda}{dy}}{dx}, \quad \frac{d\frac{d\lambda}{dx}}{dz} = \frac{d\frac{d\lambda}{dz}}{dx}, \quad \frac{d\frac{d\lambda}{dy}}{dz} = \frac{d\frac{d\lambda}{dz}}{dy}$$

λ eliminirt. Man findet hiedurch

$$\frac{d(\mu X)}{dy} = \frac{d(\mu Y)}{dx}, \quad \frac{d(\mu X)}{dz} = \frac{d(\mu Z)}{dx}, \quad \frac{d(\mu Y)}{dz} = \frac{d(\mu Z)}{dy},$$

welche Gleichungen offenbar die Bedingungen der Integrabilität der Differenzialformel (10) aussprechen.

Die Gleichung (3) gibt uns zu erkennen, daß λ die Kraft vorstellt, welche durch das Zusammenwirken aller vorhandenen Kräfte auf das Theilchen $dx\,dy\,dz$ ausgeübt wird, d. h. den Druck, welchen dieses Theilchen auszuhalten hat. Es wird also dieser Druck durch das Integral

$$(11) \qquad \lambda = \int \mu(Xdx + Ydy + Zdz)$$

gegeben, und läßt sich daher immer in einer endlichen Function der Coordinaten des genannten Theilchens darstellen.

Wie die durch die Integration herbeigeführte Constante zu bestimmen ist, wird aus nachstehenden Bemerkungen erhellen.

So oft von dem Gleichgewichte der an einem flüssigen unzusammendrückbaren Körper thätigen Kräfte die Rede ist, nimmt man an, derselbe sey wenigstens zum Theile mit einer freien, d. i. nicht durch die Wände eines Gefäßes begrenzten Oberfläche versehen. Aber für die Puncte einer solchen Oberfläche sind die Variationen der Coordinaten willkürlich, daher müssen, um die Summe der zweifachen Integralien in der Gleichung (6) auf Null zu reduciren, ihre Coefficienten verschwinden. Hieraus folgt, daß für jeden Punct eines freien Theiles der Oberfläche eines flüssigen Körpers $\lambda = 0$ ist, wie es auch die Natur der Sache mit sich bringt. Man kennt also einen speciellen Werth

von λ, und ist daher im Stande, die Bestimmung der erwähnten Constante vorzunehmen.

Setzen wir $\int \mu (X dx + Y dy + Z dz) = F(x, y, z)$, und jene Constante $= K$, so haben wir

(12) $$\lambda = F(x, y, z) + K.$$

Dieselbe Bemerkung verschafft uns die Gleichung der Gestalt der freien Oberfläche der Flüssigkeit. Sie ist nämlich

(13) $$F(x, y, z) + K = 0.$$

Setzen wir λ gleich einer Constanten H, so erhalten wir die Gleichung einer Fläche, nämlich

(14) $$F(x, y, z) + K - H = 0,$$

in der alle Puncte der Flüssigkeit liegen, welche den Druck H erleiden. Lassen wir ferner H stufenweise alle Werthe annehmen, deren die Größe λ in Bezug auf die verschiedenen Theilchen des flüssigen Körpers fähig ist, so geht aus (14) eine Reihe von Flächen hervor, welche den Körper in Schichten von unendlich geringer Dicke dergestalt abtheilen, daß die innerhalb jeder einzelnen vorfindigen Theilchen denselben Druck auszuhalten haben. Da

$\mu(X dx + Y dy + Z dz) = 0$ oder $X dx + Y dy + Z dz = 0$

die gemeinschaftliche Differenzialgleichung aller dieser Flächen ist, und die Cosinusse der Winkel, welche die Richtung der Resultirenden $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ der an dem Puncte x, y, z angebrachten Kräfte X, Y, Z mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z bildet, durch

$$\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

ausgedrückt werden, so sieht man zugleich, daß diese Richtung auf der durch den Punct x, y, z gehenden der genannten Flächen normal steht.

Nehmen wir nun an, $X dx + Y dy + Z dz$ sey, für sich allein betrachtet, eine integrable Differenzialformel (eine Voraussetzung, welche wir hinsichtlich aller in der Natur thätigen Kräfte machen dürfen, da dieselben stets Functionen der Entfernungen ihrer Angriffspuncte von gewissen in ihren Richtungen befindlichen fixen Puncten sind, daher $X dx + Y dy + Z dz$ in eine Summe von Differenzialformeln von der Gestalt $P dp$, wobei P eine Function von p anzeigt, transformirt werden kann), und setzen wir

$$Xdx + Ydy + Zdz = du,$$

so haben wir

$$d\lambda = \mu du.$$

Soll diese Differenzialformel integrirt werden können, so muß μ als eine Function der Variablen u erscheinen, wodurch auch λ sich als eine Function derselben Variablen darstellt. Hieraus folgt, daß in dem gegenwärtigen Falle λ eine Function von μ ist, d. h. daß λ und μ zugleich constant und zugleich variabel sind; es herrscht daher in jeder der oben erwähnten Schichten des flüssigen Körpers, deren Theilchen einerlei Druck erleiden, auch einerlei Dichtigkeit.

Wirkt auf die Theilchen der Flüssigkeit außer der Schwere keine andere Kraft, und lassen wir die Axe der z der Richtung der Schwere parallel seyn, so haben wir, wenn g die Intensität derselben anzeigt,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g,$$

folglich $du = gdz$ und $u = gz + Const.$

Es ist demnach die Oberfläche der Flüssigkeit, wie auch der geometrische Ort aller gleich stark gedrückter Puncte eine auf die Richtung der Schwere senkrechte Ebene. Besitzt die Flüssigkeit überall einerlei Dichtigkeit, so steht der auf jedes einzelne Theilchen ausgeübte Druck im geraden Verhältnisse mit der Entfernung desselben von der freien Oberfläche der Flüssigkeit.

Bei der Untersuchung des Gleichgewichtes eines ausdehnsamflüssigen Körpers, eines solchen nämlich, dessen Theilchen sich zusammendrücken lassen, aber dabei ein fortwährendes Bestreben zeigen, sich auszudehnen, kömmt man ebenfalls auf die Gleichung (3), nur zeigt jetzt λ die Kraft an, mit welcher jedes Theilchen sein Volum zu erweitern sich bemüht. Es gelten daher auch hier die für das Gleichgewicht der unzusammendrückbaren Flüssigkeiten gefundenen Gesetze, nur kann bei ausdehnsamen Flüssigkeiten von keiner freien Oberfläche die Rede seyn.

Ist die Expansivkraft eines ausdehnsamen Körpers seiner Dichtigkeit direct proportionirt, d. h. hat λ die Form $\varkappa\mu$, wobei $\varkappa$ einen von μ unabhängigen Coefficienten vorstellt, so gibt uns die Gleichung (9)

$$(15) \qquad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\varkappa}(Xdx + Ydy + Zdz),$$

woraus folgt, daß für den Fall des Gleichgewichtes der Kräfte die

Differenzialformel $\frac{1}{\varkappa}(Xdx + Ydy + Zdz)$ integrabel seyn muß. Läßt $Xdx + Ydy + Zdz$ für sich allein ein Integral zu, so muß $\varkappa$ als eine Function dieses Integrals dargestellt werden können, und daher ist auch λ eine Function von $\varkappa$. Für alle Puncte einer Schichte des ausdehnsamen Körpers, innerhalb welcher derselbe Druck herrscht, besitzen demnach alle Größen, von denen der Coefficient $\varkappa$ abhängt, einerlei Werthe. Dieß gilt bei den in der Natur vorhandenen ausdehnsamen Körpern insbesondere von der Temperatur, welche die jedesmalige Beschaffenheit des genannten Coefficienten bedingt. Nehmen wir $\varkappa$ als constant an, und behalten wir die obige Bedeutung von u bei, so folgt aus (15)

$$l\lambda = \frac{u}{\varkappa} + lA \quad \text{oder} \quad \lambda = AC^{\frac{u}{\varkappa}},$$

wobei A eine beständige Größe andeutet.

Vierzehnte Vorlesung.

Über das Gleichgewicht eines flüssigen Körpers.

(Fortsetzung.)

Es erübriget uns noch die Betrachtung der Gleichung

$$(16)\quad \int\!\!\int(\lambda_2\delta x_2 - \lambda_1\delta x_1)\,dy\,dz + \int\!\!\int(\lambda_2\delta y_2 - \lambda_1\delta y_1)\,dx\,dz + \int\!\!\int(\lambda_2\delta z_2 - \lambda_1\delta z_1)\,dx\,dy = 0,$$

welche uns die dem dreifachen Integral in der Gleichung (6) vorangehenden Glieder darbieten, und worin die doppelten Integrationen über die ganze Oberfläche des flüssigen Körpers auszudehnen sind.

Da x_1 und x_2 die Werthe anzeigen, welche die Coordinate x für die einem und demselben y und z entsprechenden Puncte der Oberfläche der Flüssigkeit besitzt, und die Richtungen der Kräfte λ_1 und λ_2 in Hinsicht auf jene der positiven x offenbar eine entgegengesetzte Anordnung haben, folglich dem Producte $\lambda\delta x$ für die erwähnten Puncte entgegengesetzte Zeichen gehören, so ist $\lambda_2\delta x_2 - \lambda_1\delta x_1$ die Summe der Werthe des Productes $\lambda\delta x$ für diese Puncte. Man kann sich daher damit begnügen, statt $\int\!\!\int(\lambda_2\delta x_2 - \lambda_1\delta x_1)\,dy\,dz$ bloß $\int\!\!\int\lambda\delta x\,dy\,dz$ zu schreiben, vorausgesetzt, daß man unter x, y, z die Coordinaten eines Punctes der Oberfläche des flüssigen Körpers versteht, und das Integral über die gesammte Oberfläche desselben ausdehnt. Ein Gleiches gilt auch von den beiden anderen Integralien; die Gleichung (16) kann also unter der kürzeren Form

$$(17)\quad \int\!\!\int\lambda\delta x\,dy\,dz + \int\!\!\int\lambda\delta y\,dx\,dz + \int\!\!\int\lambda\delta z\,dx\,dy = 0$$

dargestellt werden.

Wir wollen nun in letzterer Gleichung die Verschiedenheit der Producte der Differenzialien der Coordinaten durch Einführung des denselben entsprechenden Differenzials der Oberfläche der Flüssigkeit aufheben. Bezeichnen wir nämlich das dem Puncte x, y, z zugehörige Differenzial der genannten Oberfläche, welches seinem Wesen zu Folge das Resultat der auf zwei verschiedene der Variablen x, y, z sich beziehenden Differenziationen ist, durch $\frac{d^2 S}{dx\,dy}dx\,dy$, so haben wir, da die Rechtecke $dx\,dy$, $dx\,dz$, $dy\,dz$ die Projectionen desselben auf die Ebenen xy, xz, yz sind, und, wenn wir die Differenzialglei-

chung der genannten Oberfläche durch $dz = p\,dx + q\,dy$ andeuten,

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \; -\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \; -\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

die Cosinusse der Neigungen dieses Differenzials gegen die erwähnten coordinirten Ebenen ausdrücken,

$$dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \cdot \frac{d^2 S}{dx\,dy}\,dx\,dy,$$

$$dx\,dz = -\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \cdot \frac{d^2 S}{dx\,dy}\,dx\,dy,$$

$$dy\,dz = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \cdot \frac{d^2 S}{dx\,dy}\,dx\,dy.$$

Hiedurch geht die Gleichung (17) in

$$(18) \quad \iint \frac{\lambda(\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \cdot \frac{d^2 S}{dx\,dy}\,dx\,dy = 0$$

über.

Ist der Theil der Oberfläche der Flüssigkeit, in welchem sich der Punct x, y, z befindet, wie es bei unzusammendrückbaren Flüssigkeiten der Fall zu seyn pflegt, frei, so sind die Variationen δx, δy, δz willkürliche Größen, und es muß, um dieser Gleichung Genüge zu leisten, λ verschwinden, was wir bereits in der vorhergehenden Vorlesung bemerkt haben. Grenzt aber dieser Theil der Oberfläche der Flüssigkeit an eine feste Wand, oder an einen in die Flüssigkeit getauchten festen Körper, so müssen die Variationen der Coordinaten offenbar der Gleichung dieser Wand, oder des Theiles der Oberfläche des festen Körpers, welcher von der Flüssigkeit berührt wird, entsprechen, und daher muß, da dieselbe Gleichung auch dem erwähnten Theile der Oberfläche der Flüssigkeit angehört, die Gleichung

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$$

Statt finden, wodurch die Gleichung (18) erfüllt wird, ohne daß der genannte Umstand eine neue Bedingung herbeiführt.

Es fällt übrigens in die Augen, daß das Product

$$\frac{\lambda(\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

das Moment einer in dem Puncte x, y, z auf die Fläche $dz = p\,dx + q\,dy$ normal wirkenden Kraft anzeigt, woraus erhellet, daß jeder Punct einer die Flüssigkeit begrenzenden Wand, oder des in dieselbe getauchten

Theiles eines festen Körpers von der Flüssigkeit einen normalen Druck erleidet, dessen Größe durch den diesem Puncte correspondirenden Werth von λ bestimmt wird.

Ist eine Wand des eine Flüssigkeit enthaltenden Gefäßes eben, so sind die Richtungen der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf sämmtliche Puncte dieser Wand ausübt, einander parallel, und ihre Gesammtwirkung wird durch das Integral

$$\int\int \lambda \frac{d^2 S}{dx\, dy}\, dx\, dy,$$

in so ferne man dasselbe über die ganze Wand ausdehnt, angegeben.

Befindet sich z. B. eine unzusammendrückbare, durchgehends gleich dichte, bloß von der Schwere afficirte Flüssigkeit in einem mit einer ebenen Seitenwand (oder auch, wenn man will, mit einem ebenen, horizontalen oder geneigten Boden) versehenen Gefäße, so ist, wenn wir die Oberfläche der Flüssigkeit für die Ebene der xy gelten lassen, und das Gewicht der Flüssigkeit unter der Einheit des Volums durch g anzeigen,

$$\lambda = g z,$$

folglich der Gesammtdruck auf die erwähnte Wand

$$= g \int\int z \frac{d^2 S}{dx\, dy}\, dx\, dy.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernung des Schwerpunctes der Fläche der Wand von der Oberfläche der Flüssigkeit durch $\mathfrak{z}$, und die Größe der Wand durch S, so ist, der Theorie der parallelen Kräfte gemäß:

$$\int\int z \frac{d^2 S}{dx\, dy}\, dx\, dy = S\mathfrak{z},$$

also der auf die Wand von der Flüssigkeit ausgeübte Druck $= gS\mathfrak{z}$; d. h. eine schwere, homogene, unzusammendrückbare Flüssigkeit wirkt auf eine ebene Wand des Gefäßes, in welches sie eingeschlossen ist, mit dem Gewichte einer Säule derselben Flüssigkeit, welche diese Wand zur Basis, und die Entfernung des Schwerpunctes der Wand von der Oberfläche der Flüssigkeit zur Höhe hätte. Es verändert sich also dieser Druck nicht, wenn die Neigung der Wand gegen den Horizont sich ändert, ohne ihre Größe und die Position ihres Schwerpunctes zu verändern.

Das Gleichgewicht flüssiger Körper läßt sich oft mit Vortheil auch aus einem anderen Gesichtspuncte, als es in der vorhergehenden Vorlesung geschehen ist, betrachten.

Wenn nämlich ein flüssiger Körper sich im Zustande des Gleichgewichtes befindet, so muß in jedem Theile desselben, welchen man durch unverrückbare Wände von der übrigen Flüssigkeit absondert, vermöge der diesem Theile entsprechenden Kräfte Gleichgewicht herrschen. Der Widerstand dieser Wände hebt nämlich das Bestreben des genannten Theiles des flüssigen Körpers, seine Lage zu verändern, eben so auf, wie die Gegenwirkung der ihn umgebenden Flüssigkeit. Und umgekehrt, wenn jeder wie immer durch feste Wände begrenzte Theil einer Flüssigkeit für sich im Gleichgewichte ist, so findet auch in der gesammten Masse Gleichgewicht Statt.

Es ist daher zur Entscheidung über das Gleichgewicht einer von beliebigen Kräften afficirten Flüssigkeit hinreichend, den Zustand eines von dieser Flüssigkeit abgesonderten, entweder in sich selbst zurückkehrenden, oder an freien Theilen der Oberfläche derselben sich endigenden Canals von unendlich geringem Durchmesser, aber sonst von völlig unbestimmter Gestalt, in Erwägung zu ziehen.

Von dieser Ansicht ausgehend, gelangt man mit Leichtigkeit zu den in der vorhergehenden Vorlesung erhaltenen Resultaten. Es seyen x, y, z die Coordinaten eines Punctes eines solchen Canals; X, Y, Z die an demselben nach den Richtungen dieser Coordinaten thätigen Kräfte; ω der unendlich kleine Flächeninhalt eines durch den Punct x, y, z auf die Curve, nach welcher der Canal gestaltet ist, senkrecht geführten Querschnittes; ds das eben demselben Puncte entsprechende Differenzial eines Bogens dieser Curve, also $\mu\omega ds$ das Differenzial des Volums des Canals; und endlich μ die Dichtigkeit der in diesem Differenzial enthaltenen Flüssigkeit, so wird zum Stattfinden des Gleichgewichtes in dem genannten Canale erfordert, daß die Gleichung

$$\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,\mu\omega ds = 0$$

bestehe, in welcher die Integration auf den ganzen Canal auszudehnen ist.

Um aus dieser Gleichung die Bedingung des Gleichgewichtes einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit abzuleiten, bedenke man, daß die Variationen δx, δy, δz an die Gleichung der Curve, welche der Canal darstellt, gebunden sind, daher

$$\frac{\delta x}{\delta s} = \frac{dx}{ds},\quad \frac{\delta y}{\delta s} = \frac{dy}{ds},\quad \frac{\delta z}{\delta s} = \frac{dz}{ds}$$

ist, wodurch sich diese Gleichung auch auf die Form

$$\int (X dx + Y dy + Z dz) \mu \omega \delta s = 0$$

bringen läßt. Aber vermöge der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit ist $\omega \delta s$ eine beständige Größe; daher haben wir auch

$$\int \mu (X dx + Y dy + Z dz) = 0.$$

Diese Gleichung muß für jede Gestalt des Canals, das ist, für jede zwischen x, y, z bestehende Relation Statt finden, was voraussetzt, daß die Differenzialformel

$$\mu (X dx + Y dy + Z dz),$$

an und für sich betrachtet, eine integrable ist.

Will man den Druck kennen lernen, welchen ein bestimmtes Theilchen der im erwähnten Canale befindlichen Flüssigkeit erleidet, denke man sich diesen Canal nächst dem gegebenen Theilchen durch eine bewegliche Wand geschlossen, und an jedem Puncte derselben eine Kraft $-\lambda$ angebracht, welche dem Drucke der Flüssigkeit auf diese Wand das Gleichgewicht hält; man muß nun das Moment der auf die Wand wirkenden Gesammtkraft zu jenen der anderen Kräfte hinzufügen, wodurch sich, wenn ω' und s' die den genannten Theilchen zugehörigen Werthe von ω und s vorstellen, die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes

$$-\lambda \omega' \delta s' + \int (X dx + Y dy + Z dz) \mu \omega \delta s = 0$$

ergibt. Aus derselben folgt, da $\omega \delta s$ constant und $= \omega' \delta s'$ ist,

$$\lambda = \int \mu (X dx + Y dy + Z dz),$$

wie in der vorhergehenden Vorlesung.

Man kann auch von der Gleichung

$$\int [(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) \mu \omega ds + \lambda \delta (\omega ds)] = 0$$

ausgehen, in welcher λ den gewöhnlichen Multiplicator anzeigt. Betrachtet man, was allerdings erlaubt ist, ω durch die ganze Ausdehnung des Canals als constant, so hat man

$$\int [(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) \mu ds + \lambda \delta ds] = 0,$$

welche Gleichung ebenfalls auf die bekannten Resultate führt.

Wenn zwischen den kleinsten Theilchen einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit eine wechselseitige Anziehung besteht, so entspringt daraus allein, abgesehen von anderen Kräften, eine Einwirkung auf jeden Punct eines freien Theiles der Oberfläche dieser Flüssigkeit, vermöge welcher derselbe gegen das Innere des flüssigen Körpers gezogen wird.

Wir wollen die Beschaffenheit der solchergestalt auf die Oberfläche einer gleichförmig dichten Flüssigkeit ausgeübten Kraft unter der Voraussetzung näher betrachten, daß die wechselseitige Anziehung zweier Theilchen nur bei den geringsten Entfernungen derselben eine wahrnehmbare Wirkung zu erzeugen vermag, hingegen bei jeder merklichen Entfernung eines Theilchens von dem andern völlig verschwindet, wie auch immer diese Anziehung von dem Abstande der auf einander wirkenden Theilchen sonst noch abhängen mag.

Nehmen wir erstlich an, die Oberfläche der Flüssigkeit sey convex, und habe die Kugelgestalt; ihr Halbmesser sey a, und der Radiusvector, welcher von ihrem Mittelpuncte zu einem außerhalb der Flüssigkeit in unmerklicher Entfernung von ihrer Oberfläche befindlichen Puncte geht, sey x, so wird die Kraft, mit welcher die Flüssigkeit den gedachten Punct anzieht, da die entfernteren Theilchen derselben hiezu nichts beitragen, und es demnach nicht darauf ankömmt, ob die ganze Kugel, oder nur ein Theil davon vorhanden ist, der in der vierten Vorlesung gegebenen Formel (4) gemäß, durch

$$P = 2\pi \cdot \frac{d\left[\frac{1}{x}\int r\,dr\,[F''(x+r) - F''(x-r)]\right]}{dx}$$

ausgedrückt, wobei der Einfachheit wegen die Dichtigkeit der Flüssigkeit $= 1$ ist, und r den Abstand eines Theilchens derselben vom Centrum der Kugel bedeutet; ferner, wenn $F(r)$ das Anziehungsgesetz darstellt, und $\int F(r)\,dr = F'(r)$ gesetzt wird, $F''(r) = \int r F'(r)\,dr$ ist, und endlich die Integration sich von $r = 0$ bis $r = a$ erstrecken muß. Die Richtung dieser Kraft ist gegen die Oberfläche der Flüssigkeit normal.

Denken wir uns nun normal auf die Oberfläche der Flüssigkeit eine aus derselben Materie bestehende Säule von unendlich geringem Durchmesser errichtet, deren Querschnitt ω heiße, so gibt das von $x = a$ anfangende Integral $\omega\int P\,dx$ die Wirkung der Flüssigkeit auf das Stück der Säule an, welches sich über die Oberfläche derselben zur Höhe $x - a$ erhebt. Diese Wirkung ist also

$$= \frac{2\pi\omega}{x}\int_0^a r\,dr\,[F''(x+r) - F''(x-r)]$$
$$- \frac{2\pi\omega}{a}\int_0^a r\,dr\,[F''(a+r) - F''(a-r)].$$

Geben wir nun der Größe x einen von a merklich verschiedenen Werth,

so ist, nebst $a+r$ und $x+r$, auch $x-r$ eine merkliche Größe; es verschwinden daher $F(a+r)$, $F(x+r)$, $F(x-r)$ für jeden Umfang der Werthe von r; folglich auch $F''(a+r)$, $F''(x+r)$, $F''(x-r)$, und somit besteht für den auf die Einheit der Flächen bezogenen Druck, welchen die hier betrachtete Säule auf die Oberfläche der Flüssigkeit ausübt, die Formel

$$\frac{2\pi}{a}\int_0^a r\,dr\,F''(a-r).$$

Es sey nun $a-r=z$, also $r=a-z$, so geht dieselbe in

$$-\frac{2\pi}{a}\int_a^0 (a-z)\,dz\,F''(z) = \frac{2\pi}{a}\int_0^a (a-z)\,dz\,F''(z)$$
$$= 2\pi\int_0^a F''(z)dz - \frac{2\pi}{a}\int_0^a z\,F''(z)dz$$

über. Da $F''(z)$ für jeden merklichen Werth von z verschwindet, so ist es einerlei, ob man die Integrationen bis $z=a$, oder bis $z=\infty$ ausdehnt, und man kann deßhalb die Integralien $2\pi\int_0^a F''(z)\,dz$ und $2\pi\int_0^a z\,F''(z)\,dz$, welche wir durch A und B vorstellen wollen, als von a independente constante Größen betrachten. Der Ausdruck der Kraft, mit welcher ein, durch eine convexe Kugelfläche begrenzter Körper eine außerhalb desselben befindliche, auf dieser Fläche normal stehende, Säule von merklicher Länge anzieht, hat demnach die Form $A-\frac{B}{a}$, wobei A und B beständige Größen sind, und a den Halbmesser der Kugelfläche angibt.

Denkt man sich die erwähnte Säule von Flüssigkeit umgeben, so hebt diese offenbar die Wirkung der früher betrachteten auf; es ist also die Kraft, welche eine durch eine concave Kugelfläche, vom Halbmesser a, begrenzte Flüssigkeit auf eine in ihrem Innern befindliche, an dieser Kugelfläche normal sich endigende Säule ausübt, $=A-\frac{B}{a}$.

Wächst a unendlich, so nähert sich die so eben angegebene Kraft ohne Ende der Grenze A; mithin zeigt A die Kraft an, mit welcher eine mit ebener Oberfläche versehene Flüssigkeit, vermöge des Zusammenhanges ihrer kleinsten Theilchen, die dieser Oberfläche zunächst liegenden gegen die davon entfernteren drückt.

Die durch den Endpunct der Säule zur kugelförmigen Oberfläche geführte tangirende Ebene begrenzt, zugleich mit dieser Oberfläche, ein

Segment, dessen Wirkung auf die Säule, wie man aus den vorausgeschickten Resultaten leicht entnehmen wird, $= \frac{B}{a}$ ist. Auch erhellet aus dem Ursprunge der Größen A und B, daß die erstere Größe das Glied $\frac{B}{a}$ bei weitem übersteigt.

Hat ein flüssiger Körper eine convexe kugelförmige Oberfläche, so ist seine Einwirkung auf die Theilchen nächst dieser Oberfläche um das Doppelte der von einem solchen Segmente herrührenden Kraft größer, als sie ausfallen würde, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit concav, und mit demselben Halbmesser beschrieben wäre. Es ist also die genannte Einwirkung $= A + \frac{B}{a}$, und von der einer concaven Oberfläche correspondirenden bloß durch das Zeichen des Halbmessers a unterschieden.

Die Einwirkung eines mit beliebiger Oberfläche versehenen flüssigen Körpers auf die dieser Oberfläche nächsten Theilchen läßt sich nun ohne Schwierigkeit durch einen analytischen Ausdruck darstellen.

Man führe durch die, zu irgend einem Puncte der Oberfläche der Flüssigkeit gehörende Normallinie zwei einander unendlich nahe Ebenen, welche mit einander, in so ferne die Neigung einer derselben gegen eine durch dieselbe Normale gelegte fixe Ebene $= \theta$ ist, den Winkel $d\theta$ bilden, so kann man, da die von entfernteren Theilchen ausgehende Anziehung in keine Betrachtung kömmt, die Kraft, welche von dem, zwischen diesen zwei Ebenen enthaltenen Segmente der Flüssigkeit auf die der Normale nächsten, an der Oberfläche liegenden, Theilchen parallel mit der Normale ausgeübt wird, jener gleich setzen, welche von dem durch dieselben Ebenen begrenzten Segmente einer Kugel herrührt, deren Mittelpunct und Halbmesser mit dem Krümmungsmittelpuncte und Krümmungshalbmesser des von einer dieser Ebenen in die Oberfläche der Flüssigkeit gemachten Schnittes übereinstimmen. Da die Wirkung eines solchen Kugelsegmentes sich zur Wirkung der ganzen Kugel verhält, wie $d\theta$ zu 2π; ferner, wenn R_1 und R_2 den größten und kleinsten Krümmungshalbmesser aller durch den Endpunct der Normale auf der Oberfläche der Flüssigkeit verzeichneten Curven vorstellen, und die fixe Ebene, von welcher der Winkel θ seinen Anfang nimmt, diese Oberfläche in einer Curve schneidet, deren Krümmungshalbmesser R_1 ist, der Halbmesser der erwähnten Kugel (siebzehnte Vorlesung über

die Geometrie (15)) durch $\frac{R_1 R_2}{R_1 \sin. \theta^2 + R_2 \cos. \theta^2}$ ausgedrückt wird, so ist die von jenem Segmente ausgehende Kraft

$$= \frac{1}{2\pi} \left[A + B\left(\frac{1}{R_1} \cos. \theta^2 + \frac{1}{R_2} \sin. \theta^2\right)\right] d\theta,$$

folglich die Einwirkung des ganzen Körpers auf den genannten Punct seiner Oberfläche

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[A + B\left(\frac{1}{R_1} \cos. \theta^2 + \frac{1}{R_2} \sin. \theta^2\right)\right] d\theta$$

$$= A + \tfrac{1}{2} B \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

wobei die Werthe von R_1 und R_2 positiv oder negativ genommen werden müssen, je nachdem sie einem convexen oder concaven Schnitte correspondiren.

Auf der hier gefundenen Formel beruht die sinnreiche, von Laplace gegebene Theorie der Erscheinungen der Haarröhrchen, deren erste Gründe man in Baumgartner's Naturlehre vorgetragen findet.

Fünfzehnte Vorlesung.

Über die Grundformeln der Bewegungslehre.

Mit gegenwärtiger Vorlesung beginnen wir die Auseinandersetzung der Lehre von der Bewegung oder der Dynamik, welche den zweiten Hauptttheil der Mechanik ausmacht.

Betrachten wir die Bewegung bloß, in so ferne sie sich uns als Ortsveränderung eines räumlichen Gegenstandes, des sogenannten Beweglichen, darstellt, ohne auf die Ursachen, denen sie ihr Daseyn verdankt, Rücksicht zu nehmen, so erkennen wir, daß jeder Punct des Beweglichen nur dadurch aus einer Lage in die andere kommen kann, daß er eine gewisse Linie oder Bahn durchlauft, und hiezu eine gewisse Zeit verwendet. Ist uns daher die Dauer einer Bewegung, die Gestalt der dabei beschriebenen Bahn, die Gegend, nach welcher das Bewegliche in seiner Bahn fortschreitet, und die Größe des während eines jeden einzelnen Zeittheiles zurückgelegten Weges oder Raumes bekannt, so besitzen wir eine vollständige Einsicht in die Beschaffenheit dieser Bewegung.

Da jeder materielle Punct unfähig ist, seinen Zustand selbstthätig zu ändern, welche Unfähigkeit man, dem angenommenen Sprachgebrauche gemäß, mit dem Worte Trägheit bezeichnet, so muß er, wenn er sich bereits in Bewegung befindet, und sich selbst überlassen wird, d. h. wenn keine Kraft auf ihn einwirkt, abgesehen von jedem Hindernisse, vermöge der Fähigkeit, welche er erlangt hat, nach einer gewissen Richtung und mit einer gewissen Geschwindigkeit fortzuschreiten, d. h. binnen jedem gegebenen Zeittheile einen bestimmten Raum zu beschreiben, sich unaufhörlich auf dieselbe Weise fortbewegen. Dieser Punct wird also die gerade Linie, welcher er bis jetzt folgte, nicht verlassen, oder wenn er eine krumme Linie beschrieb, von dem Augenblicke an, in welchem er sich selbst überlassen blieb, die Tangente seiner krummlinigen Bahn einschlagen, und immer dieselbe Geschwindigkeit beibehalten.

Man nennt eine Bewegung, welche stets nach derselben Richtung erfolgt, eine geradlinige, und diejenige, bei der stets dieselbe Geschwindigkeit Statt findet, d. h. in allen gleichen Zeiten gleiche Räume zurückgelegt werden, eine gleichförmige, zum Unterschiede

von der krummlinigen und ungleichförmigen, welche die entgegengesetzte Beschaffenheit besitzen.

Da wir jederzeit sagen, eine gleichförmige Bewegung sey zwei Mal, drei Mal u. s. w. schneller oder langsamer, als eine andere, wenn das Bewegliche bei der ersteren binnen einer festgesetzten Zeit einen zwei Mal, drei Mal u. s. w. größeren oder kleineren Raum durchlauft, so nehmen wir hiedurch stillschweigend an, daß die Geschwindigkeiten mit den Räumen im geraden, und mit den dazu erforderlichen Zeiten im verkehrten Verhältnisse stehen. Wählen wir nun, der Einfachheit der Rechnung wegen, die Geschwindigkeit, vermöge welcher ein Punct während der Zeiteinheit die Einheit der Längen gleichförmig durchlauft, zur Einheit der Geschwindigkeiten, so können wir jede Geschwindigkeit durch den Quotienten messen, welchen ein ihr entsprechender Raum, durch die zugehörige Zeit getheilt, darbietet, und demnach jeden gleichförmig zurückgelegten Raum durch das Product der correspondirenden Geschwindigkeit mit der Zeit ausdrücken.

Das Gesetz der gleichförmigen Bewegung wird also durch eine der Gleichungen

$$c = \frac{s}{t}, \quad s = ct, \quad t = \frac{s}{c}$$

dargestellt, wobei t irgend eine Zeit, s den während derselben beschriebenen Raum, und c die Geschwindigkeit, mit welcher die Bewegung erfolgt, anzeigt. Wir sehen zugleich, daß der numerische Werth der Geschwindigkeit mit jenem des ihr gemäß binnen der Zeit 1 durchlaufenen Raumes übereinstimmt.

Da die Fortdauer der Gleichförmigkeit der Bewegung eines materiellen Punctes ein bloßes Resultat seiner Trägheit ist, so setzt das Daseyn einer ungleichförmigen Bewegung die ununterbrochene Wirksamkeit gewisser Kräfte, oder wenigstens gewisser Hindernisse der Bewegung, voraus. Denken wir uns diese Kräfte oder Hindernisse in einem bestimmten Augenblicke aufhörend, so geht das Bewegliche mit einer bestimmten Geschwindigkeit gleichförmig fort, und diese ist es, welche wir uns vorzustellen haben, wenn wir bei einer ungleichförmigen Bewegung von der irgend einem Augenblicke zugehörigen Geschwindigkeit des Beweglichen sprechen. Nimmt die erwähnte Geschwindigkeit während der Bewegung zu, so heißt die Bewegung eine beschleunigte; nimmt sie ab, so heißt die Bewegung eine verzögerte.

Bezeichnen wir den, bei einer ungleichförmigen Bewegung wäh-

rend der von einem festgesetzten Augenblicke an gezählten Zeit t beschriebenen Raum durch s, und die am Ende desselben Statt findende Geschwindigkeit durch v, so besteht die vollständige Berechnung dieser Bewegung in der Ausmittelung einer Gleichung zwischen je zweien der Größen s, v, t, wenn die dazu erforderlichen Daten vorhanden sind. Die Auflösung dieses Problems beruht größten Theils auf der Integration einer, die genannten drei Größen verknüpfenden, Differenzialgleichung, mit deren Aufstellung wir uns sogleich beschäftigen wollen.

Denken wir uns die Bewegung über die Zeit t hinaus noch durch den Zeittheil Δt nach demselben Gesetze fortdauernd, so können wir offenbar Δt jederzeit so klein annehmen, daß die Geschwindigkeit des Beweglichen während dieses Zeittheiles entweder ununterbrochen wächst, oder ununterbrochen abnimmt. Lassen wir den ersten Fall gelten, und setzen wir die Geschwindigkeit, welche dem Beweglichen am Ende der Zeit $t + \Delta t$ zukommt, $= v + \Delta v$, wobei die Änderung Δv, welche die Geschwindigkeit v nach Verlauf des Zeittheiles Δt erlangt hat, positiv ist; ferner den während des Zeittheiles Δt beschriebenen Raum $= \Delta s$: so ist Δs augenscheinlich größer als der Raum, den das Bewegliche während der Zeit Δt zurückgelegt haben würde, wenn sich die am Anfange dieser Zeit Statt findende Geschwindigkeit nicht geändert hätte, und kleiner als der Raum, welcher während eben dieser Zeit mit der erst am Ende derselben erlangten Geschwindigkeit $v + \Delta v$ beschrieben worden wäre; d. h. es ist

$$\Delta s > v\Delta t \quad \text{und} \quad \Delta s < (v + \Delta v)\,\Delta t,$$

$$\text{mithin} \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} > v \quad \text{und} \quad \frac{s\Delta}{\Delta t} < v + \Delta v.$$

Lassen wir jetzt den Zeittheil Δt in den Zustand des unendlichen Abnehmens übergehen, so wird auch Δv unendlich klein, und der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nähert sich nothwendig der Grenze v ohne Ende, woraus

$$\frac{ds}{dt} = v \quad \text{oder} \quad ds = v\,dt$$

folgt. Zu demselben Resultate wären wir gekommen, wenn wir die Geschwindigkeit v als eine während der Zeitdifferenz Δt fortwährend abnehmende Größe betrachtet hätten, weßwegen Δv negativ wird, und in den obigen Vergleichungen das Zeichen $>$ mit $<$ verwechselt werden muß.

Ist nun v als eine Function von t gegeben, so finden wir den

Raum s durch die Integration der Differenzialformel v dt, wobei die dem Integral beizusetzende Constante meistens durch die Bedingung, daß s mit t zugleich entsteht, also für t = o auch s = o seyn muß, bestimmt wird. Dieselbe Differenzialformel dient uns zur Angabe von s, wenn wir t durch v auszudrücken vermögen. Kennen wir die Verbindung der Größen s und v, so erhalten wir den entsprechenden Werth von t durch die Integration der Differenzialformel $\frac{ds}{v}$, wobei zur Bestimmung der Constante überdieß die am Anfange der Bewegung Statt findende Geschwindigkeit gegeben seyn muß. Am leichtesten ist die Angabe der Geschwindigkeit am Ende einer bestimmten Zeit, wenn man die zwischen derselben und dem correspondirenden Raume bestehende Relation kennt, denn sie erfordert, wie die Gleichung $v = \frac{ds}{dt}$ lehrt, bloß Operationen der Differenzialrechnung.

Die einfachsten ungleichförmigen Bewegungen sind: die gleichförmig beschleunigte, und die gleichförmig verzögerte. Bei beiden ändert sich die Geschwindigkeit des Beweglichen in demselben Verhältnisse, wie die Zeit, und zwar bei der ersteren wachsend, und bei der letzteren abnehmend.

Bezeichnen wir die am Anfange der Zeit t dem Beweglichen eigenthümliche Geschwindigkeit durch c, und die Größe, um welche sich die Geschwindigkeit während der Zeiteinheit ändert, durch g, so wird die am Ende der genannten Zeit Statt findende Geschwindigkeit bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung durch die Formel

$$v = c + gt,$$

und bei der gleichförmig verzögerten durch

$$v = c - gt$$

ausgedrückt. Um daher die zweite aus der ersten abzuleiten, braucht man bloß die Constante g als negativ zu betrachten. Ist $t = \frac{c}{g}$ geworden, so verschwindet die Geschwindigkeit bei der gleichförmig verzögerten Bewegung, und wächst t über diese Grenze hinaus, so erscheint v negativ, und nimmt ohne Ende zu; woraus erhellet, daß jetzt, dem Gesetze dieser Bewegung gemäß, die Richtung des Beweglichen in die entgegengesetzte übergeht, und seine Geschwindigkeit nach letzterer fortwährend beschleuniget wird.

Für den während der Zeit t beschriebenen und nach der anfängli-

chen Richtung des Beweglichen gerechneten Raum s haben wir, wenn wir beide Fälle in eine Formel zusammenfassen:

$$ds = (c \pm gt)\,dt,$$

folglich $$s = ct \pm \tfrac{1}{2} gt^2.$$

Bei der gleichförmig verzögerten Bewegung erhält man nicht nur allein, wie es die der Integration zum Grunde liegende Voraussetzung mit sich bringt, für $t = o$, sondern auch für $t = \frac{2c}{g}$, $s = o$; welches Resultat, so wie auch das Verschwinden von s für $t = -\frac{2c}{g}$, bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung Jeder, der mit der Theorie der entgegengesetzten Größen vertraut ist, ohne Mühe interpretiren wird.

Fassen wir die Kräfte, welche bestimmte Bewegungen hervorbringen, in der Absicht in das Auge, um die zwischen ihnen als Ursachen, und den Bewegungen als den Wirkungen obwaltende Verbindung kennen zu lernen, so müssen wir, den oben angeführten zwei Grundformen der Bewegung gemäß, auch zwei Arten von Kräften wohl unterscheiden.

Bei den einen, denen wir den Namen momentane Kräfte beilegen wollen, ist die Erzeugung der Bewegung das Werk eines Augenblickes, so daß sich keine noch so kleine Zeit angeben läßt, während welcher ihre Einwirkung auf das Bewegliche fortdauerte; afficirt demnach eine Kraft dieser Art einen ruhenden materiellen Punct, so geräth er nach der Richtung derselben in eine gleichförmige Bewegung, deren Geschwindigkeit offenbar sowohl von der Energie der Kraft, als auch von dem Widerstande, welchen ihr der genannte Punct vermöge seiner Trägheit entgegensetzt, abhängt. Die anderen hingegen, welche continuirliche Kräfte heißen sollen, wirken auf das Bewegliche, wenigstens während einer gewissen Zeit, ohne Unterlaß, so daß es keinen noch so kleinen Zeittheil gibt, während welchem sie nicht thätig wären. Jede continuirliche Kraft versetzt einen materiellen Punct aus der Ruhe in eine beschleunigte Bewegung; die Geschwindigkeit, welche derselbe nach Verlauf einer gegebenen Zeit besitzt, wird durch die Dauer der Einwirkung dieser Kraft auf das Bewegliche, durch das Gesetz, welches ihre Intensität dabei befolgt, und durch die Trägheit des Beweglichen bestimmt. Eine continuirliche Kraft, welche das Bewegliche stets mit einerlei Stärke afficirt, wird insbesondere eine beständige

Kraft genannt; unterliegt aber die Energie der continuirlichen Kraft einem Wechsel, so sagt man, sie sey eine veränderliche.

So lange bloß vom Gleichgewichte der Kräfte die Rede war, haben wir, der in der ersten Vorlesung gemachten Voraussetzung zu Folge, die Intensität einer Kraft nur nach ihren Leistungen beurtheilt, welche sie uns in Bezug auf die Vernichtung der Wirkungen anderer Kräfte vor Augen legte. Eine beliebige Kraft wurde als Einheit der Kräfte angenommen, und das Verhältniß jeder gegebenen Kraft zu dieser Einheit bloß dadurch bestimmt, daß man überhaupt eine Kraft als das Doppelte, das Dreifache u. s. w. einer anderen ansah, wenn sie der Vereinigung zweier, oder dreier, mit letzterer identischer Kräfte gerade entgegen wirkend das Gleichgewicht hält. Mit gleichem Rechte kann man, wenn man die Bewegungslehre für sich allein behandelt, die Kräfte nach den Geschwindigkeiten schätzen, welche sie unter völlig gleichen Umständen erzeugen; also eine momentane Kraft das Doppelte, Dreifache &c. einer anderen nennen, wenn sie einem und demselben materiellen Puncte eine zwei Mal, drei Mal &c. größere Geschwindigkeit beibringt, als letztere; ferner eine continuirliche Kraft als das Doppelte, Dreifache &c. einer anderen betrachten, wenn sie einem und demselben materiellen Puncte durch ihre, binnen einer festgesetzten Zeit mit ungeänderter Intensität fortgesetzte, Wirksamkeit eine zwei Mal, drei Mal &c. größere Geschwindigkeit ertheilen würde, als letztere. Hieraus folgt aber keinesweges nothwendig, daß die Zahlen, durch welche zwei Kräfte nach der einen und nach der anderen Ansicht vorgestellt werden, mit einander in dem nämlichen Verhältnisse stehen. Wir wollen jedoch die Gleichheit dieser Verhältnisse als die einfachste Voraussetzung, welche wir über das Wesen der Kräfte aufzustellen vermögen, unseren künftigen Untersuchungen zum Grunde legen, zumal, da die Übereinstimmung der auf dieselbe gebauten Resultate mit der Erfahrung lehrt, daß alle in der Natur thätigen Kräfte die erwähnte Beschaffenheit besitzen.

Die so eben ausgesprochene Voraussetzung, und der für sich einleuchtende Satz, daß die Kräfte, welche verschiedenen materiellen Puncten unter gleichen Umständen einerlei Geschwindigkeiten ertheilen sollen, sich gerade so verhalten müssen, wie die mit diesen Puncten verbundenen Massen, setzen uns in den Stand, jede an einer gegebenen Masse m angebrachte momentane Kraft P durch diese Masse und durch die Geschwindigkeit c, welche sie derselben beizubringen vermag; wie auch jede continuirliche Kraft Q durch die von ihr bewegte Masse m

und durch die Geschwindigkeit v, welche diese Masse vermöge der unveränderten Wirksamkeit der genannten Kraft binnen einer bestimmten Zeit t erlangen würde, auf eine einfache Weise auszudrücken. Wählen wir nämlich, da die momentanen und die continuirlichen Kräfte abgesonderte Einheiten erfordern, diejenige momentane Kraft zur Einheit, welche die Einheit der Massen mit der Einheit der Geschwindigkeiten in Bewegung setzt; nehmen wir ferner diejenige continuirliche Kraft für die Einheit an, welche der Masse 1 binnen der Zeit 1 die Geschwindigkeit 1 beibringt, so ist, wie man leicht sieht,

$$P = mc$$

$$\text{und} \quad Q = \frac{mv}{t}.$$

Will man aber eine veränderliche, auf die Masse m wirkende continuirliche Kraft q durch diese Masse und durch die Geschwindigkeit v, welche dieselbe vermöge der genannten Kraft während der Zeit t wirklich erlangt, darstellen, so muß man die Differenzialrechnung zu Hülfe nehmen. Es gehe nämlich die Kraft q binnen des auf t folgenden Zeittheiles Δt in $q + \Delta q$ über, so kann man Δt so klein denken, daß Δq während des ganzen Verlaufes dieses Zeittheiles entweder stets positiv oder stets negativ bleibt. Lassen wir den ersten Fall gelten, und nennen wir die Geschwindigkeit, welche das Bewegliche am Ende des Zeittheiles Δt besitzt, $v + \Delta v$, so ist q offenbar kleiner, $q + \Delta q$ hingegen größer als die beständige continuirliche Kraft, welche der Masse m während der Zeit Δt den Zusatz Δv an Geschwindigkeit zu ertheilen vermag, d. h. es ist

$$q < \frac{m\Delta v}{\Delta t} \quad \text{und} \quad q + \Delta q > \frac{m\Delta v}{\Delta t}.$$

Stellen wir uns jetzt Δt im Zustande des unendlichen Abnehmens vor, so nähert sich $\frac{m\Delta v}{\Delta t}$ ohne Ende der Grenze q, und es besteht daher die Gleichung

$$q = \frac{m\,dv}{dt}.$$

Da $v = \frac{ds}{dt}$ ist, in so ferne s den während der Zeit t zurückgelegten Raum bedeutet, so haben wir, wenn wir, wie es bei allen dynamischen Forschungen zu geschehen pflegt, bei dem Differenziren dieses Ausdruckes das Differenzial der Zeit als constant behandeln,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

mithin auch

$$q = m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Schaffen wir endlich aus der obigen Formel für q mittelst des Ausdruckes für v das Differenzial dt weg, so ergibt sich

$$q = \frac{m v dv}{ds}.$$

Diese Gleichungen verhelfen uns zur Auflösung aller, eine ungleichförmige Bewegung betreffenden Probleme, in welchen die diese Bewegung hervorbringende continuirliche Kraft entweder als eine Function der Zeit, oder des bereits zurückgelegten Raumes, oder der erlangten Geschwindigkeit gegeben ist.

Sechzehnte Vorlesung.

Über die Auflösung einiger, die geradlinige Bewegung eines Punctes betreffenden, Aufgaben.

Um den Gebrauch der in der vorhergehenden Vorlesung gewonnenen Formeln in ein helleres Licht zu setzen, wollen wir dieselben auf die Auflösung einiger interessanter Probleme anwenden.

Erste Aufgabe. Ein materieller Punct, dessen Masse wir der Kürze wegen der Einheit gleich setzen wollen, wird von einem fixen Puncte mit einer bloß von dem Abstande beider abhängenden Kraft fortwährend angezogen, und entweder hiedurch allein, oder auch mit Beihülfe einer, gegen diesen fixen Punct gerichteten, momentanen Kraft in Bewegung gesetzt; man verlangt die Angabe des während einer gegebenen Zeit zurückgelegten Weges, und der am Ende dieser Zeit Statt findenden Geschwindigkeit.

Auflösung. Es sey a die Entfernung des beweglichen Punctes von dem fixen, und c seine Geschwindigkeit am Anfange der Zeit t; am Ende dieser Zeit habe der bewegliche Punct den Raum s zurückgelegt, die Geschwindigkeit v erlangt, und befinde sich in der Entfernung x von dem fixen Puncte; die Kraft endlich, mit welcher ihn der letztere Punct nun anzieht, werde durch $\varphi(x)$ vorgestellt, so haben wir

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \varphi(x).$$

Aber es ist offenbar

$s = a - x$, wodurch sich $ds = -dx$ und $d^2 s = -d^2 x$,

$$\text{folglich } \frac{d^2 x}{dt^2} = -\varphi(x)$$

ergibt. Um diese Differenzialgleichung auf dem kürzesten Wege zu integriren, multipliciren wir beide Theile derselben mit $2dx$; wir erhalten

$$\frac{2\,dx\,d^2 x}{dt^2} = -2\varphi(x)\,dx,$$

woraus, da dt, der in der vorhergehenden Vorlesung gemachten Voraussetzung gemäß, als constant betrachtet werden muß,

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -2\int\varphi(x)\,dx,$$

oder, wenn wir

$$\int \varphi(x)\, dx = \psi(x)$$

annehmen, und bedenken, daß

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{ds}{dt} = -v$$

ist,

$$v^2 = Const. - 2\psi(x)$$

folgt. Die Constante wird durch die Bedingung bestimmt, daß für $x = a$, $v = c$ seyn muß. Es besteht also die Gleichung

$$v^2 = c^2 + 2[\psi(a) - \psi(x)] \quad \text{oder}$$

(1) $$v = \sqrt{c^2 + 2[\psi(a) - \psi(x)]},$$

welche uns die Geschwindigkeit des bewegten Punctes anzeigt, sobald wir den Abstand desselben von dem fixen Puncte kennen.

Nun haben wir

$$dt = -\frac{dx}{v},$$

d. h. $$dt = -\frac{dx}{\sqrt{c^2 + 2[\psi(a) - \psi(x)]}};$$

daher ist, wenn wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c^2 + 2[\psi(a) - \psi(x)]}} = F(x)$$

seyn lassen, und darauf Rücksicht nehmen, daß für $t = o$, $x = a$ ausfallen muß,

(2) $$t = F(a) - F(x).$$

Diese Gleichung gibt uns x durch t, und wenn wir sie mit (1) durch Elimination von x verbinden, auch v durch t ausgedrückt.

Wir wollen die hier gefundenen Formeln auf einige besondere Fälle anwenden.

I. Es sey die von dem fixen Puncte ausgehende Anziehung dem Quadrate der Entfernung des angezogenen Punctes von dem ersteren verkehrt proportionirt, so ist, wenn k die Größe dieser Anziehung für die Entfernung 1 anzeigt,

$$\varphi(x) = \frac{k}{x^2},$$

$$\text{also} \quad \psi(x) = -\frac{k}{x}$$

$$\text{und} \quad v = \sqrt{c^2 - 2k\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right]}.$$

Bei der Berechnung von $F(x)$ hingegen, welche von der Integration der Differenzialformel

$$\sqrt{a} \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{2kax + (c^2a - 2k)\,x^2}}$$

abhängt, muß man unterscheiden, ob $c^2a - 2k$ gleich Null, oder positiv, oder negativ ausfällt, d. h. ob

$$c = \sqrt{\frac{2k}{a}} \quad \text{oder} \quad c > \sqrt{\frac{2k}{a}} \quad \text{oder} \quad c < \sqrt{\frac{2k}{a}}$$

ist. Im ersten Falle erhält das Integral eine algebraische Form; im zweiten erscheint darin ein Logarithme, und im dritten ein Kreisbogen. Wir wollen uns hier in die, mit keinen Schwierigkeiten verbundene, Darstellung des Integrals selbst, mittelst der aus den Vorlesungen über die Analysis bekannten Formeln, nicht einlassen, sondern uns bloß damit begnügen, dasselbe für den Fall, wenn $c = 0$ ist, oder das Bewegliche ohne Hinzutreten einer momentanen Kraft, durch die Wirkung der Anziehung in Bewegung gesetzt wird, anzugeben. Wir finden

$$F(x) = \sqrt{\frac{a}{2k}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax - x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2k}} \left[-\sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2}\, Arc.\, sin.\, \frac{2x - a}{a} \right],$$

$$F(a) = \sqrt{\frac{a}{2k}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\text{mithin} \quad t = \sqrt{\frac{a}{2k}} \left[\sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2}\, Arc.\, cos.\, \frac{2x - a}{a} \right].$$

In eben demselben Falle ist

$$v = \sqrt{2k \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right]}.$$

Diese Formeln enthalten die Theorie des freien Falles schwerer Körper gegen die Oberfläche der Erde im leeren Raume, in so ferne man die Erde als eine aus concentrischen gleichförmig dichten Schichten bestehende Kugel ansieht.

II. Es sey die Anziehung der Entfernung der auf einander wirkenden Puncte direct proportionirt, oder

$$\varphi(x) = kx,$$

$$\text{so ist} \quad \psi(x) = \frac{kx^2}{2},$$

$$\text{mithin} \quad v = \sqrt{c^2 + k(a^2 - x^2)};$$

ferner $F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{c + ka^2 - kx^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{k}} Arc. sin. x \sqrt{\frac{k}{c + ka^2}},$

also $F(a) = \frac{1}{\sqrt{k}} Arc. sin. a \sqrt{\frac{k}{c + ka^2}}$

und $t = \frac{1}{\sqrt{k}} \left[Arc. sin\, a \sqrt{\frac{k}{c + ka^2}} - Arc. sin. x \sqrt{\frac{k}{c + ka^2}} \right].$

Lassen wir $c = o$ seyn, so erhalten wir

$v = \sqrt{k(a^2 - x^2)}$

und $t = \frac{1}{\sqrt{k}} Arc\ cos. \frac{x}{a},$

oder $x = a\, cos. (t\sqrt{k}),\quad v = a\sqrt{k}\ .\ sin. (t\sqrt{k}).$

Da die Annahme $x = o$ auf $t = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ und $v = a\sqrt{k}$ führt, so sieht man, daß der bewegte Punct nach Verlauf der Zeit $\frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ mit der Geschwindigkeit $a\sqrt{k}$ bei dem fixen Puncte anlangt. Vermöge seiner Trägheit setzt er die Bewegung über denselben hinaus fort, bis $x = -a$ wird; sobald er diese Entfernung von dem fixen Puncte erreicht, was nach Verlauf der Zeit $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ erfolgt, verschwindet v, um wieder nach der entgegengesetzten Richtung aufzutreten, wie aus der Formel $v = a\sqrt{k}\, sin. (t\sqrt{k})$ erhellet, in welcher hiedurch $sin. (t\sqrt{k})$ sein Zeichen ändert. Das Bewegliche macht also unaufhörlich auf einerlei Weise erfolgende Hin- und Hergänge zu beiden Seiten des fixen Punctes.

Diese Resultate umfassen die Theorie der Bewegung eines schweren Punctes im Innern der Erde, wenn man dieselbe als eine aus concentrischen homogenen Schichten gebildete Kugel betrachtet, und jeden die Bewegung hemmenden Widerstand bei Seite setzt.

Zweite Aufgabe. Ein materieller Punct wird von einer, stets längs derselben Geraden wirkenden beständigen continuirlichen Kraft in einem homogenen Mittel, welches seiner Bewegung dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional widersteht, getrieben; es ist die Bewegung dieses Punctes zu berechnen.

Auflösung. Bezeichnen wir die unveränderliche Intensität der continuirlichen Kraft durch g; den seit dem Anfange der Zeit t zurückgelegten Raum durch s; die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindig-

keit durch v, so wird die Größe des Widerstandes, welchen das Mittel in dem genannten Augenblicke leistet, durch kv^2 vorgestellt, wobei k den Widerstand für die Geschwindigkeit 1 anzeigt. Dieser Widerstand kann offenbar als eine der Richtung der Bewegung entgegengesetzt wirkende Kraft betrachtet, und in die Rechnung eingeführt werden.

I. Nehmen wir nun erstlich an, die Bewegung erfolge nach der Richtung der continuirlichen Kraft g, so haben wir, weil $\frac{dv}{dt}$ der Ausdruck der Gesammtkraft ist, welche die Bewegung während des Zeittheilchens dt modificirt, die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2,$$

woraus $$dt = \frac{dv}{g - kv^2}$$

und $$t = \frac{1}{2\sqrt{gk}}\, l\left(\frac{\sqrt{g} + v\sqrt{k}}{\sqrt{g} - v\sqrt{k}}\right) + Const. \text{ folgt.}$$

Hat am Anfange der Zeit t das Bewegliche nach der Richtung der Kraft g bereits die Geschwindigkeit c gehabt, oder dieselbe durch die Einwirkung einer sich mit der continuirlichen Kraft vereinigenden momentanen, erhalten, so ist

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{gk}}\, l\left(\frac{\sqrt{g} + c\sqrt{k}}{\sqrt{g} - c\sqrt{k}}\right) + Const.,$$

folglich $$t = \frac{1}{2\sqrt{gk}}\, l\,\frac{(\sqrt{g} - c\sqrt{k})\,(\sqrt{g} + v\sqrt{k})}{(\sqrt{g} + c\sqrt{k})\,(\sqrt{g} - v\sqrt{k})}.$$

Geht aber der materielle Punct am Anfange der Zeit t bloß durch die Thätigkeit der Kraft g in Bewegung über, so ist $c = 0$, mithin

$$t = \frac{1}{2\sqrt{gk}}\, l\left(\frac{\sqrt{g} + v\sqrt{k}}{\sqrt{g} - v\sqrt{k}}\right).$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$\frac{\sqrt{g} + c\sqrt{k}}{\sqrt{g} - c\sqrt{k}} = A, \quad 2\sqrt{gk} = B,$$

so haben wir in dem allgemeinen Falle

$$l\left(\frac{\sqrt{g} + v\sqrt{k}}{A(\sqrt{g} - v\sqrt{k})}\right) = Bt;$$

also, wenn wir von den Logarithmen auf die Zahlen übergehen,

$$\frac{\sqrt{g} + v\sqrt{k}}{\sqrt{g} - v\sqrt{k}} = A e^{Bt},$$

woraus

$$v = \left(\frac{A e^{Bt} - 1}{A e^{Bt} + 1}\right) \sqrt{\frac{g}{k}} \text{ folgt.}$$

Wächst t unendlich, so nähert sich $\frac{A e^{Bt} - 1}{A e^{Bt} + 1}$ ohne Ende der Grenze 1, folglich v ohne Ende der Grenze $\sqrt{\frac{g}{k}}$; d. h. die Bewegung nähert sich, des fortwährenden Widerstandes wegen, unaufhörlich einer gleichförmigen.

Nimmt man $k = 0$ an, so hebt man den Widerstand des Mittels auf, und die Bewegung verwandelt sich in eine gleichförmig beschleunigte. Die hier für v gefundene Formel gibt uns jedoch in diesem Falle den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$; ein Zeichen, daß die Form des Integrals sich mit der Grundbedingung der Aufgabe nicht verträgt. Es ist aber leicht, den Werth von v für $k = 0$ auszumitteln, wenn man den Zähler und den Nenner der obigen Formel in Bezug auf k differenzirt, und sodann $k = 0$ setzt. Es ergibt sich auf diese Art der Bruch

$$\frac{2\sqrt{gk} \cdot e^{Bt}[dA + At\,dB]}{2k[dA + At\,dB] + (Ae^{Bt} + 1)\,dk},$$

wobei $2\sqrt{k} \cdot \frac{dA}{dk} = \frac{2c\sqrt{g}}{(\sqrt{g} - c\sqrt{k})^2}$

und $2\sqrt{k} \cdot \frac{dB}{dk} = 2\sqrt{g}$

ist; also, weil für $k = 0$, $2\sqrt{k} \cdot \frac{dA}{dk}$ den Werth $\frac{2c}{\sqrt{g}}$, A den Werth 1, und B den Werth 0 erhält,

$$v = \frac{\sqrt{g}\left(\frac{2c}{\sqrt{g}} + 2\sqrt{g} \cdot t\right)}{2} = c + gt,$$

wie es die Natur der gleichförmig beschleunigten Bewegung erfordert.

Dieselbe Bemerkung gilt hinsichtlich der Annahme $g = 0$, durch welche obige Rechnung auf die Bewegung eines bloß momentan afficirten materiellen Punctes im widerstehenden Mittel übertragen wird. Wir wollen jedoch diesen Fall unmittelbar mit Hülfe der darauf sich beziehenden Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

erörtern, welche uns

$$dt = -\frac{dv}{kv^2},$$

folglich, da für $t = o$, $v = c$ seyn soll,

$$t = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right)$$

$$\text{oder} \quad v = \frac{c}{1 + ckt}$$

gibt, aus welcher Formel erhellet, daß die Geschwindigkeit des Beweglichen bei dem unendlichen Wachsen der Zeit unendlich klein wird.

Um den Raum s zu finden, wenden wir uns zur Formel $ds = v\,dt$, durch welche wir

$$ds = \frac{v\,dv}{g - kv^2},$$

$$\text{also} \quad s = -\frac{1}{2k}\,l\,(g - kv^2) + Const.,$$

$$\text{und wegen} \quad o = -\frac{1}{2k}\,l\,(g - kc^2) + Const.$$

$$s = \frac{1}{2k}\,l\left(\frac{g - kc^2}{g - kv^2}\right)$$

erhalten, worin, wenn man s durch t darstellen will, für v der oben gefundene Ausdruck zu setzen ist. Der Fall $k = o$ kann wieder auf dem oben gezeigten Wege behandelt werden; für $g = o$ aber gibt uns diese Formel sogleich

$$s = \frac{1}{k}\,l\,\frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{k}\,l\,\frac{c}{v} = \frac{1}{k}\,l\,(1 + ckt).$$

II. Lassen wir jetzt die Kraft g der Bewegung des mit der anfänglichen Geschwindigkeit c versehenen materiellen Punctes entgegen wirken.

Wir haben in diesem Falle

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv^2$$

$$\text{oder} \quad dt = -\frac{dv}{g + kv^2}, \quad \text{woraus}$$

$$t = -\frac{1}{\sqrt{gk}}\,Arc.\,tg.\,v\sqrt{\frac{k}{g}} + Const.,$$

und daher wegen

$$o = -\frac{1}{\sqrt{gk}}\,Arc.\,tg.\,c\sqrt{\frac{k}{g}} + Const.$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{gk}} \left[Arc.\ tg.\ c \sqrt{\frac{k}{g}} - Arc.\ tg.\ v \sqrt{\frac{k}{g}} \right]$$

folgt. Die Bewegung hört auf, wenn

$$t = \frac{1}{\sqrt{gk}} Arc.\ tg.\ c \sqrt{\frac{k}{g}}$$

geworden ist, und nimmt sodann die entgegengesetzte Richtung an.

Zur Bestimmung des Raumes dient die Gleichung

$$ds = -\frac{v\,dv}{g + kv^2}.$$

Sie gibt uns

$$s = Const. - \frac{1}{2k} l\,(g + kv^2),$$

wobei $0 = Const. - \frac{1}{2k} l\,(g + kc^2)$

ist; folglich

$$s = \frac{1}{2k} l \left(\frac{g + kc^2}{g + kv^2}\right),$$

welches Resultat wir aus der in 1. erhaltenen Formel unmittelbar durch Änderung des Zeichens von g hätten ableiten können.

Das Bewegliche durchlauft bis zu seinem Stillstande den Raum

$$\frac{1}{2k} l \left(1 + \frac{k}{g} c^2\right).$$

Die hier angestellten Rechnungen enthalten die Theorie des Falles schwerer Körper in der Luft, wie auch der Bewegung vertical aufwärts geworfener Körper, in so ferne man die Schwerkraft als constant annehmen darf. Eben so läßt sich der Einfluß der Reibung auf die gleichförmige und gleichförmig beschleunigte oder verzögerte Bewegung in die Rechnung bringen.

Siebzehnte Vorlesung.

Über die Reduction der Probleme der Dynamik auf jene der Statik im Allgemeinen, und über die Bewegung eines Punctes insbesondere.

Stellen wir uns vor, auf irgend ein System materieller Puncte wirken gegebene, einander nicht gegenseitig aufhebende Kräfte, so können die Angriffspuncte derselben, wegen des unter ihnen bestehenden Zusammenhanges, sich im Allgemeinen weder nach den Richtungen dieser Kräfte, noch mit den Geschwindigkeiten, welche diese Kräfte den genannten Puncten, wenn dieselben isolirt wären, nach Maßgabe der in ihnen vereinigten Massen, ertheilen würden, bewegen, sondern diese Puncte sind genöthiget, andere Richtungen einzuschlagen, und andere Geschwindigkeiten anzunehmen. Bestimmen wir nun die Kräfte, welche an denselben Puncten nach den letztgenannten Richtungen angebracht werden müßten, um sie für sich allein mit den erwähnten Geschwindigkeiten in Bewegung zu setzen, so sind diese Kräfte, nach den gerade entgegengesetzten Richtungen genommen, im Stande, die ganze Wirkung der ursprünglich gegebenen Kräfte auf das vorliegende System materieller Punete zu vernichten, oder, was dasselbe heißt, den letzteren Kräften an diesem Systeme, mit Hülfe der unter seinen Bestandtheilen vorhandenen Verbindung, das Gleichgewicht zu halten.

Dieser einfache, von d'Alembert herrührende, jedoch von ihm in einer anderen Form ausgesprochene Gedanke, verschafft uns den Vortheil, alle Probleme der Dynamik auf Probleme der Statik reduciren, und nach den bereits erklärten, auf dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten beruhenden Methoden behandeln zu können.

Ehe wir zur Anwendung desselben auf die Ausmittelung der Gesetze der Bewegung eines jeden Systems materieller Puncte schreiten, wollen wir den leichteren Fall, wenn das Bewegliche bloß ein einzelner Punct ist, auf welchen bei dem Anfange seiner Bewegung momentane, während derselben aber continuirliche Kräfte einwirken, zuerst vornehmen.

Setzen wir die Masse dieses Punctes $= 1$, und zerlegen wir alle mit demselben am Ende der Zeit t beschäftigten Kräfte parallel zu den

Axen des rechtwinkligen Coordinatensystems, auf welches wir die jedesmalige Position des Beweglichen beziehen.

Die Summen der nach den Richtungen der x, y, z wirkenden Kräfte sollen beziehungsweise durch X, Y, Z vorgestellt werden. Diejenige Kraft, welche diesen Punct während des Zeittheilchens dt gerade so beschleunigt, wie es die Kräfte X, Y, Z thun, zerfällt nach den Richtungen der x, y, z offenbar in die Kräfte $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$; es müssen daher diese letzteren, nach entgegengesetzten Richtungen genommen, den Kräften X, Y, Z das Gleichgewicht halten, oder was dasselbe ist, die nach den Richtungen der x, y, z wirkenden Kräfte

$$(1) \qquad X - \frac{d^2x}{dt^2},\quad Y - \frac{d^2y}{dt^2},\quad Z - \frac{d^2z}{dt^2}$$

müssen an dem bewegten Puncte, wenn derselbe an dem gegenwärtigen Orte seiner Bahn in Ruhe versetzt, und sodann diesen Kräften überlassen wird, im Gleichgewichte bleiben.

Wenden wir nun die in der siebenten Vorlesung erhaltenen Resultate auf den vorliegenden Fall an, so gelangen wir sogleich zu den Differenzialgleichungen der Bewegung, welche in Vereinigung mit den Bedingungsgleichungen, an welche der Punct etwa gebunden ist, zur Beantwortung aller seine Bewegung betreffenden Fragen hinreichen.

Es sey erstlich der bewegte Punct völlig frei, so fordert das Gleichgewicht der Kräfte (1), daß die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} X - \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 & \qquad \frac{d^2x}{dt^2} &= X \\ Y - \frac{d^2y}{dt^2} &= 0 & \text{oder} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} &= Y \\ Z - \frac{d^2z}{dt^2} &= 0 & \qquad \frac{d^2z}{dt^2} &= Z \end{aligned}$$

bestehen. Integrirt man dieselben, so erhält man, je nachdem man x, y, z durch t, oder zwei der genannten Coordinaten durch die dritte ausdrückt, die Position des Beweglichen in jedem beliebigen Augenblicke, oder die Gestalt der Bahn, welcher dasselbe folgt. Da wir ferner annehmen, daß sich jederzeit die Geschwindigkeiten, welche eine und dieselbe Masse durch verschiedene Kräfte erhält, wie diese Kräfte verhalten, also Geschwindigkeiten wie Kräfte zusammengesetzt werden können, so ergibt sich die jedem Augenblicke, oder jedem Orte der Bahn zugehörige Geschwindigkeit des bewegten Punctes, welche wir v nen-

nen wollen, durch die Formel

$$v = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}} = \frac{ds}{dt},$$

worin die Differenzialquotienten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die Geschwindigkeiten des Beweglichen im Puncte x, y, z seiner Bahn nach den Richtungen der correspondirenden Coordinaten angeben, und ds das Differenzial eines im genannten Puncte sich endigenden Bogens ist.

Um die in den allgemeinen Integralien der Gleichungen (2) erscheinenden Constanten bestimmen zu können, muß die Größe und Richtung der Geschwindigkeit des Beweglichen am Anfange der Zeit t entweder unmittelbar gegeben seyn, oder durch besondere Betrachtung der in diesem Augenblicke wirksamen momentanen Kräfte bestimmt werden.

Multiplicirt man die Gleichungen (2) der Reihe nach mit $2dx$, $2dy$, $2dz$, und addirt man sie sodann, so hat man

$$\frac{2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y + 2dz\,d^2z}{dt^2} = 2(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Aber die Gleichung $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ gibt uns

$$2ds\,d^2s = 2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y + 2dz\,d^2z,$$

daher ist $\frac{2ds\,d^2s}{dt^2} = 2(Xdx + Ydy + Zdz)$,

und in so ferne die Differenzialformel rechter Hand des Gleichheitszeichens integrirt werden kann,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = 2\int(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Setzen wir

$$\int(Xdx + Ydy + Zdz) = F(x, y, z),$$

und bezeichnen wir die Coordinaten des Beweglichen am Anfange der Zeit t durch ξ, v, ζ, und die Geschwindigkeit desselben in diesem Augenblicke durch k, so erhalten wir

(3) $$v^2 = c^2 - 2F(\xi, v, \zeta) + 2F(x, y, z),$$

wodurch die dem Puncte x, y, z der Bahn entsprechende Geschwindigkeit gegeben ist. Allein häufig ist die Differenzialformel

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

nicht integrabel, wie wir in der Folge sehen werden, und somit ist auch dieses Verfahren nicht immer anwendbar.

Besonders merkwürdig ist die Bewegung eines Punctes, welcher stets von einem fixen Puncte mit einer von dem Abstande beider abhängenden Kraft angezogen wird. Wirkt im Anfange der Bewegung auf den ersteren Punct eine momentane Kraft, deren Richtung nicht durch den fixen Punct geht, so ist die Bewegung keine geradlinige, und heißt in diesem Falle eine Centralbewegung.

Nehmen wir den fixen Punct zum Anfangspuncte der Coordinaten, und nennen wir den zu irgend einem Orte x, y, z seiner Bahn gezogenen Radiusvector r, und die das Bewegliche ohne Aufhören afficirende Centralkraft R, wobei $R = \varphi(r)$ ist, so haben wir, da $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ die Cosinusse der Winkel sind, welche r mit den Axen der x, y, z bildet, und für die Winkel der Richtung von R mit denselben Axen die Nebenwinkel der ersteren genommen werden müssen,

$$X = -R \cdot \frac{x}{r},\quad Y = -R \cdot \frac{y}{r},\quad Z = -R \cdot \frac{z}{r},$$

folglich

$$Xdx + Ydy + Zdz = -R\left(\frac{xdx + ydy + zdz}{r}\right).$$

Es ist aber $\quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$

mithin $\quad xdx + ydy + zdz = rdr,$

wir haben also

$$Xdx + Ydy + Zdz = -Rdr = -\varphi(r)\,dr,$$

woraus erhellet, daß die Differenzialformel $Xdx + Ydy + Zdz$ im gegenwärtigen Falle eine integrable ist.

Setzen wir

$$\int \varphi(r)\,dr = F(r),$$

und bezeichnen wir die Größe des Radiusvectors r am Anfange der Zeit t durch h, so haben wir

$$v^2 = c^2 + 2F(h) - 2F(r) \quad \text{und}$$

$$(4) \qquad v = \sqrt{c^2 + 2F(h) - 2F(r)}.$$

Diese Gleichung ist offenbar ein erstes Integral der zur zweiten Ordnung gehörenden Differenzialgleichungen

$$(5) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -R \cdot \frac{x}{r},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -R \cdot \frac{y}{r},\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -R \cdot \frac{z}{r}$$

der vorliegenden Bewegung.

Um noch andere Integralien der Gleichungen (5) zu erhalten,

multipliciren wir die erste Gleichung mit y, die zweite mit x, und ziehen sodann jene von dieser ab, so ergibt sich

$$\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt} = 0.$$

Nun ist aber, wie man leicht sieht,

$$x\,d^2y - y\,d^2x = d(x\,dy - y\,dx),$$

folglich haben wir $\frac{d(x\,dy - y\,dx)}{dt} = 0$, mithin

(6) $$x\,dy - y\,dx = A\,dt,$$

wobei A eine beständige Größe vorstellt. Auf dieselbe Art geben uns die zwei anderen Verbindungen, welche noch zwischen den Gleichungen (5) Statt finden,

(7) $$z\,dx - x\,dz = B\,dt,$$
$$y\,dz - z\,dy = C\,dt,$$

wobei B und C ebenfalls beständige Größen sind. Multipliciren wir jetzt die Gleichungen (6) und (7) der Reihe nach mit z, y, x, so finden wir, durch Addition der Producte, und Division der Summe durch dt,

(8) $$Az + By + Cx = 0.$$

Dieß ist die Gleichung einer durch den Anfangspunct der Coordinaten gelegten Ebene; es befindet sich demnach die Curve, welche der Punct bei seiner Bewegung beschreibt, ganz in einer solchen Ebene.

Wir wollen nun die Bedeutung der Größen $x\,dy - y\,dx$, $z\,dx - x\,dz$, $y\,dz - z\,dy$ in Erwägung ziehen, zu welchem Ende es hinreicht, bloß die erste derselben zu betrachten. Offenbar ist

$$x\,dy - y\,dx = x^2\,d\frac{y}{x},$$

folglich, wenn wir die Projection des Radiusvectors r auf die Ebene xy durch r_1, und den Winkel, unter welchem diese Projection gegen die Axe der x geneigt ist, durch θ vorstellen, wegen

$$x = r_1 \cos.\theta \quad \text{und} \quad d\frac{y}{x} = d\,tg.\theta = \frac{d\theta}{\cos.\theta^2},$$

$$x\,dy - y\,dx = r_1^2\,d\theta.$$

Aber $\frac{1}{2} r_1^2\,d\theta$ ist das Differenzial der Fläche S_1, durch welche sich die Projection r_1 während der Zeit t bewegt hat, mithin ist $x\,dy - y\,dx$ das Doppelte dieses Differenzials. Hieraus folgt nun

$$dS_1 = \tfrac{1}{2} A\, dt,$$

und demnach, weil S_1 mit t zugleich verschwindet,

(9) $$S_1 = \tfrac{1}{2} A t.$$

Nennen wir die Fläche, welche der Radiusvector r selbst während seiner Bewegung durchstreicht, S, so können wir, da S_1 ohne Zweifel die Projection von S auf die Ebene xy darstellt, und dieselben Schlüsse auch in Bezug auf die anderen coordinirten Ebenen gelten, den Satz aussprechen, daß die Projectionen der Fläche, welche der aus dem Centralpuncte zu dem Beweglichen gehende Radiusvector bei der Centralbewegung durchstreicht, auf die coordinirten Ebenen, in demselben Verhältnisse wachsen, wie die Zeit. Die von dem Beweglichen beschriebene Curve ist, wie wir bereits gesehen haben, eine ebene; nehmen wir die Ebene derselben für jene der xy an, so ergibt sich uns dieser Satz auch für den Flächenraum S selbst.

Die so eben erwähnte Lage der Ebene xy vereinfacht auch die ganze übrige Rechnung, und deßhalb wollen wir sie jetzt beibehalten. Wegen $r_1 = r$ haben wir also

(10) $$r^2 d\theta = A\, dt.$$

Hinsichtlich der Bestimmung der Constante A bemerken wir, daß, wenn α den Winkel anzeigt, welchen die Richtung der am Anfange der Zeit t Statt findenden Geschwindigkeit c des Beweglichen mit dem diesem Augenblicke zugehörigen Radiusvector h bildet,

$$r\, d\theta = c\, dt \, . \, \sin. \alpha$$

ist, folglich $A\, dt = h \, . \, c\, dt \sin. \alpha$, und daher

(11) $$A = h c \sin. \alpha.$$

Um die Gleichung der Bahn, welche der bewegte Punct durchlauft, zu erhalten, setzen wir in die mit (4) gleichbedeutende Gleichung

$$\frac{ds^2}{dt^2} = c^2 + 2F(h) - 2F(r)$$

$dr^2 + r^2 d\theta^2$ statt ds^2, und vermöge (10) $\frac{r^2 d\theta}{A}$ statt dt, so finden wir, wenn wir zugleich der Kürze wegen

$$c^2 + 2F(h) = H$$

seyn lassen,

$$A^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2) = (H - 2F(r))\, r^4 d\theta^2, \quad \text{mithin}$$

(12) $$d\theta = \pm \frac{A\, dr}{r \sqrt{(H - 2F(r))\, r^2 - A^2}},$$

wobei vor dem rechter Hand des Gleichheitszeichens erscheinenden Bruche das Zeichen + oder — zu nehmen ist, je nachdem r und θ bei dem Anfange der Bewegung zugleich wachsen oder nicht, oder was dasselbe heißt, je nachdem der Winkel α stumpf oder spitzig ist.

Die Gleichung zwischen r und θ, welche sich durch Integration der Differenzialformel (12) ergibt, ist die Polargleichung der Bahn des Beweglichen, welche man leicht durch rechtwinklige Coordinaten darstellen kann.

Verbinden wir (12) mit (10), so haben wir

$$(13) \qquad dt = \pm \frac{r\,dr}{\sqrt{(H - 2F(r))\,r^2 - A^2}},$$

wodurch wir in den Stand gesetzt werden, die Position des Beweglichen in jedem beliebigen Augenblicke anzugeben.

Ist dem Beweglichen die krumme Linie, deren Differenzialgleichungen

$$(14) \qquad dy = p\,dx, \quad dz = q\,dx$$

sind, als Bahn vorgeschrieben; d. h. kann es auf dieser Linie ungehindert fortschreiten, aber dieselbe nicht verlassen, so müssen sich die Kräfte

$$X - \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

an dieser Curve das Gleichgewicht halten, wodurch sich (siebente Vorlesung) die Gleichung

$$(15) \quad X - \frac{d^2x}{dt^2} + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)p + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)q = 0$$

ergibt, welche, mit den Gleichungen (14) verbunden, die Beschaffenheit der Bewegung eines Punctes auf einer gegebenen Curve vollständig ausdrückt. Schaffen wir aus (15) p und q weg, so haben wir

$$\frac{dx\,d^2x}{dt^2} + \frac{dy\,d^2y}{dt^2} + \frac{dz\,d^2z}{dt^2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

folglich, wenn die Differenzialformel $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ integrabel ist, und ds, v, c, ξ, υ, ζ, F die obige Bedeutung beibehalten,

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = c^2 - 2F(\xi, \upsilon, \zeta) + 2F(x, y, z).$$

Unter der Voraussetzung, daß $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ eine integrable Differenzialformel ist, hängt demnach die in jedem Puncte der Bahn des Beweglichen Statt findende Geschwindigkeit bloß von der

anfänglichen Geschwindigkeit und der Position der beiden Puncte ab, welchen die genannten Geschwindigkeiten gehören, nicht aber von der Gestalt der Bahn selbst. Zugleich sieht man, daß, in so ferne das Gesetz, nach welchem die Kräfte X, Y, Z wirken, dasselbe bleibt, ferner die Bewegung mit derselben Geschwindigkeit beginnt, und A und B constante Größen bedeuten, ein Bewegliches, welches von irgend einem Puncte der Fläche $F(x, y, z) = A$ ausgeht, sobald es die Fläche $F(x, y, z) = B$ erreicht, stets dieselbe Endgeschwindigkeit erlangt, die Bahn, welche es beschrieb, mag wie immer beschaffen seyn.

Wird das Bewegliche bloß in dem ersten Augenblicke seiner Bewegung von einer Kraft afficirt, oder, nachdem es eine gewisse Geschwindigkeit erhalten hat, sich selbst überlassen, so ist $X = o$, $Y = o$, $Z = o$, folglich $F(x, y, z) = F(\xi, v, z)$ = einer Constanten, und daher $v = k$. Die Bewegung erfolgt demnach unter diesen Umständen in jeder Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit.

Bei jeder Bewegung auf einer vorgeschriebenen Bahn erleidet dieselbe einen Druck, dessen Größe, wie eine leichte Überlegung lehrt, durch die Resultirende der Kräfte

$$X - \frac{d^2 x}{d t^2},\ Y - \frac{d^2 y}{d t^2},\ Z - \frac{d^2 z}{d t^2}$$

bestimmt wird, welche einander mittelst dieser Bahn das Gleichgewicht halten, folglich

$$= \sqrt{\left(X - \frac{d^2 x}{d t^2}\right)^2 + \left(Y - \frac{d^2 y}{d t^2}\right)^2 + \left(Z - \frac{d^2 z}{d t^2}\right)^2} \text{ ist.}$$

Dieser Druck kann auch als das Resultat der Zusammensetzung der auf die gegebene Bahn normalen Antheile der Kräfte X, Y, Z und $-\frac{d^2 x}{d t^2}$, $-\frac{d^2 y}{d t^2}$, $-\frac{d^2 z}{d t^2}$ betrachtet werden. Der numerische Werth der Resultirenden der drei letztgenannten Kräfte ist

$$= \frac{\sqrt{d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2}}{d t^2},$$

und ihre Richtung ist gegen jene der Axen der x, y, z unter Winkeln geneigt, welchen die Cosinusse

$$\frac{-d^2 x}{\sqrt{d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2}},\ \frac{-d^2 y}{\sqrt{d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2}},\ \frac{-d^2 z}{\sqrt{d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2}}$$

gehören. Die Gleichungen dieser Richtung sind also

$$x' - x = \frac{d^2 x}{d^2 z}(z' - z);\quad y' - y = \frac{d^2 y}{d^2 z}(z' - z).$$

Hält man dieselben mit den Gleichungen der zu dem Puncte x, y, z der Bahn gezogenen Tangente, nämlich mit

$$x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z); \quad y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z)$$

zusammen, so findet man, daß die Richtung der erwähnten Resultirenden in die Krümmungsebene der Bahn fällt.

Die Kraft, welche diese Resultirende, nach der Tangente der Bahn des Beweglichen zerlegt, darbietet, ist, wie man leicht findet,

$$= \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds\,dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

folglich die Größe des durch die Kräfte $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\frac{d^2z}{dt^2}$ hervorgebrachten Druckes auf diese Bahn

$$= \frac{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}}{dt};$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichung $dt = \frac{ds}{v}$, und auf den Werth des Krümmungshalbmessers ρ der Bahn in dem Puncte x, y, z (achtzehnte Vorlesung über die anal. Geom. (7))

$$= \frac{v^2}{\rho}.$$

Die Richtung dieses Druckes ist jene der Verlängerung des Krümmungshalbmessers ρ über die Curve hinaus.

Wird das Bewegliche, nachdem es die Geschwindigkeit v erlangt hat, sich selbst überlassen, so ist diese Kraft, mit welcher es seine krummlinige Bahn vermöge der Trägheit zu verlassen strebt, allein thätig. Man nennt dieselbe die Centrifugalkraft.

Die Betrachtung der Bewegung eines Punctes auf einer krummen Fläche hat, nach dem hier Angedeuteten, keine Schwierigkeit, daher wir dieselbe hier füglich übergehen können.

Wir bemerken nur noch, daß auch bei der Bewegung eines Punctes auf einer Fläche die Gleichung (3) Statt findet, und daß ein Punct, welcher von keiner continuirlichen Kraft afficirt wird, sondern bloß vermöge seiner Trägheit auf einer Fläche fortschreitet, die kürzeste Linie beschreibt, welche zwischen je zwei Puncten seiner Bahn auf dieser Fläche gezogen werden kann.

Achtzehnte Vorlesung.

Über die Anwendung der in der vorhergehenden Vorlesung entwickelten Formeln auf einige specielle Fälle.

I. Unter den möglichen Centralbewegungen eines Punctes ist, ihrer practischen Anwendbarkeit auf die Theorie der Planeten und Kometen wegen, vorzüglich diejenige merkwürdig, welche durch eine, dem Quadrate der Entfernung des sich bewegenden Punctes vom Centralpuncte verkehrt proportionirte Centralkraft hervorgebracht wird.

In Bezug auf dieselbe ist

$$R = \frac{k}{r^2},$$

wobei k die Intensität der Centralkraft in der Entfernung 1 vom Centralpuncte vorstellt, mithin

$$F(r) = \int R\,dr = k\int\frac{dr}{r^2} = -\frac{k}{r},$$

und die dem Radiusvector r entsprechende Geschwindigkeit

$$(1) \qquad v = \sqrt{c^2 - \frac{2k}{h} + \frac{2k}{r}},$$

wobei h die Größe des Radiusvectors r, und c die Geschwindigkeit des Beweglichen am Anfange der Zeit t ist.

Aus dieser Formel erhellet sogleich, daß die Geschwindigkeit des Beweglichen in seiner Bahn zunimmt, wenn dasselbe dem Centralpuncte näher tritt, und abnimmt, wenn dasselbe sich von dem genannten Puncte entfernt.

Zur Bestimmung der Beschaffenheit der Bahn selbst muß die Differenzialformel

$$d\theta = \pm\frac{A\,dr}{r\sqrt{\left(H + \frac{2k}{r}\right)r^2 - A^2}} = \pm\frac{A\,dr}{r\sqrt{-A^2 + 2kr + Hr^2}},$$

integrirt werden, in welcher θ die Abweichung des Radiusvectors r von seiner am Anfange der Zeit t Statt findenden Lage anzeigt, und, in so ferne α den Winkel der Richtungen von c und h bedeutet, der Kürze wegen

$$A = h\,c\,\sin.\alpha, \quad H = c^2 - \frac{2k}{h}$$

gesetzt worden ist. Wir finden (neun und vierzigste Vorlesung, über die Analysis (35))

$$\theta + Const. = \pm\, Arc.\sin. \frac{k.r - A^2}{r\sqrt{A^2H + k^2}},$$

oder, wenn wir $Const. \pm \frac{\pi}{2}$ statt $Const.$ schreiben,

$$\theta + Const. = \mp\, Arc.\cos. \frac{k\,r - A^2}{r\sqrt{A^2H + k^2}},$$

woraus $\frac{k\,r - A^2}{r\sqrt{A^2H + k^2}} = \cos.(\theta + Const.)$

oder $k\,r = A^2 + r\sqrt{A^2H + k^2}\,.\cos.(\theta + Const.)$

folgt, welches die Polargleichung der Bahn des Beweglichen ist. Um dieselbe auf rechtwinklige Coordinaten zu reduciren, und ihr dabei die einfachste Gestalt zu ertheilen, legen wir die Axe der x durch den Centralpunct, dergestalt, daß der Radiusvector r mit ihr den Winkel $\theta + Const.$ bildet, so ist

$$r\cos.(\theta + Const.) = x$$

und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Hiedurch verwandelt sich obige Gleichung in

(2) $$k\,r = A^2 + x\sqrt{A^2H + k^2}$$

oder in

(3) $$k^2y^2 - A^2Hx^2 - 2A^2\sqrt{A^2H + k^2}\,.\,x - A^4 = 0,$$

welche einer Linie der zweiten Ordnung gehört. Da sich, wie die Gleichung (2) zeigt, der Radiusvector durch die von dem Centralpuncte ausgehende Abscisse x rational darstellen läßt, so ist der Centralpunct nothwendig der Brennpunct, und $\frac{\sqrt{A^2H + k^2}}{k}$ die Excentricität der erwähnten Linie.

Ob die Bahn des Beweglichen eine Ellipse, eine Hyperbel, oder eine Parabel ist, wird einzig und allein durch die Beschaffenheit der Größe $H = c^2 - \frac{2k}{h}$ bestimmt. Ist diese Größe negativ, d. h. ist $c^2 < \frac{2k}{h}$, so beschreibt dee bewegte Punct eine Ellipse; ist H positiv, oder $c^2 > \frac{2k}{h}$, so beschreibt derselbe eine Hyperbel; ist endlich

$H = o$, oder $c^2 = \frac{2k}{h}$, so ist seine Bahn eine Parabel. Man sieht hieraus, daß die Gestalt der Bahn, der Gattung nach, bloß von der Energie der Anziehung, welche der Centralpunct auf das Bewegliche ausübt, von der anfänglichen Entfernung desselben vom Centralpuncte, und von der anfänglichen Geschwindigkeit, nicht aber von der Richtung dieser Geschwindigkeit abhängt, da der Winkel α, welcher die genannte Richtung festsetzt, in H nicht erscheint. Jedoch hat die Größe dieses Winkels auf die Dimensionen der Bahn Einfluß, wie aus den folgenden Betrachtungen erhellen wird.

Soll das Bewegliche einen Kreis beschreiben, so müssen in der so eben gefundenen Gleichung die Coefficienten von x^2 und y^2 einander gleich, und mit demselben Zeichen versehen seyn, wozu das Stattfinden der Gleichung

$$k^2 = -A^2 H \quad \text{oder} \quad A^2 H + k^2 = o$$

erfordert wird. Der Ausdruck für den Radiusvector r gibt uns unter dieser Voraussetzung

$$r = \frac{A^2}{k} = h;$$

daher wird, wenn man diese Gleichung mit der vorhergehenden verbindet,

$$hH + k = o,$$

oder nach vollzogener Substitution des Werthes von H,

$$hc^2 - 2k + k = o,$$

$$\text{folglich} \quad k = hc^2.$$

Der Ausdruck der Centralkraft R ist für jeden Punct der Kreisbahn $= \frac{k}{h^2}$, daher wird diese Kraft durch die Formel

$$R = \frac{c^2}{h}$$

angegeben.

Da in dem hier betrachteten Falle $A^2 = hk = h^2 c^2$ oder $A = hc$, und überhaupt $A = hc\, sin.\, \alpha$ ist, so folgt nothwendig $sin.\, \alpha = 1$, oder $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Es kann daher nur in so ferne bei der vorliegenden Bewegung ein Kreis beschrieben werden, als die anfängliche Geschwindigkeit des bewegten Punctes eine auf den zugehörigen Radiusvector senkrechte Richtung hat, was auch aus der Natur des Kreises von selbst erhellet.

Es ist nicht schwer zu beweisen, daß, wie auch immer die Centralkraft mit der Entfernung des Beweglichen vom Centralpuncte variiren mag, sobald die Bahn desselben kreisförmig ist und der Mittelpunct des Kreises in den Centralpunct fällt, die Größe der Centralkraft, für die hiebei constante Entfernung des Beweglichen vom Centralpuncte, durch die Formel $R = \frac{c^2}{h}$ oder $\frac{v^2}{r}$ ausgedrückt wird. Denn verbinden wir die Gleichungen

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - R \cdot \frac{x}{r}, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = - R \cdot \frac{y}{r}$$

mit der Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$, so erhalten wir, da uns diese letztere

$$x d x + y d y = 0, \quad \text{folglich} \quad x d^2 x + y d^2 y + d s^2 = 0$$

gibt,

$$R \left(\frac{x^2 + y^2}{r}\right) = \frac{d s^2}{d t^2}, \quad \text{d. h.} \quad R = \frac{v^2}{r}.$$

Um die Zeit kennen zu lernen, welche verfließt, bis das Bewegliche in einem bestimmten Orte seiner Bahn ankömmt, muß die Differenzialformel

$$d t = \pm \frac{r d r}{\sqrt{- A^2 + 2 k r + H r^2}}$$

integrirt werden. Wir erhalten

$$(4) \quad t = \pm \left[\frac{\sqrt{- A^2 + 2 k r + H r^2}}{H} - \frac{k}{H} \int \frac{d r}{\sqrt{- A^2 + 2 k r + H r^2}}\right].$$

Das rechter Hand des Gleichheitszeichens befindliche Integral erscheint nach beendigter Rechnung entweder unter der Gestalt eines Kreisbogens, oder eines Logarithmus, oder es fällt algebraisch aus, je nachdem H negativ, positiv, oder gleich Null ist.

Ziehen wir den ersten Fall, in welchem das Bewegliche eine Ellipse beschreibt, besonders in Erwägung. Es ergibt sich für denselben

$$\int \frac{d r}{\sqrt{- A^2 + 2 k r + H r^2}} = - \frac{1}{\sqrt{- H}} \, Arc. \sin. \frac{H r + k}{\sqrt{A^2 H + k^2}}.$$

Substituiren wir dieses Resultat in den obigen Ausdruck für t mit Hinzufügung einer Constante, so unterscheiden sich die Zeiten, nach deren Verlauf r dieselbe Größe erlangt, bloß durch die Größe des in dem erwähnten Ausdrucke vorhandenen Kreisbogens. Eine leichte Überlegung lehrt, daß sich dieser Kreisbogen binnen eines vollständigen Um-

laufes des Beweglichen in seiner Bahn um die ganze Peripherie ändert; wir haben demnach, wenn wir die Umlaufszeit durch T vorstellen,

$$(5) \qquad T = -\frac{2\pi k}{H\sqrt{-H}}.$$

Die große Axe der Ellipse ergibt sich aus der obigen allgemeinen Gleichung der Bahn des Beweglichen, wenn man die Summe der numerischen Werthe jener Abscissen nimmt, für welche die Ordinate y verschwindet. Bezeichnen wir die Hälfte dieser Axe durch a, so finden wir

$$a = -\frac{k}{H}, \quad \text{folglich} \quad H = -\frac{k}{a},$$

und hiedurch wird

$$T = \frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{k}} \quad \text{oder} \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{k}.$$

Hieraus erhellet, daß bei zwei verschiedenen, nach dem oben aufgestellten Gesetze der Wirksamkeit der Centralkraft und bei einerlei Intensität derselben für die Entfernung 1, in elliptischen Bahnen vor sich gehenden Centralbewegungen, sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Würfel der größeren Axen verhalten.

II. Unter den mannigfaltigen freien Bewegungen eines materiellen Punctes ist noch jene einer Untersuchung werth, welche derselbe vermöge der als constant betrachteten Schwerkraft und einer am Anfang der Bewegung von der verticalen Richtung abweichenden momentanen Kraft, sowohl im leeren Raume, als auch im widerstehenden Mittel, annimmt.

Da in diesem Falle die von dem Beweglichen beschriebene Curve ohne Zweifel eine ebene ist, weil sich kein Grund denken läßt, warum sie eher auf der einen als auf der anderen Seite der, durch die Richtung der anfänglichen momentanen Kraft gelegten, verticalen Ebene sich befinden sollte, so wollen wir die Ebene dieser Curve für jene der xy, und die Richtung der positiven y vertical, und jener der Schwere entgegengesetzt wählen. Bezeichnen wir nun die Intensität der Schwerkraft durch g, so haben wir für die Bewegung des Punctes im leeren Raume die Gleichungen

$$(6) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Aus der ersten derselben folgt durch Integration

$$\frac{dx}{dt} = Const.$$

Aber $\frac{dx}{dt}$ ist die nach der Richtung der x zerlegte Geschwindigkeit des Beweglichen; mithin, wenn wir die der momentanen Kraft entsprechende Geschwindigkeit, mit welcher die Bewegung beginnt, durch c, und die Neigung dieser Kraft gegen die Axe der x durch α vorstellen,

$$\frac{dx}{dt} = c\, cos.\, \alpha.$$

Eben so gibt uns die zweite Gleichung

$$\frac{dy^2}{dt^2} = c^2\, sin.\, \alpha^2 - 2gy \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{c^2\, sin.\, \alpha^2 - 2gy},$$

$$\text{daher ist} \quad dx = \frac{c\, cos.\, \alpha\, .\, dy}{\sqrt{c^2\, sin.\, \alpha^2 - 2gy}},$$

$$\text{also} \quad x = Const. - \frac{c\, cos.\, \alpha}{g} \sqrt{c^2\, sin.\, \alpha^2 - 2gy}.$$

Nehmen wir den Punct, von welchem das Bewegliche mit Anfang der Zeit t ausgeht, für den Anfangspunct der Coordinaten an, d. h. lassen wir x und y zugleich verschwinden, so haben wir

$$Const. = \frac{c^2\, sin.\, \alpha\, .\, cos.\, \alpha}{g},$$

$$\text{daher} \quad \frac{c^2\, sin.\, \alpha\, .\, cos.\, \alpha}{g} - x = \frac{c\, cos.\, \alpha}{g} \sqrt{c^2\, sin.\, \alpha^2 - 2gy},$$

woraus nach Wegschaffung der Wurzelgröße

$$(7) \qquad y = x\, tg.\, \alpha - \frac{g}{2c^2\, .\, cos.\, \alpha^2}\, x^2$$

folgt, eine Gleichung, welche offenbar einer Parabel gehört, deren Hauptaxe vertical steht.

Betrachten wir jetzt diese Bewegung mit Rücksicht auf den Widerstand eines Mittels, welchen wir, wie es bereits früher geschehen ist, dem Quadrate der Geschwindigkeit des Beweglichen proportional annehmen und, in Bezug auf die Geschwindigkeit v, durch kv^2 vorstellen, wobei k die Größe dieses Widerstandes für die Geschwindigkeit 1 anzeigt. Da, unserer gewöhnlichen Bezeichnung gemäß, $v = \frac{ds}{dt}$ ist, und der erwähnte Widerstand als eine der Richtung der Bewegung entgegenwirkende Kraft angesehen werden kann, mithin, weil $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{dy}{ds}$ die Cosinusse der Winkel sind, welche die zu dem Puncte x, y der

Bahn gezogene Tangente mit den Axen der x und y bildet, in die den Axen der x und y parallelen Kräfte $-k\frac{ds^2}{dt^2}\cdot\frac{dx}{ds}$ und $-k\frac{ds^2}{dt^2}\cdot\frac{dy}{ds}$ zerfällt, so erhalten wir folgende Differenzialgleichungen der vorliegenden Bewegung:

$$(8)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Die erste derselben gibt uns

$$\frac{d^2x}{dt}:\frac{dx}{dt} = -k\,ds,$$

$$\text{mithin}\quad l\frac{dx}{dt} = Const. - ks.$$

Haben nun c und α dieselbe Bedeutung, wie oben, und fällt der Anfangspunct der Coordinaten wieder mit dem Puncte zusammen, in welchem sich das Bewegliche am Anfange der Zeit t befindet, so ist, in so ferne s von demselben Puncte an gerechnet wird,

$$l\,c\,cos.\,\alpha = Const.,$$

$$\text{also}\quad l\,\frac{1}{c\,cos.\,\alpha}\cdot\frac{dx}{dt} = -ks \quad \text{und}$$

$$(9)\qquad \frac{dx}{dt} = c\,cos.\,\alpha\,.\,e^{-ks}.$$

Um die zweite der obigen Differenzialgleichungen integriren zu können, sey $\frac{dy}{dx} = p$ oder $dy = p\,dx$, so haben wir

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + p\,\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} - kp\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

Es ist also auch

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} - kp\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} = -g - k\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt},$$

welche Gleichung sich wegen $p\,dx = dy$ auf

$$(10)\qquad \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} = -g$$

reducirt. Aber es ist, dem früher gefundenen Integrale zu Folge,

$$dt = \frac{dx}{c\,cos.\,\alpha}\,e^{ks},$$

mithin

$$(11)\qquad \frac{dp}{dx} = -\frac{g\,e^{2ks}}{c^2\,cos.\,\alpha^2}.$$

Schafft man aus dieser Gleichung mittelst

$$ds = dx\sqrt{1+p^2}$$

dx weg, so ergibt sich

$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{g e^{2ks} ds}{c^2 \cos. a^2},$$

eine Gleichung, deren Integration keiner Schwierigkeit unterliegt. Wir finden

$$p\sqrt{1+p^2} + l(p+\sqrt{1+p^2}) = Const. - \frac{g e^{2ks}}{c^2 k . \cos. a^2}.$$

Um die Constante zu bestimmen, bemerken wir, daß für den Punct, von welchem das Bewegliche ausgeht,

$$s = 0 \quad \text{und} \quad p = tg. a$$

ist; es ist also

$$Const. = tg. a . \sqrt{1+tg. a^2} + l(tg. a + \sqrt{1+tg. a^2}) + \frac{g}{c^2 k . \cos. a^2},$$

wofür wir der Kürze wegen C schreiben wollen, und daher, wenn wir die Gleichungen (11) und (10) berücksichtigen:

$$(12) \qquad dx = \frac{dp}{k[p\sqrt{1+p^2} + l(p+\sqrt{1+p^2}) - C]},$$

$$dy = \frac{p\,dp}{k[p\sqrt{1+p^2} + l(p+\sqrt{1+p^2}) - C]},$$

$$dt = -\frac{dp}{\sqrt{gk[C - p\sqrt{1+p^2} - l(p+\sqrt{1+p^2})]}}.$$

In der letzten Formel muß die Wurzelgröße mit dem Zeichen — genommen werden, weil augenscheinlich p abnimmt, wenn x wächst.

Wäre es möglich, die Integralien dieser Differenzialformeln in geschlossenen Ausdrücken darzustellen, so dürfte man nur nach vollbrachter Integration aus den beiden ersten, oder aus einer derselben und der dritten, die Größe p wegschaffen, um im ersten Falle die Gleichung der Bahn des Beweglichen, und im zweiten den Ausdruck der Zeit, welche bis zur Ankunft des Beweglichen in einem gegebenen Puncte verfließt, vor Augen zu haben.

Da nun aber die Integration der Formeln (12) in geschlossenen Ausdrücken nicht angeht, so muß man sich mit einer, nach der Formel (4) oder (5) der neun und vierzigsten Vorlesung über die Analysis zu vollziehenden, annäherungsweisen Berechnung der jedem einzelnen Werthe von p entsprechenden Werthe von x, y, t begnügen.

Die Geschwindigkeit v des Beweglichen in jedem Orte seiner Bahn wird, der Gleichung $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = (1 + p^2)\frac{dx^2}{dt^2}$ gemäß, mit Rücksicht auf die obigen Resultate, durch die Formel

(13) $$v = \sqrt{\frac{g(1+p^2)}{k[C - p\sqrt{1+p^2} - l(p + \sqrt{1+p^2})]}}$$

gegeben.

Es läßt sich leicht zeigen, daß der niedersteigende Ast der Bahn des Beweglichen sich einer verticalen Asymptote unendlich nähert. Denn nimmt man den höchsten Punct der Bahn zum Anfangspuncte der Coordinaten an, und läßt die Axen der x' und y' jenen der x und $-y$ parallel seyn, so findet man, wenn ξ und v die Coordinaten des neuen Anfangspunctes im vorigen Systeme darstellen,

$$x = \xi + x', \quad y = v - y',$$

mithin $dx = dx'$, $dy = -dy'$,

und wenn wir $\frac{dy'}{dx'} = p'$ setzen, $p = -p'$.

Demnach ist, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$l(-p' + \sqrt{1+p'^2}) = -l\left(\frac{1}{-p' + \sqrt{1+p'^2}}\right) = -l(p' + \sqrt{1+p'^2}),$$

$$dx' = \frac{dp'}{k[p'\sqrt{1+p'^2} + l(p' + \sqrt{1+p'^2}) + C]},$$

$$dy' = \frac{p'dp'}{k[p'\sqrt{1+p'^2} + l(p' + \sqrt{1+p'^2}) + C]}.$$

Für sehr große Werthe von p' kann man p' statt $\sqrt{1+p'^2}$ schreiben, und $l(p' + \sqrt{1+p'^2}) + C$ in Bezug auf diese Größe vernachlässigen, daher wird hinsichtlich des unendlichen Wachsens von p'

$$dx' = \frac{dp'}{kp'^2}, \quad dy' = \frac{dp'}{kp'^2},$$

also $$x' = A - \frac{1}{kp'}, \quad y' = B + \frac{1}{k}lp',$$

wobei A und B beständige Größen sind. Da nun bei dem unendlichen Wachsen von p', y' unendlich zunimmt, während x' an die endliche Grenze A gebunden ist, so sehen wir die Richtigkeit obiger Behauptung bestätiget.

Neunzehnte Vorlesung.

Über die Bewegung eines schweren Punctes auf dem Kreise und auf der Cykloide.

Wird ein materieller Punct, welcher auf einer gegebenen Curve zu bleiben genöthigt ist, durch eine unveränderliche, stets einer bestimmten geraden Linie parallel wirkende continuirliche Kraft, z. B. durch die Schwere, in so ferne man nämlich dieselbe als eine solche Kraft betrachten darf, in Bewegung gesetzt, so haben wir, wenn wir die Axe der x vertical und ihren positiven Theil aufwärts gerichtet annehmen, und die Intensität der Schwere g nennen, in unseren früheren Formeln

$$X = -g, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

also $\int(Xdx + Ydy + Zdz) = -gx$,

und daher für die Geschwindigkeit des Beweglichen den Ausdruck

$$(1) \qquad v = \sqrt{2g(h-x)},$$

worin h die Abscisse des Punctes, von welchem das Bewegliche ausging, folglich $h-x$ die Höhe, welche es fallend zurücklegte, anzeigt, von der, wie man sieht, die erlangte Geschwindigkeit einzig und allein abhängt.

Bezeichnen wir den Bogen, über welchen das Bewegliche während der Zeit t herabgleitet, durch s, so ist wegen $ds = vdt$:

$$(2) \qquad dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}}.$$

Wird mittelst der Gleichungen der gegebenen Curve s durch x, oder x durch s dargestellt, und das vorliegende Differenzial so integrirt, daß es für $x = h$, oder für $s = 0$ verschwindet, so lernen wir die Zeit kennen, welche das Bewegliche benöthiget, um ein bestimmtes Stück seiner Bahn zu durchlaufen.

Wir wollen nun die Formel (2) auf einige besondere Fälle anwenden.

I. Es sey die dem materiellen Puncte vorgezeichnete Bahn ein mit dem Halbmesser a beschriebener Kreis.

Versetzen wir den Anfangspunct der Coordinaten in den tiefsten

Punct desselben, und betrachten wir seine Ebene als jene der xy, so gibt uns die Gleichung dieser Curve, nämlich $y^2 = 2ax - x^2$,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{(a-x)^2}{y^2}\right) dx^2 = \frac{a^2\, dx^2}{y^2},$$

$$\text{folglich} \quad ds = -\frac{a\, dx}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

wobei wir das Zeichen — setzen, weil, in so ferne s die oben ausgesprochene Bedeutung hat, das Wachsen dieser Größe die Verminderung von x nach sich zieht. Es ist demnach

$$dt = -\frac{a\, dx}{\sqrt{2g(h-x)(2ax-x^2)}}.$$

Suchen wir die Zeit T, binnen welcher das Bewegliche bis zu dem tiefsten Puncte seiner Bahn kömmt, so finden wir

$$T = -\int_h^0 \frac{a\, dx}{\sqrt{2g(h-x)(2ax-x^2)}}$$
$$= \frac{a}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{(h-x)(2ax-x^2)}}.$$

Dieses Integral läßt sich durch keinen geschlossenen Ausdruck darstellen. Um dasselbe in eine convergirende Reihe zu entwickeln, geben wir ihm die Gestalt

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{(hx - x^2)\left(1 - \frac{x}{2a}\right)}}.$$

Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{2a}}} = \left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2a} + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2a}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{2a}\right)^3 + \text{etc.}$$

welche Reihe, da x, der Natur des Kreises zu Folge, nicht größer werden kann als 2a, und die vorliegende Aufgabe offenbar die Voraussetzung x = 2a ausschließt, in Bezug auf den Umfang dieser Aufgabe stets convergirt; wir haben also, wenn wir der Kürze wegen im Allgemeinen

$$\frac{1}{(2a)^n} \int_0^h \frac{x^n\, dx}{\sqrt{hx - x^2}} = A_n \quad \text{setzen:}$$

$$T = \left[A_0 + \frac{1}{2} A_1 + \frac{1.3}{2.4} A_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} A_3 + \ldots\right] \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Die in der ein und fünfzigsten Vorlesung über die Analysis erhaltene Formel (79) gibt uns

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{hx - x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{hx - x^2}}{n} + \frac{(2n-1)h}{2n}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{hx - x^2}},$$

daher ist $\int_0^h \frac{x^n\,dx}{\sqrt{hx - x^2}} = \frac{(2n-1)h}{2n}\int_0^h \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{hx - x^2}},$

mithin $A_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{h}{2a} A_{n-1}.$

Aber aus der allgemeinen Formel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{hx - x^2}} = Arc.\,sin.\,\frac{2x - h}{h} + Const. \quad \text{folgt}$$

$$\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{hx - x^2}} = Arc.\,sin.\,(1) - Arc.\,sin.\,(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

daher haben wir $A_0 = \pi$;

es ist also $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2a}\pi,$

$$A_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \left(\frac{h}{2a}\right)^2 \pi,$$

$$A_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \left(\frac{h}{2a}\right)^3 \pi$$

u. s. w.

und

$$T = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^3 + \ldots\right] \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Ist h gegen 2a so klein, daß der Bruch $\frac{h}{2a}$ vernachläßiget werden darf, so kann

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$$

gesetzt werden; will man aber noch die erste Potenz von $\frac{h}{2a}$ in die Rechnung bringen, so ist

$$T = \left(1 + \frac{h}{8a}\right)\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$$

anzunehmen.

Auf diesen Formeln beruht die Bestimmung der Zeit, binnen welcher ein sogenanntes einfaches Pendel, auf welches außer der Schwere keine Kraft wirkt, eine Schwingung vollbringt.

Man versteht unter einem einfachen Pendel einen schweren materiellen Punct, welcher durch eine unbiegsame, mit keiner Masse be-

gabte Linie von unveränderlicher Länge mit einem fixen Puncte verbunden ist. Wird das Pendel aus der verticalen Lage, in welcher es allein ruhen kann, in eine andere Position versetzt, und dann sich selbst überlassen, so schwingt es in der durch seine anfängliche Position gelegten Verticalebene unaufhörlich hin und her, und da der Endpunct der Pendellinie dabei genöthiget ist, einen Kreisbogen zu beschreiben, so sind die obigen Formeln auf die Bewegung desselben anwendbar, und zeigen, in so ferne a die Pendellinie vorstellt, die Dauer einer halben Schwingung an. Gewöhnlich betrachtet man nur solche Schwingungen des einfachen Pendels, bei welchen es um äußerst geringe Ausschlags- oder Elongationswinkel von der verticalen Richtung abweicht; daher genügt zur Berechnung der Dauer τ einer Schwingung oft die Formel

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{a}{g}},$$

und fast in allen Fällen reicht man mit der Formel

$$\tau = \left(1 + \frac{h}{8a}\right) \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

aus. Verwechselt man die Hälfte des Bogens, welchen es dabei beschreibt, mit seiner Sehne, und nennt man den Elongationswinkel λ, so kann man, einem bekannten Satze der Elementargeometrie gemäß, $h = \frac{(a\lambda)^2}{2a} = \frac{a\lambda^2}{2}$ setzen, und man hat

$$\tau = \left(1 + \frac{\lambda^2}{16}\right) \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

II. Es bewege sich ein materieller Punct vermöge seiner Schwere auf einer Cykloide, deren Axe vertical und aufwärts gerichtet ist, deren Scheitel demnach unter allen Puncten dieser Curve am tiefsten steht.

Nehmen wir den Scheitel für den Anfangspunct der Coordinaten, und die Axe der Cykloide für jene der x an, und bezeichnen wir den Halbmesser des Erzeugungskreises durch a, so ist, wie wir in der zwei und zwanzigsten Vorlesung über die Geometrie gesehen haben,

$$ds = -dx \sqrt{\frac{2a}{x}},$$

folglich
$$t = -\sqrt{\frac{a}{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{hx - x^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \mathit{Arc.\,cos.} \frac{2x - h}{h},$$

wozu wir keine Constante setzen, damit das Integral für $x = h$ verschwinde.

Hieraus folgt für die Zeit T, binnen welcher der bewegte Punct zu dem Scheitel der Cykloide kömmt, der Ausdruck

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot Arc.\ cos.\ (-1) = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Dieses Resultat ist von h, folglich auch von der anfänglichen Position des Beweglichen auf der Cykloide unabhängig; es werden daher alle an dem Scheitel einer Cykloide, deren Axe vertikal steht, und deren Höhlung aufwärts gekehrt ist, sich endigenden Bogen dieser Curve von einem bloß der Schwere gehorchenden Beweglichen in einerlei Zeit durchlaufen, weßwegen auch die Cykloide, in Hinsicht auf unveränderliche continuirliche Kräfte, eine tautochrone Linie heißt.

Legt man sich die Aufgabe vor, die allgemeine Gleichung jener ebenen Linie zu finden, über deren sämmtliche an einem bestimmten Puncte sich endigende Bogen ein schwerer Punct binnen derselben Zeit herabgleitet, so muß man eine solche Relation zwischen den Coordinaten einer Linie ausmitteln, daß das von $x = h$ bis $x = 0$ genommene Integral

$$\int \frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}} \text{ oder } \int \frac{ds}{\sqrt{h-x}}$$

von h unabhängig erscheint, wobei s, h die obige Bedeutung haben.

Da in der Gleichung der verlangten Linie h nicht vorkommen kann, so sey $ds = -\varphi(x)\,dx$, in welcher Gleichung sich h nicht befindet; ferner werde $x = hx'$, also $dx = h\,dx'$ gesetzt, so haben wir für das erwähnte Integral den Ausdruck

$$-\int_h^0 \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{h-x}} = -\int_1^0 \frac{\varphi(hx')\,h\,dx'}{\sqrt{h}\cdot\sqrt{1-x'}} = \sqrt{h}\cdot\int_0^1 \frac{\varphi(hx')\,dx'}{\sqrt{1-x'}}.$$

Die Function $\varphi(hx')$ enthält h bloß als beständigen Begleiter von x'; auch kann, wie man leicht sieht, dieses Integral von h nur dadurch befreit werden, daß diese Größe aus dem Producte $\sqrt{h}\cdot\varphi(hx')$ wegfällt, es muß also $\varphi(hx') = \frac{A}{\sqrt{hx'}}$ seyn, wobei A eine beständige Größe anzeigt, und somit ist

$$ds = -\frac{A\,dx}{\sqrt{x}} \text{ oder auch } ds = +\frac{A\,dx}{\sqrt{x}}$$

die Differenzialgleichung jeder Linie von der verlangten Beschaffenheit,

woraus folgt, daß unter den angeführten Umständen bloß die Cykloide die Eigenschaft des Tautochronismus besitzt.

Der Krümmungshalbmesser der Cykloide wird durch die Formel $\rho = 2\sqrt{2a(2a - x)}$ ausgedrückt, und daher ist seine Größe am Scheitel dieser Curve $= 4a$. Betrachtet man nun einen, von dem Scheitel der Cykloide an gerechneten, äußerst kleinen Bogen dieser Curve als einen mit dem Halbmesser $r = 4a$ beschriebenen Kreisbogen, und setzt man in der Formel des Falles eines schweren Punctes über einen Bogen der Cykloide, nämlich $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, statt a den vierten Theil von r, so erhält man $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, welcher Ausdruck mit dem oben für den Fall über einen sehr kleinen Kreisbogen erhaltenen genau übereinstimmt.

Da die Dauer des Herabgleitens eines schweren Punctes über einen Bogen irgend einer Curve durch das Integral $\int \frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}}$ ausgedrückt wird, und wenn diese Curve eine ebene ist, durch die Aufwickelung ihrer Ebene über einen verticalen Cylinder von beliebiger Gestalt, ohne Änderung der verticalen Lage der Axe der x, weder x und h, noch s eine Änderung erleiden, so bleibt die Dauer des Falles über denselben Bogen der nunmehr auf dem Cylinder verzeichneten Curve offenbar die vorige.

Es gibt daher in Hinsicht auf die Bewegung durch die Schwere unzählige Tautochronen, welche aber sämmtlich durch Aufwickelung einer Cykloide mit verticaler und aufwärts gerichteter Axe über einen verticalen Cylinder entstehen.

Noch verdient die Eigenschaft der Cykloide angeführt zu werden, daß, in so ferne ihre Axe vertical und ihr Scheitel am tiefsten steht, ein schwerer, von dem höchsten Puncte dieser Curve ausgehender Punct, jeden beliebigen Bogen derselben in kürzerer Zeit zurücklegt, als einen zwischen denselben Grenzpuncten enthaltenen Bogen irgend einer anderen Curve, weßwegen die Cykloide den Beinamen: Brachystochrona führt.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, wollen wir die Brachystochrona oder die Linie des schnellsten Falles schwerer Puncte mit Hülfe des Variationscalculs direct suchen. Es handelt sich nämlich darum, jene Relation zwischen den Coordinaten der Curve zu finden, für welche

das von $x = h$ anfangende, und bei einem andern gegebenen Werthe von x sich endigende Integral

$$\int \frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}} \quad \text{oder} \quad \int \frac{ds}{\sqrt{h-x}}$$

ein Kleinstes wird. Zu der Kenntniß derselben verhilft uns die Gleichung

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{h-x}} = 0,$$

aus welcher $\int \left[\frac{\delta ds}{\sqrt{h-x}} - \frac{ds(\delta h - \delta x)}{2(h-x)^{\frac{3}{2}}}\right] = 0$

folgt. Wir haben hier auch h variiren lassen, weil im Allgemeinen die Position des Anfangspunctes des Bogens, über welchen der schwere Punct herabgleitet, veränderlich seyn kann.

Nun ist wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

$$\delta ds = \frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{ds};$$

folglich, wenn wir diesen Ausdruck in die obige Gleichung substituiren, die Differenzialien der Variationen durch theilweises Integriren wegschaffen, ferner alle auf den Anfangspunct des Curvenbogens sich beziehenden Größen durch Beisetzung des Zeigers 1, und alle auf den Endpunct desselben sich beziehenden durch Beisetzung des Zeigers 2 kenntlich machen, und endlich der Kürze wegen $\sqrt{h-x} = u$ setzen:

$$(3) \quad \frac{1}{u_2}\left[\frac{dx_2}{ds_2}\delta x_2 + \frac{dy_2}{ds_2}\delta y_2 + \frac{dz_2}{ds_2}\delta z_2\right]$$
$$- \frac{1}{u_1}\left[\frac{dx_1}{ds_1}\delta x_1 + \frac{dy_1}{ds_1}\delta y_1 + \frac{dz_1}{ds_1}\delta z_1\right] - \delta h \int \frac{ds}{2u^3}$$
$$+ \int \left[\left(\frac{ds}{2u^3} - d\frac{dx}{u ds}\right)\delta x - d\frac{dy}{u ds}\,.\,\delta y - d\frac{dz}{u ds}\delta z\right] = 0.$$

Die unter dem Integralzeichen enthaltenen Glieder geben uns, der Unbestimmtheit der Variationen δx, δy, δz zu Folge, die Gleichungen

$$(4) \quad \frac{ds}{2u^3} - d\frac{dx}{u ds} = 0, \quad d\frac{dy}{u ds} = 0, \quad d\frac{dz}{u ds} = 0.$$

Aus den zwei letzteren folgt

$$(5) \quad \frac{dy}{u ds} = A, \quad \frac{dz}{u ds} = B,$$

wobei A und B beständige Größen sind, mithin

$$A dz - B dy = 0 \quad \text{und} \quad A z - B y = C,$$

wobei C ebenfalls eine Constante vorstellt. Da dieß die Gleichung einer zur Axe der x parallelen, folglich verticalen Ebene ist, so ist die zu suchende Brachystochrona eine ebene Curve. Betrachten wir, um ihre Gleichung auf dem kürzesten Wege zu erhalten, ihre Ebene als jene der xy, so haben wir $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, daher

$$\frac{dy}{\sqrt{h-x} \,.\, \sqrt{dx^2 + dy^2}} = A,$$

$$\text{d. h.} \quad dy = \frac{A\sqrt{(h-x)} \,.\, dx}{\sqrt{1 - A^2 (h-x)}}.$$

Setzen wir hier $A = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, so haben wir

$$dy = dx \sqrt{\frac{h-x}{2a - (h-x)}};$$

setzen wir ferner $2a - (h-x) = x'$, so wird

$$dy = dx' \sqrt{\frac{2a - x'}{x'}}.$$

Da diese Differenzialgleichung mit jener einer Cykloide, deren Erzeugungskreis den Halbmesser $2a$ hat, und deren Scheitel und Axe als Anfangspunct und Axe der Abscissen dienen, genau übereinstimmt, ferner, wenn wir die durch x vorgestellten Abscissen auf denselben Anfangspunct beziehen, oder $x = x'$ annehmen, sich $h = 2a$ ergibt, so ist die Richtigkeit der obigen Behauptung hinreichend begründet.

Die dem Endpuncte des von dem Beweglichen durchlaufenen Bogens der Curve zugehörigen Glieder vor dem Integralzeichen in obiger Gleichung geben uns

$$\frac{dx_2}{ds_2} \cdot \frac{\delta x_2}{\delta s_2} + \frac{dy_2}{ds_2} \cdot \frac{\delta y_2}{\delta s_2} + \frac{dz_2}{ds_2} \cdot \frac{\delta z_2}{\delta s_2} = 0,$$

woraus sich leicht folgern läßt, daß, wenn die Brachystochrona zu einer gegebenen Linie oder Fläche geführt werden soll, sie diese Linie oder Fläche rechtwinklig durchschneiden müsse. Jedoch sind wir keineswegs berechtiget, diesen Satz umzukehren.

Da endlich die auf den Anfangspunct dieses Bogens sich beziehenden Glieder in der Gleichung (3) für sich verschwinden, so haben wir

$$\frac{1}{u_1} \left[\frac{dx_1}{ds_1} \delta x_1 + \frac{dy_1}{ds_1} \delta y_1 + \frac{dz_1}{ds_1} \delta z_1 \right] + \delta h \int \frac{ds}{2u^3} = 0.$$

Aber die erste der Gleichungen (4) gibt uns

$$\int \frac{ds}{2u^3} = \frac{dx_2}{u_2 ds_2} - \frac{dx_1}{u_1 ds_1},$$

ferner folgt aus (5)

$$\frac{dy_1}{u_1 ds_1} = \frac{dy_2}{u_2 ds_2}, \quad \frac{dz_1}{u_1 ds_1} = \frac{dz_2}{u_2 ds_2},$$

endlich ist x_1 mit h einerlei, daher haben wir

$$\frac{dx_2}{ds_2} \cdot \frac{\delta x_1}{\delta s_1} + \frac{dy_2}{ds_2} \cdot \frac{\delta y_1}{\delta s_1} + \frac{dz_2}{ds_2} \cdot \frac{\delta z_1}{\delta s_1} = 0,$$

woraus zu ersehen ist, daß die zu dem Endpuncte der Brachystochrona gehörende Tangente auf der Tangente der Linie oder auf der Berührungsebene der Fläche, von welcher das Bewegliche ausgehen soll, senkrecht stehen muß.

Zwanzigste Vorlesung.

Über die Bewegung eines Systems materieller Puncte.

Betrachten wir nun die Bewegung irgend eines Systems materieller Puncte, deren Berechnung nach dem, in der siebzehnten Vorlesung erklärten, Principe d'Alembert's von der Auflösung eines Problems der Statik abhängig gemacht wird. Hiebei ist der Anfang der Bewegung, bei welchem bloß die allenfalls auf das vorhandene System einwirkenden momentanen Kräfte in Betrachtung kommen, von dem weiteren Verfolge derselben, während welchem bloß continuirliche Kräfte thätig sind, zu unterscheiden.

Es seyen m_1, m_2, m_3, ... die mit einander zu einem Systeme verbundenen materiellen Puncte, deren Massen durch dieselben Buchstaben bezeichnet werden mögen; P_1, P_2, P_3, ... gegebene, auf dieselben zugleich und momentan einwirkende Kräfte; ds_1, ds_2, ds_3, ... die unendlich kleinen Wege, welche diese Puncte in dem ersten Zeittheilchen zurücklegen, und v_1, v_2, v_3, ... die correspondirenden Geschwindigkeiten, so wird das System durch die den Richtungen der einzelnen Bewegungen beziehungsweise entgegengesetzt angebrachten Kräfte $m_1 v_1$, $m_2 v_2$, $m_3 v_3$, ... in dem Zustand der Ruhe erhalten. Da nun in Bezug auf jede beliebige, der Natur des Systems angemessene und von der hier zu betrachtenden Bewegung desselben independente unendlich geringe Verschiebung der Massen m_1, m_2, m_3, ... ihre, nach den Richtungen der das Gleichgewicht herstellenden Kräfte $m_1 v_1$, $m_2 v_2$, $m_3 v_3$, ... geschätzten, virtuellen Geschwindigkeiten offenbar durch die Variationen $-\delta s_1$, $-\delta s_2$, $-\delta s_3$, ... ausgedrückt werden, so haben wir, wenn wir die nach den Richtungen der Kräfte P_1, P_2, P_3, ... genommenen virtuellen Geschwindigkeiten durch δp_1, δp_2, δp_3, ... andeuten, durch Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf d'Alembert's Grundsatz, die Gleichung:

$$(1) \qquad \Sigma(P\delta p - mv\delta s) = 0$$

welche wir auch, in so ferne wir durch P, m, v, δs, δp jede der gleichnamigen Größen anzeigen, der in den vorhergehenden Vorlesun-

gen gebrauchten kurzen Bezeichnung gemäß, mit Hülfe des Summenzeichens auf eine geschmeidige Form gebracht haben, während wir ohne das Summenzeichen hätten

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + P_3 \delta p_3 + \ldots \\ - m_1 v_1 \delta s_1 - m_2 v_2 \delta s_2 - m_3 v_3 \delta s_3 - \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

schreiben müssen.

Drücken wir nun alle Werthe von δp und δs durch die Variationen der Coordinaten der einzelnen Puncte des Systems aus, und reduciren wir dieselben mittelst der durch die Beschaffenheit dieses Systems gegebenen Bedingungsgleichungen auf die kleinstmöglichste Anzahl, so zerfällt diese Gleichung in eben so viele besondere Gleichungen, als es independente Variationen der Coordinaten gibt, welche, mit den erwähnten Bedingungsgleichungen verbunden, zur Beantwortung aller, den Anfang der Bewegung des Systems angehenden Fragen hinreichen. Daß man diese Bedingungsgleichungen auch mit Hülfe unbestimmter Multiplicatoren in die Gleichung (1) einführen kann, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Legen wir unserer Untersuchung ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, und bezeichnen die Coordinaten der Puncte m_1; m_2; m_3; .... beziehungsweise durch x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; .... ferner die Kräfte, in welche P_1; P_2; P_3; .... parallel mit den Axen der x, y, z zerfallen, durch $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$; $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Z}_2$; $\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{Y}_3$, $\mathfrak{Z}_3$; .... endlich die nach den Richtungen der Coordinaten geschätzten Geschwindigkeiten der oben genannten Puncte durch $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$, $\bar{z}_1$; $\bar{x}_2$, $\bar{y}_2$, $\bar{z}_2$; $\bar{x}_3$, $\bar{y}_3$, $\bar{z}_3$; .... so haben wir (sechste Vorlesung (1)) im Allgemeinen

$$P\delta p = \mathfrak{X}\delta x + \mathfrak{Y}\delta y + \mathfrak{Z}\delta z,$$
$$v\delta s = \bar{x}\delta x + \bar{y}\delta y + \bar{z}\delta z,$$

wodurch sich die Gleichung (1) in

$$(2) \quad \Sigma\left[(\mathfrak{X} - m\bar{x})\delta x + (\mathfrak{Y} - m\bar{y})\delta y + (\mathfrak{Z} - m\bar{z})\delta z\right] = 0$$

verwandelt, welche demnach nach den in der zehnten Vorlesung erklärten Methoden weiter behandelt werden muß.

Nennen wir ferner die continuirlichen Kräfte, welche auf jeden Punct, z. B. m, des vorhandenen Systems am Ende der Zeit t parallel mit den Axen der x, y, z wirken, mX, mY, mZ, wobei die Buchstaben X, Y, Z mit demselben Zeiger zu versehen sind, welchen m an sich trägt, und, wie man sieht, die Kräfte vorstellen, durch

welche die Einheit der Massen getrieben würde, wenn jeder Theil derselben so afficirt würde, wie ein gleich großer Theil der Masse m, und bedenken wir, daß die Kräfte, welche die Masse m während des Zeittheilchens dt nach den Richtungen der x, y, z gerade so beschleunigen, wie es die Gesammtheit aller Kräfte $m_1 X_1$, $m_1 Y_1$, $m_1 Z_1$; $m_2 X_2$, $m_2 Y_2$, $m_2 Z_2$; rc. thut, durch $m\frac{d^2 x}{dt^2}$, $m\frac{d^2 y}{dt^2}$, $m\frac{d^2 z}{dt^2}$, ... ausgedrückt werden, so erhalten wir, den oben angedeuteten Gründen zu Folge, die Gleichung

$$(3)\quad \Sigma m\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0,$$

welche, mit Hülfe der in der zehnten Vorlesung gelehrten Methoden, die Auflösung jedes, den weiteren Verlauf der Bewegung des gegebenen Systems betreffenden, Problems darbietet.

Ist dieses System ein mit Materie erfüllter Körper, so werden die in den Gleichungen (1), (2), (3) angedeuteten, auf das gesammte System sich erstreckenden Summirungen durch Integration bewerkstelliget.

Die hier aufgestellten allgemeinen Gleichungen (2) und (3) sind nichts anderes, als die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes aller durch $\mathfrak{X}-m\bar{x}$, $\mathfrak{Y}-m\bar{y}$, $\mathfrak{Z}-m\bar{z}$ oder durch $m\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, $m\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, $m\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ vorgestellten Kräfte. Sind nun die Bestandtheile des Systems, welches der Einwirkung dieser Kräfte unterliegt, unveränderlich mit einander verbunden, so finden offenbar die in der siebenten Vorlesung entwickelten Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes jeder an einem solchen Systeme thätigen Kräfte Statt, und wir bedürfen daher keiner besonderen Behandlung der angeführten Gleichungen. Dieselben Bedingungsgleichungen gelten aber auch, wenigstens zum Theile, wenn die Bestandtheile des vorliegenden Systems in keinem unveränderlichen Zusammenhange stehen, wofern nur dieses System weniger als drei, nicht in einer und derselben Geraden befindliche, fixe Puncte enthält. Denn halten sich, wie wir bereits in der eilften Vorlesung gesagt haben, Kräfte an einem veränderlichen Systeme das Gleichgewicht, so muß dasselbe auch noch fortbestehen, wenn einige oder alle Puncte dieses Systems plötzlich in eine unveränderliche Verbindung treten. Ist also das System in dem letzteren Zustande

noch einer Bewegung fähig, wozu die Anwesenheit von weniger als dreien, nicht in einer und derselben geraden Linie liegenden fixen Puncten erfordert wird, so werden die seiner Beweglichkeit angemessenen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes bestehen. Nur müssen wir hier bemerken, daß das Stattfinden der in der erwähnten Vorlesung erhaltenen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes eines unveränderlichen Systems, die gegenseitige Tilgung der Kräfte zur nothwendigen Folge hat, während bei einem veränderlichen System hiezu noch die Erfüllung anderer Bedingungen erforderlich ist.

Wendet man die erwähnten Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes eines unveränderlichen Systems auf die in den Gleichungen (2) und (3) erscheinenden Kräfte an, so lernt man dadurch einige interessante allgemeine Eigenschaften der Bewegung eines jeden Systems kennen, mit deren Auseinandersetzung wir uns nun unverzüglich beschäftigen wollen.

Es sey erstlich das vorhandene System materieller Puncte völlig frei, so müssen für den Anfang der Bewegung desselben die sechs Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\Sigma(\mathfrak{X} - m\bar{x}) = 0, \\ &\Sigma(\mathfrak{Y} - m\bar{y}) = 0, \\ &\Sigma(\mathfrak{Z} - m\bar{z}) = 0, \\ &\Sigma[(\mathfrak{Y} - m\bar{y})x - (\mathfrak{X} - m\bar{x})y] = 0, \\ &\Sigma[(\mathfrak{X} - m\bar{x})z - (\mathfrak{Z} - m\bar{z})x] = 0, \\ &\Sigma[(\mathfrak{Z} - m\bar{z})y - (\mathfrak{Y} - m\bar{y})z] = 0, \end{aligned}$$

und für den Verfolg der Bewegung, die sechs Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\Sigma m\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0, \\ &\Sigma m\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0, \\ &\Sigma m\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0, \\ &\Sigma m\left[\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)x - \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)y\right] = 0, \\ &\Sigma m\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)z - \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)x\right] = 0, \\ &\Sigma m\left[\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)y - \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)z\right] = 0 \end{aligned}$$

bestehen.

Aus den drei ersten der Gleichungen (4) folgt für den Anfang der Bewegung des Systems

$$\Sigma m\bar{x} = \Sigma \mathfrak{X}; \quad \Sigma m\bar{y} = \Sigma \mathfrak{Y}; \quad \Sigma m\bar{z} = \Sigma \mathfrak{Z};$$

und aus den drei ersten der Gleichungen (5) für jeden ferneren Augenblick der Bewegung desselben

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{d t^2} = \Sigma m X; \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{d t^2} = \Sigma m Y; \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{d t^2} = \Sigma m Z.$$

Es seyen nun ξ, υ, ζ die Coordinaten desjenigen Punctes, welcher zu dem Mittelpuncte des Systems würde, wenn auf alle Bestandtheile desselben parallele, nach derselben Gegend gerichtete, und ihren Massen proportionirte Kräfte wirkten, welchen Punct man füglich den Mittelpunct der Masse des Systems nennen kann, so bestehen die Gleichungen

(6) $\quad \xi \Sigma m = \Sigma m x; \quad \upsilon \Sigma m = \Sigma m y; \quad \zeta \Sigma m = \Sigma m z.$

Differenziren wir dieselben in Bezug auf die Zeit t, so ergibt sich

$$\frac{d\xi}{dt} \Sigma m = \Sigma m \frac{dx}{dt}; \quad \frac{d\upsilon}{dt} \Sigma m = \Sigma m \frac{dy}{dt}; \quad \frac{d\zeta}{dt} \Sigma m = \Sigma m \frac{dz}{dt}.$$

Für den ersten Augenblick der Bewegung ist offenbar

$$\frac{dx}{dt} = \bar{x}; \quad \frac{dy}{dt} = \bar{y}; \quad \frac{dz}{dt} = \bar{z};$$

und wenn wir die nach den Richtungen der x, y, z geschätzte Geschwindigkeit des Mittelpunctes der Masse, welche derselbe vermöge seiner Verbindung mit dem gesammten Systeme annimmt, durch $\bar{\xi}$, $\bar{\upsilon}$, $\bar{\zeta}$ vorstellen, eben so

$$\frac{d\xi}{dt} = \bar{\xi}; \quad \frac{d\upsilon}{dt} = \bar{\upsilon}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \bar{\zeta};$$

mithin

(7) $\quad \bar{\xi} \Sigma m = \Sigma \mathfrak{X}; \quad \bar{\upsilon} \Sigma m = \Sigma \mathfrak{Y}; \quad \bar{\zeta} \Sigma m = \Sigma \mathfrak{Z}.$

Die Gleichungen (6) geben uns ferner durch zweimaliges Differenziren in Bezug auf t

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} \Sigma m = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \frac{d^2\upsilon}{dt^2} \Sigma m = \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} \Sigma m = \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2};$$

daher ist

(8) $\quad \frac{d^2\xi}{dt^2} \Sigma m = \Sigma m X; \quad \frac{d^2\upsilon}{dt^2} \Sigma m = \Sigma m Y; \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} \Sigma m = \Sigma m Z.$

Aus den Gleichungen (7) und (8) erhellet nun der wichtige Lehr-

satz, daß sich der Mittelpunct der Masse eines jeden freien Systems dergestalt bewegt, als ob die Massen aller Bestandtheile dieses Systems in ihm vereinigt wären, und in jedem einzelnen Augenblicke auf ihn alle, an dem Systeme in diesem Augenblicke thätigen Kräfte, ihren Richtungen parallel, einwirkten.

Aus den drei letzten der Gleichungen (4) erhalten wir für den Anfang der Bewegung

$$\Sigma m(\bar{y}x - \bar{x}y) = \Sigma(\mathfrak{Y}x - \mathfrak{X}y),$$
$$\Sigma m(\bar{x}z - \bar{z}x) = \Sigma(\mathfrak{X}z - \mathfrak{Z}x),$$
$$\Sigma m(\bar{z}y - \bar{y}z) = \Sigma(\mathfrak{Z}y - \mathfrak{Y}z),$$

und nach Verlauf der Zeit t, den Gleichungen (5) gemäß:

$$\Sigma m\left(\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma m(Yx - Xy),$$
$$\Sigma m\left(\frac{z\,d^2x - x\,d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma m(Xz - Zx),$$
$$\Sigma m\left(\frac{y\,d^2z - z\,d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma m(Zy - Yz).$$

Enthält das gegebene System einen fixen Punct, so gelten diese Gleichungen ebenfalls, in so ferne dieser Punct als Anfangspunct der Coordinaten betrachtet wird.

Die Größen

$$\Sigma m(Yx - Xy),\quad \Sigma m(Xz - Zx),\quad \Sigma m(Zy - Yz)$$

sind, wie wir aus der achten Vorlesung wissen, die Summen der Momente der am Ende der Zeit t auf das System wirkenden Kräfte in Bezug auf die Axen der z, y, x. Wird dasselbe entweder von keiner continuirlichen Kraft, oder theils von solchen continuirlichen Kräften, deren Richtungen stets durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen, theils von der zwischen seinen Bestandtheilen bestehenden Anziehung oder Abstoßung, außer diesen aber von keinen anderen continuirlichen Kräften afficirt, so sind die erwähnten Summen der Momente jederzeit gleich Null. Denn es sey R eine auf den Punct x, y, z wirkende Kraft, in deren Richtung der Anfangspunct der Coordinaten liegt, und r der Radiusvector, welcher aus dem Anfangspuncte zu dem Puncte x, y, z geht, so sind $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ die numerischen Werthe der Cosinusse der Winkel, welche die Richtung der Kraft R mit jenen der positiven x, y, z bildet, und daher ist

$$X = \pm R \,.\, \frac{x}{r}, \quad Y = \pm R \,.\, \frac{y}{r}, \quad Z = \pm R \,.\, \frac{z}{r},$$

wobei die unteren Zeichen gelten, wenn die Kraft R zu dem Anfangspuncte der Coordinaten hin wirkt, und die oberen, wenn das Gegentheil Statt findet. Hieraus folgt aber

$$Yx - Xy = o, \quad Xz - Zx = o, \quad Zy - Yz = o.$$

Ist ferner R die Größe der Kraft, mit welcher der Punct x_1, y_1, z_1 auf den Punct x_2, y_2, z_2 einwirkt, und dieser auf jenen reagirt; ferner m_1 die Masse des ersteren, und m_2 die Masse des letzteren; endlich u die Entfernung beider, so wird der erste Punct, nach den Richtungen der x, y, z, von den Kräften

$$m_1 X_1 = \pm R \,.\, \frac{x_1 - x_2}{u}; \quad m_1 Y_1 = \pm R \,.\, \frac{y_1 - y_2}{u}; \quad m_1 Z_1 = \pm R \,.\, \frac{z_1 - z_2}{u};$$

und der zweite von den Kräften

$$m_2 X_2 = \pm R \,.\, \frac{x_2 - x_1}{u}; \quad m_2 Y_2 = \pm R \,.\, \frac{y_2 - y_1}{u}; \quad m_2 Z_2 = \pm R \,.\, \frac{z_2 - z_1}{u}$$

afficirt, wobei entweder alle oberen, oder alle unteren Zeichen zugleich zu nehmen sind, und wir finden

$$m_1 (Y_1 x_1 - X_1 y_1) + m_2 (Y_2 x_2 - X_2 y_2) = o,$$
$$m_1 (X_1 z_1 - Z_1 x_1) + m_2 (X_2 z_2 - Z_2 x_2) = o,$$
$$m_1 (Z_1 y_1 - Y_1 z_1) + m_2 (Z_2 y_2 - Y_2 z_2) = o.$$

Unter der erwähnten Voraussetzung haben wir also

(9) $$\Sigma m \left(\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} \right) = o,$$
$$\Sigma m \left(\frac{z\,d^2x - x\,d^2z}{dt^2} \right) = o,$$
$$\Sigma m \left(\frac{y\,d^2z - z\,d^2y}{dt^2} \right) = o;$$

folglich, wenn wir in Bezug auf die Veränderliche t integriren,

(10) $$\Sigma m \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} \right) = A,$$
$$\Sigma m \left(\frac{z\,dx - x\,dz}{dt} \right) = B,$$
$$\Sigma m \left(\frac{y\,dz - z\,dy}{dt} \right) = C,$$

wobei A, B, C beständige Größen anzeigen. Aber $x\,dy - y\,dx$ ist das Doppelte des Differenzials des Flächenraumes, welchen der aus

dem Anfangspuncte der Coordinaten zu der Projection des Punctes m auf die Ebene xy gezogene Radiusvector während der Zeit t durchstreicht; und eine ähnliche Bedeutung haben die Größen $zdx - xdz$, $ydz - zdx$ hinsichtlich der Ebenen xz, yz: setzen wir also

$xdy - ydx = 2dS$, $zdx - xdz = 2dS'$, $ydz - zdy = 2dS''$,

so ist

$$\Sigma m \frac{dS}{dt} = \tfrac{1}{2} A; \quad \Sigma m \frac{dS'}{dt} = \tfrac{1}{2} B; \quad \Sigma m \frac{dS''}{dt} = \tfrac{1}{2} C;$$

mithin, wenn wir abermal in Bezug auf die Zeit t integriren, und bedenken, daß die Flächenräume S, S', S'' für $t = 0$ verschwinden,

(11) $\Sigma m S = \tfrac{1}{2} A t$; $\Sigma m S' = \tfrac{1}{2} B t$; $\Sigma m S'' = \tfrac{1}{2} C t$.

Bei dieser Untersuchung wurde die Lage der Ebenen xy, xz, yz im Allgemeinen durch nichts beschränkt; wenn daher ein freies System materieller Puncte, außer den am Anfange der Bewegung thätigen momentanen Kräften, bloß von sogenannten inneren Kräften, d. h. von den zwischen diesen Puncten etwa bestehenden Anziehungs- oder Abstoßungskräften, afficirt wird, so ist die Summe der Producte aus den Massen der genannten materiellen Puncte und den Flächenräumen, welche die, aus einem beliebigen fixen Puncte zu den Projectionen der bewegten Puncte auf irgend eine durch den fixen Punct gelegte Ebene gezogenen, Radienvectoren während der Bewegung beschreiben, der Dauer der Bewegung proportionirt. Auch ersehen wir aus den Gleichungen (7) und (8), daß der Mittelpunct der Masse des Systems in dem vorliegenden Falle sich nach der Richtung der Resultirenden der auf denselben zu ihren ursprünglichen Richtungen parallel versetzten momentanen Kräfte, also geradlinig, bewegt, gerade so, als ob die inneren Kräfte nicht vorhanden wären.

Die so eben angeführte Beschaffenheit der Flächenräume besteht auch dann noch, wenn die auf das System einwirkenden äußeren Kräfte sämmtlich gegen einen bestimmten fixen Punct gerichtet sind, wie auch, wenn das System einen fixen Punct enthält; nur müssen die Radienvectoren, welche diese Flächenräume beschreiben, jedesmal von dem genannten fixen Puncte ausgehen.

Beziehen wir die Gleichungen (10) auf den Anfang der Bewegung, so haben wir

$$\Sigma m(\bar{y}x - \bar{x}y) = A; \quad \Sigma m(\bar{x}z - \bar{z}x) = B; \quad \Sigma m(\bar{z}y - \bar{y}z) = C;$$

folglich

(12) $A = \Sigma(\mathfrak{Y}x - \mathfrak{X}y)$; $B = \Sigma(\mathfrak{X}z - \mathfrak{Z}x)$; $C = \Sigma(\mathfrak{Z}y - \mathfrak{Y}z)$.

Es sind also die Constanten A, B, C die Summen der Momente der im ersten Augenblicke der Bewegung thätigen momentanen Kräfte in Bezug auf die Axen der z, y, x.

Die Werthe der Größen A, B, C ändern sich, wenn man das der Rechnung zum Grunde liegende Coordinatensystem mit einem anderen vertauscht; sie sind aber dabei, ihrer so eben erkannten Bedeutung gemäß, an die, am Ende der achten Vorlesung unter den Momenten bestimmter Kräfte hinsichtlich verschiedener Axen nachgewiesenen Relationen gebunden. Es erleidet demnach die Summe der Quadrate dieser Constanten keine Änderung, wenn man, mit Beibehaltung des Anfangspunctes der Coordinaten, von einem rechtwinkligen Coordinatensystem auf ein anderes übergeht. Ferner kann man die Ebene xy stets so wählen, daß B und C verschwinden, folglich A den größten Werth erhält, dessen diese Constante bei einem und demselben Anfangspuncte der Coordinaten fähig ist.

Unterliegt daher ein System materieller Puncte bloß der Einwirkung momentaner Kräfte und der fortwährenden gegenseitigen Anziehung oder Abstoßung dieser Puncte, so gibt es für jeden fixen Punct, von welchem man die Radienvectoren zu den Projectionen der Bestandtheile des Systems auf eine durch denselben gelegte Ebene ausgehen läßt, eine solche Position dieser Ebene, daß die Summe der Producte aus den bewegten Massen mit den Flächenräumen, welche die ihren Projectionen zugehörigen Radienvectoren während jeder gegebenen Zeit beschreiben, die größtmöglichste wird. Dasselbe gilt auch, wenn die Massen des Systems während der ganzen Bewegung von einem fixen Puncte angezogen oder abgestoßen werden, und man die erwähnten Flächenräume auf diesen fixen Punct bezieht; oder, wie man sich kurz ausdrücken kann, wenn man diesen fixen Punct zum Mittelpuncte der Flächenräume annimmt. Laplace, welcher diese Bemerkung zuerst machte, nennt die so beschaffene Projectionsebene, da sie für jeden bestimmten Mittelpunct der Flächenräume während der ganzen Dauer der Bewegung dieselbe bleibt, die dem genannten Mittelpuncte zugehörige unveränderliche Ebene. Die Cosinusse der Winkel, unter welchen sie im Allgemeinen gegen oben gewählte, den Mittelpunct der Flächen als Anfangspunct der Coordinaten enthaltende, Ebenen

$x\,y$, $x\,z$, $y\,z$ geneigt ist, sind offenbar

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Es bedarf keiner Erinnerung, daß die durch den Anfangspunct der Coordinaten gehende Axe, hinsichtlich welcher die Summe der Momente der am Anfange der Bewegung des Systems thätigen Kräfte am größten ausfällt, auf der unveränderlichen Ebene senkrecht steht.

Die beiden in gegenwärtiger Vorlesung vorgetragenen allgemeinen Eigenschaften der Bewegung jedes Systems materieller Puncte pflegen die Lehrsätze von der Erhaltung der Bewegung des Mittelpunctes der Masse (oder auch des Schwerpunctes, in so ferne man nämlich das Wort Schwerpunct für gleichbedeutend mit dem Ausdrucke Mittelpunct der Masse gebraucht) und von der Erhaltung der Flächenräume genannt zu werden.

Ein und zwanzigste Vorlesung.

Über die drehende Bewegung eines unveränderlichen Systems materieller Puncte um eine fixe Axe, und über die Momente der Trägheit.

Stellen wir uns vor, auf ein unveränderliches System materieller Puncte, welches mit einer fixen Geraden in einer solchen Verbindung steht, daß die Entfernung jedes einzelnen jener Puncte von jedem Puncte dieser Geraden nicht geändert werden kann, d. h. bloß einer drehenden Bewegung um diese Gerade als Axe, aber keiner Verschiebung längs derselben fähig ist, wirken momentane und continuirliche Kräfte, so haben, wenn wir jede Kraft sowohl zu der Rotationsaxe, wie auch zu einer auf die Rotationsaxe senkrechten Ebene parallel zerlegen, bloß die letzteren Kräfte auf die Bewegung des Systems Einfluß. Denn nehmen wir die Rotationsaxe für die Axe der z an, und behalten wir alle in der vorhergehenden Vorlesung gebrauchten Bezeichnungen bei, so kommt hier, von allen dort erhaltenen Gleichungen bloß die einzige

(1) $$\Sigma m(\bar{y}x - \bar{x}y) = \Sigma(\mathfrak{Y}x - \mathfrak{X}y)$$

für den Anfang, und

(2) $$\Sigma m\left(\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma m(Yx - Xy)$$

für den Zustand der Bewegung am Ende der Zeit t, in Betrachtung.

Wir wollen uns zuerst mit dem Falle beschäftigen, wenn auf das System bloß momentane Kräfte einwirken, und dasselbe sodann seiner Trägheit überlassen wird. Hier haben wir wegen $X = o$, $Y = o$

$$\Sigma m(Yx - Xy) = o,$$

folglich, wie in der vorhergehenden Vorlesung gezeigt wurde,

(3) $$\Sigma m\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}\right) = A = \Sigma(\mathfrak{Y}x - \mathfrak{X}y).$$

Es sey r der Abstand der Masse m von der Rotationsaxe, und θ der Winkel, welchen r mit einer durch diese Axe gelegten fixen Ebene, z. B. mit der Ebene xz bildet, so ist bekanntlich

$$x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta,$$

wodurch die Gleichung (3) die Form

$$\Sigma m r^2 \frac{d\theta}{dt} = A$$

erhält. Wegen der unveränderlichen Verbindung der materiellen Puncte des Systems entfernen sich alle Perpendikel, welche von denselben auf die Rotationsaxe fallen, von ihren anfänglichen Positionen binnen einer festgesetzten Zeit um denselben Winkel; wir können daher diese Gleichung auch so darstellen:

$$\frac{d\theta}{dt} \Sigma m r^2 = A, \quad \text{woraus}$$

(4) $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{A}{\Sigma m r^2},$$

und, in so ferne wir θ auf einen bestimmten Punct des Systems beziehen,

(5) $$\theta = \frac{A}{\Sigma m r^2} \cdot t + Const.$$

folgt. Bei der Drehung des Systems um seine fixe Axe nehmen daher die Winkel, welche die aus den einzelnen Puncten desselben auf die Rotationsaxe gefällten Perpendikel durchlaufen, in demselben Verhältnisse zu, wie die Zeit. Man nennt eine solche drehende Bewegung eine gleichförmige, und schätzt das Verhältniß der Geschwindigkeiten, mit welchen zwei gleichförmige Drehungen erfolgen, nach dem Verhältnisse der Winkel, welche eine auf die Rotationsaxe senkrechte und mit dem sich drehenden Systeme unveränderlich verbundene Gerade in beiden Fällen binnen einer festgesetzten Zeit beschreibt, weßwegen die Drehungsgeschwindigkeit eines unveränderlichen Systems auch die Winkelgeschwindigkeit desselben heißt. Für die Einheit der Winkelgeschwindigkeiten wird diejenige angenommen, vermöge welcher binnen der Zeit 1 die Einheit der Winkel beschrieben wird, d. h. vermöge welcher ein, von der Rotationsaxe in der Entfernung 1 befindlicher Punct, binnen der Zeit 1 einen Kreisbogen, dessen Länge = 1 ist, zurücklegt.

Dieß vorausgesetzt, ist die Winkelgeschwindigkeit eines sich gleichförmig drehenden Systems dem Quotienten gleich, welchen man erhält, wenn man den von einer auf die Drehungsaxe senkrechten Geraden, vermöge dieser Drehung, beschriebenen Winkel, durch die Zeit, binnen welcher er beschrieben wurde, dividirt. Die dabei Statt findende wirkliche oder absolute Geschwindigkeit eines jeden Punctes

aber wird, wie man leicht sieht, durch das Product der Winkelgeschwindigkeit mit der Entfernung desselben von der Rotationsaxe ausgedrückt.

Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit des Systems, dessen Drehung wir oben betrachteten, durch ω, so haben wir

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta - Const.}{t}, \quad \text{mithin}$$

$$(6) \qquad \omega = \frac{A}{\Sigma m r^2}.$$

Ist das gegebene System ein mit Materie erfüllter Körper, und dm das Differenzial der Masse desselben, so nimmt die Formel (6) die Gestalt

$$(7) \qquad \omega = \frac{A}{\int r^2 dm}$$

an. Die Summe der Producte der Masse jedes Theilchens eines Systems mit dem Quadrate seines Abstandes von einer gegebenen Geraden wird das Moment der Trägheit des Systems in Bezug auf diese Gerade genannt. Da nun die in den Formeln (6) und (7) erscheinende Constante A, wie aus der Gleichung (3) erhellet, die Summe der statischen Momente der auf das gegebene System einwirkenden momentanen Kräfte in Bezug auf die Rotationsaxe anzeigt, so findet man die Winkelgeschwindigkeit, welche diese Kräfte erzeugen, wenn man die so eben genannte Summe durch das Moment der Trägheit des Systems in Bezug auf die Rotationsaxe theilt.

Wenden wir uns nun zur Untersuchung der Bewegung eines unveränderlichen Systems um eine fixe Axe, wenn nebst den anfänglichen momentanen Kräften fortwährend continuirliche Kräfte thätig sind. Die Berechnung dieser Bewegung erheischt die allgemeine Formel (2), welcher wir jedoch mit Hülfe der Bemerkung, daß $x\,d^2y - y\,d^2x = d\,(r^2\,d\theta)$, und r von t independent ist, die Gestalt

$$(8) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}\Sigma m r^2 = \Sigma m (Y x - X y)$$

geben wollen.

Sehen wir die Winkelgeschwindigkeit ω, mit welcher das System sich am Ende der Zeit t um seine Axe gleichförmig zu drehen beginnen würde, wenn in diesem Augenblicke die continuirlichen Kräfte aufhörten dasselbe zu afficiren, als die dem Ende der Zeit t entsprechende Winkelgeschwindigkeit dieses Systems an, so läßt sich auf dem, in der fünfzehnten Vorlesung betretenen, Wege mit Hülfe der Methode der

Grenzen die Gleichung

(9) $$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

leicht rechtfertigen. Wir haben daher

(10) $$\frac{d\omega}{dt}\Sigma m r^2 = \Sigma m (Yx - Xy),$$

und insbesondere für einen mit Materie erfüllten Körper

(11) $$\frac{d\omega}{dt}\int r^2 dm = \int (Yx - Xy)\, dm,$$

welche Gleichung uns die jedem beliebigen Augenblicke zugehörige Winkelgeschwindigkeit darbietet.

Es sey, um einen besonderen Fall vor Augen zu haben, die Schwere die einzige das System der materiellen Puncte afficirende Kraft, und die Rotationsaxe horizontal, so ist, wenn wir die Axe der y vertical und abwärts gerichtet annehmen, und die Intensität der Schwere durch g vorstellen, $X = 0$, $Y = g$, folglich

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma r^2 m = g \Sigma x m.$$

Bezeichnen wir die gesammte Masse des Systems durch M, und die der Axe der x parallele Coordinate des Schwerpunctes des Systems am Ende der Zeit t durch ξ, so ergibt sich, wegen

$$\Sigma x m = \xi \Sigma m = M\xi,$$

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma r^2 m = g M \xi.$$

Nennen wir die Länge des aus dem Schwerpuncte unseres Systems auf die Rotationsaxe gefällten Perpendikels a, und verstehen wir unter θ den Winkel, welchen dasselbe am Ende der Zeit t mit der horizontalen Axe der x bildet, so haben wir $\xi = a \cos.\theta$, mithin

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma r^2 m = g M a \cos.\theta,$$

und wenn wir beiderseits mit $\omega dt = d\theta$ multipliciren,

$$\omega d\omega \Sigma r^2 m = g M a \cos.\theta\, d\theta,$$

woraus durch Integration

$$\omega^2 = \frac{2 g M a}{\Sigma r^2 m}(\sin.\theta - \sin.\alpha)$$

folgt, wenn nämlich α den Werth von θ am Anfange der Zeit t anzeigt. Setzen wir hier $\frac{d\theta}{dt}$ statt ω, so erhalten wir nach verrichteter

Integration eine Gleichung zwischen θ und t, welche das Gesetz der Bewegung des Schwerpunctes des Systems vor Augen legt.

Ist das Bewegliche ein einzelner Punct, welcher, so wie der erwähnte Schwerpunct, stets dieselbe Entfernung λ von der Rotationsaxe beibehält, was durch eine unveränderliche Verbindung desselben mit dieser Axe erreicht wird, so geht, wenn wir unter M die Masse dieses Punctes verstehen, $\Sigma r^2 m$ in $\lambda^2 M$, und a in λ über, folglich haben wir, in so ferne ω, θ und α ihre Bedeutung beibehalten,

$$\omega^2 = \frac{2g}{\lambda}(sin.\theta - sin.\alpha).$$

Soll nun die Bewegung dieses Punctes mit jener des Schwerpunctes dergestalt übereinstimmen, daß, bei gleichen Abweichungen der aus beiden auf die Rotationsaxe gefällten Perpendikel von der verticalen Richtung, gleiche Winkelgeschwindigkeiten Statt finden, so muß augenscheinlich

$$(12) \qquad \lambda = \frac{\Sigma m r^2}{M a}$$

seyn.

Diese Formel lehrt die Schwingungen eines schweren Körpers um eine horizontale, nicht durch seinen Schwerpunct gehende fixe Axe, welcher in dieser Beziehung ein **zusammengesetztes Pendel** genannt zu werden pflegt, auf die Schwingungen eines einfachen Pendels reduciren, indem sie die Länge eines, in Hinsicht auf die Schwingungsweise, dem zusammengesetzten Pendel völlig gleichgeltenden einfachen anzeigt. Auch sieht man, daß alle Puncte eines zusammengesetzten Pendels, welche in der durch die Rotationsaxe und den Schwerpunct desselben gelegten Ebene, und in dem durch $\frac{\Sigma m r^2}{M a}$ ausgedrückten Abstande von der Rotationsaxe sich befinden, ihre Schwingungen in Verbindung mit dem ganzen Körper nicht anders vollbringen, als es der Fall seyn würde, wenn sie bloß mit der Rotationsaxe, nicht aber mit dem oscillirenden Körper verbunden wären. Diese Puncte, welche offenbar in einer zur Rotationsaxe parallelen Geraden liegen, heißen die **Mittelpuncte der Schwingung**.

Das Moment der Trägheit eines jeden Systems materieller Puncte in Bezug auf eine beliebige Axe läßt sich durch das Moment der Trägheit desselben Systems in Bezug auf die, durch den Mittelpunct der Masse oder den Schwerpunct geführte, der so eben genannten parallelen Axe ausdrücken. Es seyen nämlich in einem rechtwinkligen Coor-

dinatensysteme, dessen eine Axe jenen, auf welche sich die Momente der Trägheit beziehen, parallel lauft, x und y die nach den Richtungen der zwei anderen Axen genommenen Coordinaten irgend eines Theilchens m des gegebenen materiellen Systems; ρ und r die Abstände desselben von der durch den Schwerpunct gezogenen und von der ihr parallelen Geraden, endlich ξ, υ die Coordinaten des Punctes, in welchem die erstere, α, β die Coordinaten des Punctes, in welchem die letztere der Ebene xy begegnet, und a die Distanz beider, so haben wir

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$
$$\rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \upsilon)^2,$$

folglich

$$r^2 - \rho^2 = 2(\xi - \alpha)x + 2(\upsilon - \beta)y + \alpha^2 + \beta^2 - \xi^2 - \upsilon^2$$

und $\Sigma m r^2 - \Sigma m \rho^2 = 2(\xi - \alpha)\Sigma m x + 2(\upsilon - \beta)\Sigma m y$
$+ (\alpha^2 + \beta^2 - \xi^2 - \upsilon^2)\Sigma m.$

Aber es ist, der bekannten Eigenschaft des Mittelpunctes der Masse zu Folge,

$$\Sigma m x = \xi \Sigma m; \quad \Sigma m y = \upsilon \Sigma m;$$

daher wird

$$\Sigma m r^2 - \Sigma m \rho^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\xi - 2\beta\upsilon + \xi^2 + \upsilon^2)\Sigma m$$
$$= a^2 \Sigma m, \text{ mithin}$$

$$(13) \qquad \Sigma m r^2 = \Sigma m \rho^2 + a^2 \Sigma m.$$

Man ersieht hieraus, daß das Moment der Trägheit eines Systems in Bezug auf eine durch den Mittelpunct der Masse gehende Axe kleiner ist, als das Moment der Trägheit desselben in Bezug auf irgend eine andere, dieser parallele Axe.

Substituirt man den Ausdruck (13) in (12), so findet man wegen $\Sigma m = M$

$$\lambda = \frac{\Sigma m \rho^2}{M a} + a.$$

Da nun $\Sigma m \rho^2$ und $M a$ nothwendig positive Größen sind, so ist immer $\lambda > a$, d. h. die Mittelpuncte der Schwingung eines zusammengesetzten Pendels liegen tiefer als der Schwerpunct desselben.

Es ist bemerkenswerth, daß, wenn man die Gerade, in welcher die Mittelpuncte der Schwingung eines zusammengesetzten Pendels sich befinden, zur Rotationsaxe macht, die vorige Rotationsaxe sich in den geometrischen Ort der Mittelpuncte der Schwingung verwandelt. Denn

gehen a und λ hinsichtlich der neuen Rotationsaxe in a′ und λ′ über, so ist

$$\lambda' = \frac{\Sigma m \rho^2}{M a'} + a'.$$

Aber wir haben offenbar $a' = \lambda - a = \frac{\Sigma m \rho^2}{M a}$; mithin

$$\lambda' = a + \frac{\Sigma m \rho^2}{M a} = \lambda.$$

Um zu sehen, wie das Moment der Trägheit eines Systems in Hinsicht auf irgend eine Axe, von der Position derselben gegen drei fixe, in einem ihrer Puncte sich rechtwinklig durchschneidende gerade Linien, welche wir zugleich als die Axen der Coordinaten betrachten, abhängt, seyen α, β, γ die Neigungen der Axe des Trägheitsmomentes gegen jene der x, y, z; p der Abstand des Punctes x, y, z, in welchem wir uns die Masse m vereinigt denken, von der ersteren Axe, also $\Sigma m p^2$ das zu suchende Moment der Trägheit selbst, und R der aus dem Anfangspuncte der Coordinaten zu dem Puncte x, y, z gezogene Radiusvector, also $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ die Cosinusse der Winkel, welche r mit den Axen der x, y, z bildet, so haben wir für den Cosinus der Neigung des Radiusvectors r gegen die Axe des Trägheitsmomentes den Ausdruck

$$\frac{x}{r} \cos. \alpha + \frac{y}{r} \cos. \beta + \frac{z}{r} \cos. \gamma.$$

Das Perpendikel p ist das Product des Radiusvectors r mit dem Sinus des so eben genannten Winkels; daher besteht die Gleichung

$$p^2 = r^2 - (x \cos. \alpha + y \cos. \beta + z \cos. \gamma)^2,$$

welche uns nach gehöriger Entwickelung, wegen $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$p^2 = x^2 \sin. \alpha^2 + y^2 \sin. \beta^2 + z^2 \sin. \gamma^2$$
$$- 2xy \cos. \alpha \cos. \beta - 2xz \cos. \alpha \cos. \gamma - 2yz \cos. \beta \cos. \gamma$$

gibt. Wir haben demnach

$$\Sigma m p^2 = \sin. \alpha^2 \Sigma m x^2 + \sin. \beta^2 \Sigma m y^2 + \sin. \gamma^2 \Sigma m z^2$$
$$- 2 \cos. \alpha \cos. \beta \Sigma m x y - 2 \cos. \alpha \cos. \gamma \Sigma m x z - 2 \cos. \beta \cos. \gamma \Sigma m y z.$$

Diese Formel verhilft uns zu dem Werthe von $\Sigma m p^2$, wenn wir $\Sigma m x^2$, $\Sigma m y^2$, $\Sigma m z^2$ und $\Sigma m x y$, $\Sigma m x z$, $\Sigma m y z$ kennen.

Welche auch immer die Position des Anfangspunctes der Coordinaten sey, so kann man jederzeit die Axen der x, y, z dergestalt annehmen, daß die Summen $\Sigma m x y$, $\Sigma m x z$, $\Sigma m y z$ verschwinden.

Denn führen wir durch den Anfangspunct der Coordinaten drei andere rechtwinklige Axen, welche wir die der x', y', z' nennen wollen; die Winkel, welche die Axen der x und x' mit der Durchschnittslinie der Ebenen xy und $x'y'$ bilden, seyen ψ und φ, und der Neigungswinkel dieser Ebenen sey θ; so gibt es stets reelle Werthe für ψ, φ und θ, in Bezug auf welche die Gleichungen

$$\Sigma m x'y' = o; \quad \Sigma m x'z' = o; \quad \Sigma m y'z' = o$$

Statt finden. Es ist nämlich, wie aus den zwei ersten Vorlesungen über die analytische Geometrie erhellet,

$$x' = (\cos.\varphi \cos.\psi + \sin.\varphi \sin.\psi \cos.\theta)\, x$$
$$+ (\cos.\varphi \sin.\psi - \sin.\varphi \cos.\psi \cos.\theta)\, y$$
$$+ \sin.\varphi \sin.\theta \,.\, z,$$
$$y' = (\sin.\varphi \cos.\psi - \cos.\varphi \sin.\psi \cos.\theta)\, x$$
$$+ (\sin.\varphi \sin.\psi + \cos.\varphi \cos.\psi \cos.\theta)\, y$$
$$- \cos.\varphi \sin.\theta \,.\, z,$$
$$z' = - \sin.\psi \sin.\theta \,.\, x + \cos.\psi \sin.\theta \,.\, y + \cos.\theta \,.\, z.$$

Setzen wir

$$X = x \cos.\psi + y \sin.\psi,$$
$$Y = x \sin.\psi \cos.\theta - y \cos.\psi \cos.\theta + z \sin.\theta,$$

so nehmen die beiden ersteren Ausdrücke die kürzeren Formen

$$x' = X \cos.\varphi + Y \sin.\varphi; \quad y' = X \sin.\varphi - Y \cos.\varphi$$

an, und wir erhalten, der Bedingungen $\Sigma m x'z' = o$ und $\Sigma m y'z' = o$ wegen, die Gleichungen:

$$\cos.\varphi\, \Sigma m X z' + \sin.\varphi\, \Sigma m Y z' = o; \quad \sin.\varphi\, \Sigma m X z' - \cos.\varphi\, \Sigma m Y z' = o;$$

welche nicht zusammen bestehen können, wenn nicht

$$\Sigma m X z' = o \quad \text{und} \quad \Sigma m Y z' = o$$

ist. Substituiren wir für X und Y die obigen Ausdrücke, und bezeichnen wir die Summen

$$\Sigma m x^2, \quad \Sigma m y^2, \quad \Sigma m z^2, \quad \Sigma m x y, \quad \Sigma m x z, \quad \Sigma m y z,$$

welche wir hier als gegebene Größen betrachten, durch

$$A, \quad B, \quad C, \quad D, \quad E, \quad F,$$

so ergeben sich nach einer leichten Rechnung die Gleichungen

$$(B - A) \sin.\psi \cos.\psi \sin.\theta + D (\cos.\psi^2 - \sin.\psi^2) \sin.\theta$$
$$+ (E \cos.\psi + F \sin.\psi) \cos.\theta = o,$$
$$(A \sin.\psi^2 + B \cos.\psi^2 - C - 2 D \sin.\psi \cos.\psi) \sin.\theta \cos.\theta$$
$$+ (F \cos.\psi - E \sin.\psi) (\cos.\theta^2 - \sin.\theta^2) = o.$$

Dieselben stimmen mit den in der neunten Vorlesung II. erhaltenen genau überein, wenn man daselbst A, B, C statt 2 A, 2 B, 2 C schreibt; wir sind daher, die am angeführten Orte vorgenommene Rechnung vor Augen habend, zu dem Schlusse berechtiget, daß obigen Gleichungen jederzeit durch reelle Werthe von ψ und θ Genüge geleistet werden kann.

Die Gleichung $\Sigma m x' y' = o$ gibt uns ferner

$$\sin.\varphi \cos.\varphi \, \Sigma m (X^2 - Y^2) - (\cos.\varphi^2 - \sin.\varphi^2) \Sigma m X Y = o$$

oder $$\sin. 2\varphi \, \Sigma m (X^2 - Y^2) - 2 \cos. 2\varphi \, \Sigma m X Y = o,$$

also $$tg. 2\varphi = \frac{2 \Sigma m X Y}{\Sigma m (X^2 - Y^2)},$$

daher ist φ reell, sobald es ψ und θ sind.

Lassen wir nun die Axen der x, y, z jene Lagen annehmen, welche wir so eben den Axen der x', y', z' angewiesen haben, so wird

(14) $$\Sigma m p^2 = \sin.\alpha^2 \Sigma m x^2 + \sin.\beta^2 \Sigma m y^2 + \sin.\gamma^2 \Sigma m z^2.$$

Die gegenwärtigen Axen der Coordinaten heißen die **Hauptaxen der Momente der Trägheit**. Bezeichnen wir die ihnen entsprechenden Momente der Trägheit oder die Summen

$$\Sigma m (y^2 + z^2), \quad \Sigma m (x^2 + z^2), \quad \Sigma m (x^2 + y^2)$$

durch A, B, C, so haben wir

$$2\Sigma m x^2 = B + C - A; \; 2\Sigma m y^2 = A + C - B; \; 2\Sigma m z^2 = A + B - C;$$

mithin
$$\begin{aligned} 2\Sigma m p^2 = & \; A (\sin.\beta^2 + \sin.\gamma^2 - \sin.\alpha^2) \\ & + B (\sin.\alpha^2 + \sin.\gamma^2 - \sin.\beta^2) \\ & + C (\sin.\alpha^2 + \sin.\beta^2 - \sin.\gamma^2); \end{aligned}$$

welche Gleichung, da wegen $\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$

$$\begin{aligned} \sin.\beta^2 + \sin.\gamma^2 - \sin.\alpha^2 &= 2 \cos.\alpha^2; \\ \sin.\alpha^2 + \sin.\gamma^2 - \sin.\beta^2 &= 2 \cos.\beta^2; \\ \sin.\alpha^2 + \sin.\beta^2 - \sin.\gamma^2 &= 2 \cos.\gamma^2 \end{aligned}$$

ist, auf die einfache Formel

(15) $$\Sigma m p^2 = A \cos.\alpha^2 + B \cos.\beta^2 + C \cos.\gamma^2$$ führt.

Ist A die größte, und C die kleinste der Größen A, B, C, so ist $\Sigma m p^2 < A$ und $\Sigma m p^2 > C$; was man leicht zeigen kann, wenn man mittelst der Gleichung $\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = 1$ ein Mal $\cos.\alpha$, und das andere Mal $\cos.\gamma$ aus (15) wegschafft.

Zwei und zwanzigste Vorlesung.

Über die drehende Bewegung eines unveränderlichen Systems materieller Puncte um einen fixen Punct.

Ist ein System materieller Puncte, welche sowohl unter einander, als auch mit einem fixen Puncte unveränderlich verbunden sind, um den letzteren vollkommen beweglich, so haben wir, wenn wir den fixen Punct als den Anfangspunct der rechtwinkligen Coordinaten betrachten, und die momentanen Kräfte, welche am Anfange der Zeit t auf die im Puncte x, y, z vereinigte Masse m, parallel mit den Axen der x, y, z, wirken, durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; die Geschwindigkeiten, welche dieselben dieser Masse nach den genannten Richtungen ertheilen, durch $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$; endlich die am Ende der Zeit t an der Masse m thätigen continuirlichen Kräfte durch mX, mY, mZ vorstellen, aus den in der zwanzigsten Vorlesung auseinandergesetzten Gründen, für den Anfang der Bewegung die Gleichungen

$$(1)\qquad \Sigma m(\bar{y}x - \bar{x}y) = \Sigma(\mathfrak{Y}x - \mathfrak{X}y),$$
$$\Sigma m(\bar{x}z - \bar{z}x) = \Sigma(\mathfrak{X}z - \mathfrak{Z}x),$$
$$\Sigma m(\bar{z}y - \bar{y}z) = \Sigma(\mathfrak{Z}y - \mathfrak{Y}z),$$

und für den Zustand derselben am Ende der Zeit t die Gleichungen

$$(2)\qquad \Sigma m\left(\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma m(Yx - Xy),$$
$$\Sigma m\left(\frac{z\,d^2x - x\,d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma m(Xz - Zx),$$
$$\Sigma m\left(\frac{y\,d^2z - z\,d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma m(Zy - Yz),$$

in welchen sich die durch Σ angedeutete Summe auf alle materiellen Puncte des Systems erstreckt, und falls dieses System ein mit Materie erfüllter Körper wäre, das Differenzial seiner Masse an die Stelle von m, und das Integralzeichen an die Stelle von Σ tritt.

Um die weitere Behandlung der Gleichungen (2) zu erleichtern, wollen wir die Coordinaten jedes einzelnen Bestandtheiles des Systems auf neue independente variable Größen, welche zur Bestimmung der

Position des ganzen Systemes in jedem gegebenen Augenblicke hinreichen, reduciren. Hiezu dienen uns folgende, den in der siebenten Vorlesung angestellten ähnliche, Betrachtungen.

Denken wir uns durch den fixen Anfangspunct der Coordinaten drei auf einander wechselweise senkrechte Axen, welche wir jene der x', y', z' nennen wollen, gezogen, und mit dem gegebenen Systeme unveränderlich verbunden, also mit ihm zugleich sich bewegend, und setzen wir im Allgemeinen für das Ende der Zeit t und in Bezug auf die Masse m

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \\ y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 z', \\ z &= a_3 x' + b_3 y' + c_3 z', \end{aligned}$$

wobei a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, ꝛc. die aus der zweiten Vorlesung über die analytische Geometrie bekannte Bedeutung haben, so ändern sich, bei dem Übergange von einem materiellen Puncte des Systems zum andern, bloß x', y', z', und a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, ꝛc. bleiben constant; hingegen besteht der Einfluß, welchen die Bewegung des Systems auf die Coordinaten x, y, z eines bestimmten materiellen Punctes ausübt, bloß in der Veränderung von a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, ... Wir haben demnach, weil x', y', z' von t nicht abhängen,

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x' \frac{da_1}{dt} + y' \frac{db_1}{dt} + z' \frac{dc_1}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= x' \frac{da_2}{dt} + y' \frac{db_2}{dt} + z' \frac{dc_2}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= x' \frac{da_3}{dt} + y' \frac{db_3}{dt} + z' \frac{dc_3}{dt}. \end{aligned}$$

Allein statt den Gleichungen (2) die Axen der x, y, z zum Grunde zu legen, können wir hiezu jedes andere System rechtwinkliger Axen wählen, wenn wir nur dieselben im Raume als fix betrachten, und nichts hindert uns, die neuen Axen der Coordinaten so anzunehmen, daß die mit dem Systeme unveränderlich verbundenen Axen der x', y', z' am Ende der Zeit t mit ihnen zusammen fallen. Da nun unter dieser Voraussetzung im letzten Augenblicke der Zeit t, den auf die fixen Axen sich beziehenden Coordinaten der Masse m die Werthe x', y', z' zukommen, so erhalten die Gleichungen (2) die Formen

$$(5)\quad \Sigma m\left(\frac{x'd^2y' - y'd^2x'}{dt^2}\right) = \Sigma m(Y'x' - X'y'),$$

$$\Sigma m\left(\frac{z'd^2x' - x'd^2z'}{dt^2}\right) = \Sigma m(X'z' - Z'x'),$$

$$\Sigma m\left(\frac{y'd^2z' - z'd^2y'}{dt^2}\right) = \Sigma m(Z'y' - Y'z'),$$

wobei X', Y', Z' nach den Richtungen der x', y', z' wirkende, den Kräften X, Y, Z gleichgeltende Kräfte anzeigen.

Aus den Gleichungen (3) folgt bekanntlich

$$x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z,$$
$$y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z,$$
$$z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z;$$

und hieraus, in so ferne wir die Axen der x', y', z' in ihrer am Ende der Zeit t Statt findenden Position mit den oben erwähnten fixen Axen verwechseln dürfen,

$$\frac{dx'}{dt} = a_1\frac{dx}{dt} + a_2\frac{dy}{dt} + a_3\frac{dz}{dt},$$
$$\frac{dy'}{dt} = b_1\frac{dx}{dt} + b_2\frac{dy}{dt} + b_3\frac{dz}{dt},$$
$$\frac{dz'}{dt} = c_1\frac{dx}{dt} + c_2\frac{dy}{dt} + c_3\frac{dz}{dt}.$$

Substituiren wir die Ausdrücke (4) in diese Gleichungen, so folgt

$$\frac{dx'}{dt} = \left(a_1\frac{da_1}{dt} + a_2\frac{da_2}{dt} + a_3\frac{da_3}{dt}\right)x'$$
$$+ \left(a_1\frac{db_1}{dt} + a_2\frac{db_2}{dt} + a_3\frac{db_3}{dt}\right)y'$$
$$+ \left(a_1\frac{dc_1}{dt} + a_2\frac{dc_2}{dt} + a_3\frac{dc_3}{dt}\right)z',$$

$$\frac{dy'}{dt} = \left(b_1\frac{da_1}{dt} + b_2\frac{da_2}{dt} + b_3\frac{da_3}{dt}\right)x'$$
$$+ \left(b_1\frac{db_1}{dt} + b_2\frac{db_2}{dt} + b_3\frac{db_3}{dt}\right)y'$$
$$+ \left(b_1\frac{dc_1}{dt} + b_2\frac{dc_2}{dt} + b_3\frac{dc_3}{dt}\right)z',$$

$$\frac{dz'}{dt} = \left(c_1\frac{da_1}{dt} + c_2\frac{da_2}{dt} + c_3\frac{da_3}{dt}\right)x'$$
$$+ \left(c_1\frac{db_1}{dt} + c_2\frac{db_2}{dt} + c_3\frac{db_3}{dt}\right)y'$$
$$+ \left(c_1\frac{dc_1}{dt} + c_2\frac{dc_2}{dt} + c_3\frac{dc_3}{dt}\right)z'.$$

Die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \end{array}\right\} \text{ geben } \left\{\begin{array}{l} a_1 \frac{d a_1}{dt} + a_2 \frac{d a_2}{dt} + a_3 \frac{d a_3}{dt} = 0, \\ b_1 \frac{d b_1}{dt} + b_2 \frac{d b_2}{dt} + b_3 \frac{d b_3}{dt} = 0, \\ c_1 \frac{d c_1}{dt} + c_2 \frac{d c_2}{dt} + c_3 \frac{d c_3}{dt} = 0; \end{array}\right.$$

ferner ist, wenn wir

(6)
$$b_1 \frac{d a_1}{dt} + b_2 \frac{d a_2}{dt} + b_3 \frac{d a_3}{dt} = r,$$
$$a_1 \frac{d c_1}{dt} + a_2 \frac{d c_2}{dt} + a_3 \frac{d c_3}{dt} = q,$$
$$c_1 \frac{d b_1}{dt} + c_2 \frac{d b_2}{dt} + c_3 \frac{d b_3}{dt} = p$$

setzen, wegen
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0,$$
$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0,$$
$$b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0,$$

wie man leicht sieht,

(7)
$$a_1 \frac{d b_1}{dt} + a_2 \frac{d b_2}{dt} + a_3 \frac{d b_3}{dt} = - r,$$
$$c_1 \frac{d a_1}{dt} + c_2 \frac{d a_2}{dt} + c_3 \frac{d a_3}{dt} = - q,$$
$$b_1 \frac{d c_1}{dt} + b_2 \frac{d c_2}{dt} + b_3 \frac{d c_3}{dt} = - p,$$

mithin

(8)
$$\frac{dx'}{dt} = q z' - r y',$$
$$\frac{dy'}{dt} = r x' - p z',$$
$$\frac{dz'}{dt} = p y' - q x'.$$

Hieraus erhält man durch nochmaliges Differenziren in Bezug auf t, mit Berücksichtigung der durch diese Ausdrücke gegebenen Werthe der Differenzialquotienten $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$:

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = z' \frac{dq}{dt} - y' \frac{dr}{dt} + q(p y' - q x') - r(r x' - p z'),$$
$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = x' \frac{dr}{dt} - z' \frac{dp}{dt} + r(q z' - r y') - p(p y' - q x'),$$
$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = y' \frac{dp}{dt} - x' \frac{dq}{dt} + p(r x' - p z') - q(q z' - r y'),$$

wodurch sich die Quotienten

$$\frac{x' d^2 y' - y' d^2 x'}{dt^2}, \quad \frac{z' d^2 x' - x' d^2 z'}{dt^2}, \quad \frac{y' d^2 z' - z' d^2 y'}{dt^2},$$

und, wenn man bedenkt, daß die Größen p, q, r für alle Bestandtheile des sich bewegenden Systems in jedem einzelnen Augenblicke dieselben Werthe haben, auch die Summen

$$\Sigma m \left(\frac{x' d^2 y' - y' d^2 x'}{dt^2}\right), \quad \Sigma m \left(\frac{z' d^2 x' - x' d^2 z'}{dt^2}\right), \quad \Sigma m \left(\frac{y' d^2 z' - z' d^2 y'}{dt^2}\right)$$

ohne Schwierigkeit durch p, q, r und $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ darstellen lassen, folglich die Gleichungen (5) eine Gestalt erhalten, welche p, q, r durch t auszudrücken gestattet. Da jedoch diese Operation die Integration dreier Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zwischen den vier Variablen p, q, r, t erheischt, so muß man darauf bedacht seyn, denselben die einfachsten Formen, deren sie fähig sind, zu ertheilen. Zu diesem Behufe wählen wir die Hauptaxen der Momente der Trägheit des Systems, zu deren Kenntniß wir in der vorhergehenden Vorlesung gelangt sind, zu jenen der x', y', z'. Da hiebei die Summen

$$\Sigma m x' y', \quad \Sigma m x' z', \quad \Sigma m y' z'$$

verschwinden, so finden wir

$$\Sigma m \left(\frac{x' d^2 y' - y' d^2 x'}{dt^2}\right) = \frac{dr}{dt} \Sigma m (x'^2 + y'^2) + pq \Sigma m (x'^2 - y'^2),$$

$$\Sigma m \left(\frac{z' d^2 x' - x' d^2 z'}{dt^2}\right) = \frac{dq}{dt} \Sigma m (z'^2 + x'^2) + pr \Sigma m (z'^2 - x'^2),$$

$$\Sigma m \left(\frac{y' d^2 z' - z' d^2 y'}{dt^2}\right) = \frac{dp}{dt} \Sigma m (y'^2 + z'^2) + qr \Sigma m (y'^2 - z'^2).$$

Bezeichnen wir die Momente der Trägheit unseres Systems hinsichtlich der gegenwärtigen Axen der x', y', z' durch A, B, C, so haben wir

$$\Sigma m (x'^2 + y'^2) = C,$$
$$\Sigma m (z'^2 + x'^2) = B,$$
$$\Sigma m (y'^2 + z'^2) = A \quad \text{und}$$

$$\Sigma m (x'^2 - y'^2) = B - A,$$
$$\Sigma m (z'^2 - x'^2) = A - C,$$
$$\Sigma m (y'^2 - z'^2) = C - B,$$

folglich verwandeln sich die Gleichungen (5) in

$$(9)\quad \begin{aligned} C\,dr + (B - A)\,pq\,dt &= dt\,\Sigma m(Y'x' - X'y'),\\ B\,dq + (A - C)\,pr\,dt &= dt\,\Sigma m(X'z' - Z'x'),\\ A\,dp + (C - B)\,qr\,dt &= dt\,\Sigma m(Z'y' - Y'z'). \end{aligned}$$

Es seyen nun φ und ψ die Winkel, welche die Durchschnittslinie der Ebenen $x'y'$ und xy am Ende der Zeit t mit den Axen der x' und x bildet, und θ die dem genannten Augenblicke entsprechende Neigung der Ebene $x'y'$ gegen jene der xy, so bestehen für die Coefficienten a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, ... der ersten und zweiten Vorlesung über die analytische Geometrie zu Folge, die Ausdrücke

$$(10)\quad \begin{aligned} a_1 &= \cos.\varphi \cos.\psi + \sin.\varphi \sin.\psi \cos.\theta,\\ b_1 &= \sin.\varphi \cos.\psi - \cos.\varphi \sin.\psi \cos.\theta,\\ c_1 &= -\sin.\psi \sin.\theta;\\ a_2 &= \cos.\varphi \sin.\psi - \sin.\varphi \cos.\psi \cos.\theta,\\ b_2 &= \sin.\varphi \sin.\psi + \cos.\varphi \cos.\psi \cos.\theta,\\ c_2 &= \cos.\psi \sin.\theta;\\ a_3 &= \sin.\varphi \sin.\theta,\\ b_3 &= -\cos.\varphi \sin.\theta,\\ c_3 &= \cos.\theta. \end{aligned}$$

Wie man leicht sieht, ist

$$\begin{aligned} da_1 &= -b_1 d\varphi - a_2 d\psi + c_1 \sin.\varphi\,.\,d\theta,\\ da_2 &= -b_2 d\varphi + a_1 d\psi + c_2 \sin.\varphi\,.\,d\theta,\\ da_3 &= -b_3 d\varphi + c_3 \sin.\varphi\,.\,d\theta;\\ dc_1 &= -c_2 d\psi - \sin.\psi \cos.\theta\,.\,d\theta,\\ dc_2 &= c_1 d\psi + \cos.\psi \cos.\theta\,.\,d\theta,\\ dc_3 &= -\sin.\theta\, d\theta; \end{aligned}$$

substituiren wir diese Resultate in die zwei ersten der Gleichungen (6), und in die letzte der Gleichungen (7), so ergibt sich wegen $a_1b_2 - a_2b_1 = c_3$ (achte Vorles.) $a_2c_1 - a_1c_2 = b_3$, $b_1c_2 - b_2c_1 = a_3$

$$(11)\quad \begin{aligned} r\,dt &= -d\varphi + \cos.\theta\, d\psi,\\ q\,dt &= -\cos.\varphi \sin.\theta\, d\psi - \sin.\varphi\, d\theta,\\ p\,dt &= \sin.\varphi \sin.\theta\, d\psi - \cos.\varphi\, d\theta. \end{aligned}$$

Da sich die Größen

$\Sigma m(Y'x' - X'y')$, $\Sigma m(X'z' - Z'x')$, $\Sigma m(Z'y' - Y'z')$,

den Daten der zu lösenden Aufgabe gemäß, durch φ, ψ, θ darstellen lassen müssen, so bieten uns die Gleichungen (9) und (11), mit einander verbunden, nach gehöriger Integration und Beseitigung von p, q,

r, die Winkel φ, ψ und θ als Functionen von t dar, wodurch wir zur vollständigen Kenntniß der Bewegung des gegebenen Systems um den fixen Punct gelangen.

Wir wollen nun den besonderen Fall in Erwägung ziehen, wenn auf das System keine continuirlichen Kräfte wirken. In demselben ist $X' = o$, $Y' = o$, $Z' = o$, mithin gehen die Gleichungen (9) in folgende

$$(12) \quad \begin{aligned} C\,dr + (B - A)\,pq\,dt &= o, \\ B\,dq + (A - C)\,pr\,dt &= o, \\ A\,dp + (C - B)\,qr\,dt &= o \end{aligned}$$

über, welche uns, wenn wir sie der Reihe nach ein Mal mit r, q, p, und das andere Mal mit Cr, Bq, Ap multipliciren,

$$Cr\,dr + Bq\,dq + Ap\,dp = o$$

$$\text{und} \quad C^2 r\,dr + B^2 q\,dq + A^2 p\,dp = o$$

geben, woraus wir durch Integration

$$(13) \quad \begin{aligned} Cr^2 + Bq^2 + Ap^2 &= h^2, \\ C^2 r^2 + B^2 q^2 + A^2 p^2 &= k^2 \end{aligned}$$

erhalten. Hier sind h^2 und k^2 die durch diese Operation herbeigeführten Constanten, welche, da die Größen A, B, C ihrer Natur nach bloß positiver Werthe fähig sind, und ein Gleiches von p^2, q^2, r^2 gilt, stets positiv ausfallen müssen.

Drücken wir mittelst (13) p^2 und q^2 durch r^2 aus, so finden wir

$$p^2 = \frac{k^2 - B h^2 + (B - C) C r^2}{A (A - B)}; \quad q^2 = \frac{k^2 - A h^2 + (A - C) C r^2}{B (B - A)};$$

und, nach vollbrachter Substitution dieser Resultate in die erste der Gleichungen (12)

$$(14) \quad dt = \frac{C\sqrt{AB}\,.\,dr}{\sqrt{[k^2 - A h^2 + (A - C) C r^2]\,[B h^2 - k^2 + (C - B) C r^2]}}.$$

Diese Differenzialformel muß also integrirt werden, um t durch r, und umgekehrt r durch t darstellen zu können. Im Allgemeinen läßt sich jedoch das betreffende Integral unter keiner endlichen Form angeben, sondern man muß sich mit einer unendlichen Reihe begnügen.

Die obigen Ausdrücke für $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ geben uns, mit Rücksicht auf den Umstand, daß die Axen der x', y', z' mit den Hauptaxen der Momente der Trägheit unseres Systems zusammenfallen:

$$\Sigma m \left(\frac{x' dy' - y' dx'}{dt}\right) = Cr,$$

$$\Sigma m \left(\frac{z' dx' - x' dz'}{dt}\right) = Bq,$$

$$\Sigma m \left(\frac{y' dz' - z' dy'}{dt}\right) = Ap;$$

daher werden die Cosinusse der Winkel, unter welchen die Axe, hinsichtlich welcher die Summe der Momente der das System in Bewegung setzenden Kräfte am größten ausfällt, am Ende der Zeit t gegen die Axen der x', y', z' geneigt ist, der in der zwanzigsten Vorlesung gemachten Bemerkung gemäß, durch

$$\frac{Ap}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}},\quad \frac{Bq}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}},\quad \frac{Cr}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}}$$

oder $\frac{Ap}{k}$, $\frac{Bq}{k}$, $\frac{Cr}{k}$

ausgedrückt. Aber die Position dieser Axe der größten Summe, der Momente im Raume ist, wie wir am angeführten Orte gezeigt haben, für die ganze Dauer der Bewegung des gegebenen Systems unveränderlich; nehmen wir demnach diese Axe für jene der z an, so haben wir

$$a_3 = \frac{Ap}{k},\qquad b_3 = \frac{Bq}{k},\qquad c_3 = \frac{Cr}{k},$$

d. h.

$$(15)\quad \sin.\varphi \sin.\theta = \frac{Ap}{k},\ \cos.\varphi \sin.\theta = -\frac{Bq}{k},\ \cos.\theta = \frac{Cr}{k},$$

welche Gleichungen uns die Winkel φ und θ durch t auszudrücken gestatten.

Um ψ durch t darzustellen, eliminiren wir $d\theta$ mittelst der zwei letzten der Gleichungen (11); wir erhalten hiedurch

$$\sin.\theta\, d\psi = (p \sin.\varphi - q \cos.\varphi)\, dt,$$

woraus nach verrichteter Multiplication mit $\sin.\theta$ und mit Rücksicht auf die Gleichungen (15)

$$(16)\qquad d\psi = \frac{k\,(Ap^2 + Bq^2)}{k^2 - Cr^2}\, dt$$

folgt.

Der Umstand, daß die Constante k die größte Summe der Momente der das System zur Bewegung antreibenden Kräfte ausdrückt,

und $\frac{Ap}{k}$, $\frac{Bq}{k}$, $\frac{Cr}{k}$ die Cosinusse der Winkel sind, welche die diesen Momenten zugehörige Axe mit den Richtungen der positiven x', y', z' bildet, bietet uns ein Mittel dar, sowohl die Constante k, als auch, wenn man nämlich die dem Anfange der Bewegung zukommenden Werthe von p, q, r in die Gleichung $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h^2$ einführt, h zu bestimmen. Wie die Constanten, welche in den Integralien der Differenzialformeln (14) und (16) erscheinen, ausgemittelt werden, ist für sich klar.

Drei und zwanzigste Vorlesung.

Über die Hauptaxen der Drehung eines Systems materieller Puncte.

Wir wollen gegenwärtig die Bedeutung der Größen, welche wir in der vorhergehenden Vorlesung durch p, q, r bezeichnet haben, und die daraus sich ergebenden Folgerungen in Betrachtung ziehen.

Da
$$p = -b_1\frac{dc_1}{dt} - b_2\frac{dc_2}{dt} - b_3\frac{dc_3}{dt},$$
$$q = a_1\frac{dc_1}{dt} + a_2\frac{dc_2}{dt} + a_3\frac{dc_3}{dt}$$

ist, und c_1, c_2, c_3 die Cosinusse der Winkel anzeigen, welche die mit dem gegebenen materiellen Systeme unveränderlich verbundene Axe der z' mit den fixen Axen der x, y, z am Ende der Zeit t einschließt, so müssen, wenn die erstere Axe während des Zeittheilchens dt in Ruhe bleibt, wegen des damit verknüpften Verschwindens der Differenzialien dieser Cosinusse, p und q gleich Null werden. Hiedurch erhält man, in so ferne man sich durch den Anfangspunct der Coordinaten drei fixe Axen gezogen denkt, mit welchen die Axen der x', y', z' am Ende der Zeit t zusammenfallen,

$$\frac{dx'}{dt} = -ry', \quad \frac{dy'}{dt} = rx', \quad \frac{dz'}{dt} = 0.$$

Es sey nun θ der Winkel, unter welchem eine auf die Axe der z' senkrechte, mit dem gegebenen Systeme zugleich sich bewegende Gerade ρ am Ende der Zeit t gegen die als fix betrachtete Richtung der x' geneigt ist, so haben wir, wenn wir unter x', y', z' die Coordinaten ihres Endpunctes verstehen:

$$x' = \rho \cos.\theta, \quad y' = \rho \sin.\theta,$$

mithin $dx' = -\rho \sin.\theta\, d\theta, \quad dy' = \rho \cos.\theta\, d\theta,$

und daher $\dfrac{dx'}{dt} = -y'\dfrac{d\theta}{dt}, \quad \dfrac{dy'}{dt} = x'\dfrac{d\theta}{dt}.$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den obigen lehrt, daß

$$r = \frac{d\theta}{dt}$$

ist, folglich r die Winkelgeschwindigkeit anzeigt, mit welcher die Drehung des Systems um die Axe der z' vor sich geht.

Eben so läßt sich zeigen, daß in den besonderen Fällen, wenn eine Drehung des gegebenen Systems um die Axe der y' oder x' erfolgt, q und p die diesen Bewegungen entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten vorstellen.

Unter den neun Differenzialien da_1, db_1, dc_1, da_2, db_2, dc_2, da_3, db_3, dc_3 sind drei willkürliche vorhanden; es ist daher erlaubt sich vorzustellen, daß die Größen p, q, r dieselben Werthe, welche ihnen in Bezug auf gewisse Drehungen des Systems um die Axen der x', y', z' zukommen, auch bei irgend einer Bewegung desselben um den fixen Anfangspunct der Coordinaten besitzen, für welche die diese Werthe enthaltenden Gleichungen (8), nämlich

$$\frac{dx'}{dt} = qz' - ry'; \quad \frac{dy'}{dt} = rx' - pz'; \quad \frac{dz'}{dt} = py' - qx'$$

gelten.

Andererseits kann man sich die drei mit den Winkelgeschwindigkeiten p, q, r erfolgenden Rotationen des Systems um die Axen der x', y', z' zugleich Statt findend denken, und da hinsichtlich der ersten dieser Rotationen $\frac{dx'}{dt} = -ry'$,

hinsichtlich der zweiten $\frac{dx'}{dt} = qz'$,

und hinsichtlich der dritten $\frac{dx'}{dt} = 0$

ist, so hat man, weil das totale Differenzial einer Variablen jederzeit der Summe ihrer partiellen Differenzialien gleich kommt, für $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ dieselben Ausdrücke, wie oben.

Hieraus folgt, daß jede Bewegung eines Systems unveränderlich mit einander verknüpfter materieller Puncte um einen fixen Punct als das Resultat der gleichzeitigen Drehung desselben um drei beliebige, durch den fixen Punct gelegte, sich rechtwinklig durchschneidende Axen angesehen werden kann.

Für alle Puncte, welche bei dieser Bewegung während des Zeittheilchens dt in Ruhe bleiben, ist $\frac{dx'}{dt} = 0$, $\frac{dy'}{dt} = 0$, $\frac{dz'}{dt} = 0$; folglich

(17) $qz' - ry' = 0$; $rx' - pz' = 0$; $py' - rx' = 0$.

Jede dieser Gleichungen ist ein nothwendiges Ergebniß der beiden

anderen; es liegen daher alle jene Puncte in einer durch den fixen Punct gehenden Geraden, deren Neigungswinkel gegen die Axen der x', y', z' die Cosinusse

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

haben. Nennen wir diese Neigungswinkel α, β, γ, und setzen wir

(18) $$\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\omega,$$

so ist

(19) $$p=\omega\cos.\alpha,\quad q=\omega\cos.\beta,\quad r=\omega\cos.\gamma,$$

mithin

(20) $$\frac{dx'}{dt}=\omega(z'\cos.\beta-y'\cos.\gamma),$$
$$\frac{dy'}{dt}=\omega(x'\cos.\gamma-z'\cos.\alpha),$$
$$\frac{dz'}{dt}=\omega(y'\cos.\alpha-x'\cos.\beta).$$

Stellen wir den Weg, welchen der Punct x', y', z' während des Zeittheilchens dt durchlauft, durch ds vor, so ergibt sich wegen

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

für die Geschwindigkeit $v=\frac{ds}{dt}$ des genannten Punctes während desselben Zeittheilchens die Gleichung

$$v^2=\omega^2[(z'\cos.\beta-y'\cos.\gamma)^2+(x'\cos.\gamma-z'\cos.\alpha)^2+(y'\cos.\alpha-x'\cos.\beta)^2]$$

oder

$$v^2=\omega^2[x'^2+y'^2+z'^2-(x'\cos.\alpha+y'\cos.\beta+z'\cos.\gamma)^2].$$

Es sey R der vom Anfangspuncte der Coordinaten zu dem Puncte x', y', z' gehende Radiusvector; ρ das von diesem Puncte auf die Gerade (17), deren Gleichungen

$$x'\cos.\gamma=z'\cos.\alpha,\quad y'\cos.\gamma=z'\cos.\beta$$

sind, gefällte Perpendikel, und P die Entfernung des Durchschnittspunctes dieses Perpendikels mit der genannten Geraden vom Anfangspuncte, so ist, weil ρ in der durch den Punct x', y', z' auf diese Gerade senkrecht geführten Ebene liegt,

$$x'\cos.\alpha+y'\cos.\beta+z'\cos.\alpha=P,$$

$$\text{also} \quad v^2 = \omega^2 [R^2 - P^2] = \omega^2 \rho^2$$
$$\text{und} \quad \frac{v}{\rho} = \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Wir sind demnach zu dem Schlusse berechtiget, daß aus den um drei wechselweise auf einander senkrechte Axen mit den Winkelgeschwindigkeiten p, q, r erfolgenden Rotationen eines Systems unveränderlich mit einander verbundener materieller Puncte, eine, der Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ entsprechende, mittlere Drehung um eine, durch den Durchschnittspunct der ersteren Axen gehende, gegen dieselben unter den Winkeln, deren Cosinusse

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

sind, geneigte Axe entspringt, und daher drehende Bewegungen nach demselben Gesetze, wie fortschreitende zusammengesetzt und zerlegt werden können.

Zugleich sehen wir, daß jede Bewegung eines Systems um einen fixen Punct sich als eine Folge von Bewegungen desselben um eine, ihrer Lage, sowohl in Bezug auf das System, wie auch in Bezug auf den Raum, im Allgemeinen fortwährend verändernde Axe betrachten läßt.

Betrachten wir jetzt die Bewegung eines, seiner Trägheit überlassenen Systems materieller Puncte um einen fixen Punct, und nehmen wir, alle in der vorhergehenden Vorlesung gemachten Voraussetzungen beibehaltend, an, daß während der Zeit t die Axe, um welche sich das System während des Zeittheilchens dt dreht, nur unmerklich von einer der Hauptaxen der Momente der Trägheit, z. B. von jener der z' verschieden sey, so weichen die Winkel, welche die erwähnte Rotationsaxe mit den Axen der x' und y' bildet, um eine äußerst geringe Größe von einem Rechten ab, und deßhalb sind die Werthe der Größen p und q sehr klein. Vernachlässiget man, in so ferne man bloß eine näherungsweise Berechnung der Bewegung des Systems beabsichtiget, das Product pq in Bezug auf p und q, so verwandelt sich die erste der Gleichungen (12) in

$$C dr = 0,$$
$$\text{woraus} \quad r = n$$

folgt, wenn man nämlich durch n eine, der Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ beinahe gleiche, Constante vorstellt. Führt man die-

ses Resultat in die zwei übrigen der erwähnten Gleichungen ein, so hat man

$$B\,dq + (A - C)\,np\,dt = 0,$$
$$A\,dp + (C - B)\,nq\,dt = 0.$$

Um diese Differenzialgleichungen zu integriren, eliminire man aus denselben das Differenzial dt, so ergibt sich

$$B\,(C - B)\,q\,dq + A\,(C - A)\,p\,dp = 0$$

oder $$\frac{B\,(C - B)}{A\,(C - A)}\,q\,dq + p\,dp = 0,$$

mithin durch Integration

$$\frac{B\,(C - B)}{A\,(C - A)}\,q^2 + p^2 = H^2,$$

d. h. $$q = \sqrt{\frac{A\,(C - A)}{B\,(C - B)}\,[H^2 - p^2]},$$

wobei H eine Constante anzeigt; folglich, wenn man diesen Werth von q in die zweite der obigen Gleichungen einführt,

$$dt = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{AB}{(C - A)\,(C - B)}} \cdot \frac{dp}{\sqrt{H^2 - p^2}},$$

und, in so ferne K eine Constante bedeutet,

$$t + K = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{AB}{(C - A)\,(C - B)}}\,\mathit{Arc.\,sin.}\,\frac{p}{H}$$

oder $$p = H\,\mathit{sin.}\left(t\,.\,n\sqrt{\frac{(C - A)\,(C - B)}{AB}} + K\right).$$

Substituirt man dieses Resultat in den obigen Ausdruck für q, so hat man

$$q = H\sqrt{\frac{A\,(C - A)}{B\,(C - B)}}\,\mathit{cos.}\left(t\,.\,n\sqrt{\frac{(C - A)\,(C - B)}{AB}} + K\right).$$

Die Bestimmung von φ, ψ, θ durch t ist jetzt mit keiner Schwierigkeit verbunden. Wir wollen uns jedoch hier in dieses Geschäft nicht einlassen, sondern wenden uns sogleich zu den Folgerungen, welche uns die so eben erhaltenen Formeln darbieten.

Erstlich bemerken wir, daß die gefundenen Werthe von p und q nur dann eine reelle Form haben, wenn die Differenzen $C - A$ und $C - B$ einerlei Zeichen besitzen; tritt dieser Fall nicht ein, so kann die Integration obiger Differenzialformel nicht durch Kreisbogen vollzogen werden, sondern sie ist durch Logarithmen zu bewerkstelligen, und deßhalb erscheinen p und q durch t mittelst Exponentialgrößen, d. i. mit-

telst Potenzen, in deren Exponenten t vorkommt, ausgedrückt. Dieselben Resultate lassen sich auch ohne neue Rechnung sogleich aus den obigen Ausdrücken für p und q ableiten, wenn man die Functionen des imaginären Bogens nach den bekannten Formeln in Exponentialgrößen umstaltet.

Ist nun die anfängliche Rotationsaxe des Systems sehr wenig von der Axe der z′ verschieden, so sind p und q sehr klein, folglich muß, wie die obigen Formeln lehren, auch der Werth von H äußerst gering seyn. Der Beschaffenheit der Sinusse und Cosinusse zu Folge, bleiben demnach p und q, sobald C — A und C — B einerlei Zeichen haben, auch bei dem fortwährenden Wachsen von t, d. h. während der ganzen Bewegung, sehr klein. Ist also das Trägheitsmoment jener Hauptaxe, mit welcher die augenblickliche Rotationsaxe eines sich selbst überlassenen Systems beinahe zusammenfällt, größer oder kleiner, als die hinsichtlich beiden der anderen Hauptaxen genommenen Trägheitsmomente, so muß das System in der Rotation um eine von der genannten Hauptaxe sehr wenig verschiedene Axe beharren. Haben aber C — A und C — B verschiedene Zeichen, so können p und q nicht während der ganzen Dauer der Bewegung sehr klein bleiben, sondern sie müssen, wegen des mit t zugleich anwachsenden Werthes der Exponentialgrößen, welche in den Ausdrücken für p und q sich zeigen, zuletzt gleichfalls jede gegebene Grenze überschreiten. Liegt demnach der Werth des Trägheitsmomentes des Systems in Bezug auf die Hauptaxe, in deren Nähe die augenblickliche Rotationsaxe sich befindet, zwischen den Werthen der den anderen Axen zugehörigen Trägheitsmomente, so entfernt sich die Rotationsaxe des Systems in den folgenden Augenblicken immer mehr und mehr von der erwähnten Hauptaxe.

Bewegt sich das System am Anfange der Zeit t um eine der Hauptaxen der Momente der Trägheit selbst, z. B. um die Axe der z′, so sind p und q für diesen Augenblick = o, folglich verschwindet die Constante H, und wir haben für die ganze Dauer der Bewegung p = o, q = o. Hieraus erhellet, daß ein mit einem fixen Puncte versehenes, und sich selbst überlassenes System materieller Puncte, sobald es um eine der durch den fixen Punct gehenden Hauptaxen der Momente der Trägheit zu rotiren beginnt, auch ohne Ende fort sich um dieselbe Axe drehen muß. Es heißen daher die Hauptaxen der Momente der Trägheit auch die Hauptaxen der Rotation eines Systems materieller Puncte. Die obigen Schlüsse setzen uns in den Stand,

zu beurtheilen, ob das System, falls es durch eine äußere Ursache in seiner Rotation um eine der Hauptaxen gestört, und um eine davon nur wenig abweichende Axe sich zu drehen genöthiget wird, seine vorige Rotationsaxe beizubehalten, oder sich von ihr noch mehr zu entfernen strebt. Man sagt in Bezug auf den ersten Fall, die Rotation des Systems um die Axen des größten und kleinsten Momentes der Trägheit sey stabil, und hinsichtlich des anderen, die Rotation um die dritte Hauptaxe der Trägheitsmomente sey labil.

Es läßt sich umgekehrt leicht zeigen, daß, wenn ein System materieller Puncte, welches bloß einen fixen Punct enthält, seiner Trägheit überlassen, sich fortwährend um dieselbe Axe dreht, diese eine der Hauptaxen der Momente der Trägheit seyn muß.

Denn da jeder der um eine Axe sich bewegenden materiellen Puncte, seiner Trägheit gemäß, der Tangente seiner Bahn zu folgen, mithin sich von der Rotationsaxe zu entfernen strebt, so entspringt hieraus eine Einwirkung auf diese Axe, welche durch den Quotienten gemessen wird, den man erhält, wenn man das Quadrat der Geschwindigkeit des genannten Punctes durch die Entfernung desselben von der Rotationsaxe theilt. Soll nun hiedurch keine Bewegung der Rotationsaxe selbst angeregt werden, so müssen die Kräfte, welche sämmtliche Bestandtheile des Systems auf die Axe ausüben, einander mittelst des fixen Punctes das Gleichgewicht halten. Nehmen wir nun die Rotationsaxe für die Axe der z, und den fixen Punct für den Anfangspunct der Coordinaten an, und nennen wir die Entfernung des mit der Masse m begabten Punctes x, y, z von derselben ρ, und die Winkelgeschwindigkeit des Systems ω, so wirkt dieser Punct auf die Rotationsaxe nach der Verlängerung des Perpendikels ρ mit der Kraft $\frac{m \cdot (\rho\omega)^2}{\rho} = m\rho\omega^2$. Um diese Kraft parallel mit den Axen der x und der y zu zerlegen, muß sie mit den Cosinussen der Winkel, welche ihre Richtung mit jenen der positiven x und y bildet, nämlich mit $\frac{x}{\rho}$ und $\frac{y}{\rho}$ multiplicirt werden; daher ist die Kraft, mit welcher der Punct m auf die Rotationsaxe nach der Richtung der x wirkt, $= m x \omega^2$, und die Kraft, welche derselbe nach der Richtung der y ausübt, $= m y \omega^2$. Da hier keine Kraft nach der Richtung der z Statt findet, so wird zum Bestehen des Gleichgewichtes sämmtlicher, aus der Trägheit des sich bewegenden Systems hervorgehenden, Kräfte erfordert, daß die Summen

$$\Sigma m x z \omega^2 = \omega^2 \Sigma m x z; \quad \Sigma m y z \omega^2 = \omega^2 \Sigma m y z$$

verschwinden, oder daß die Gleichungen

$$\Sigma m x z = 0, \quad \Sigma m y z = 0$$

erfüllt werden, wodurch die Richtigkeit der obigen Behauptung hinreichend begründet ist.

In dem hier erörterten Falle vereinigen sich alle Einwirkungen der Bestandtheile des Systems auf die Rotationsaxe zu einer durch den fixen Anfangspunct der Coordinaten gehenden Resultirenden, deren Größe $= \omega\sqrt{(\Sigma m x)^2 + (\Sigma m y)^2}$ ist, und den Druck bestimmt, welchen dieser fixe Punct auszuhalten hat.

Soll der fixe Punct gar keinen Druck, folglich die Rotationsaxe des Systems wegen der Trägheit desselben gar keine Gewalt erleiden, so müssen, nebst den Gleichungen $\Sigma m x z = 0$, $\Sigma m y z = 0$, auch noch die beiden Gleichungen

$$\Sigma m x = 0, \quad \Sigma m y = 0$$

Statt finden, woraus man ersieht, daß der Schwerpunct des Systems in der Rotationsaxe liegen muß.

Es besitzen demnach die durch den Schwerpunct eines unveränderlichen Systems materieller Puncte gehenden Hauptaxen der Momente der Trägheit die Eigenschaft, daß die, um eine derselben bereits vorhandene, Rotation des Systems vermöge der Trägheit fortbesteht, ohne daß die Rotationsaxe irgend einer Befestigung bedarf. Man nennt diese Hauptaxen deßhalb die freien Rotationsaxen des Systems.

Wir haben während des ganzen Verlaufes dieser und der vorhergehenden Vorlesung bloß die allgemeinste Beschaffenheit eines materiellen Systems im Auge gehabt, ohne die möglichen, die Rechnung vereinfachenden, speciellen Fälle zu berücksichtigen, mit deren Behandlung Jeder, der das Vorgetragene wohl aufgefaßt hat, ohne große Mühe zu Stande kommen wird. Hieher gehört insbesondere der Fall, wenn zwei der Hauptmomente der Trägheit des Systems in Bezug auf den fixen Punct desselben, oder gar alle drei, einander gleich sind. Wir begnügen uns hier damit, in Kürze bemerklich zu machen, daß, wenn die Momente der Trägheit in Hinsicht auf zwei der Hauptaxen übereinstimmen, jede durch den Durchschnittspunct dieser Hauptaxen, in der Ebene ihres Winkels, gezogene Gerade, und wenn die drei Hauptmomente der Trägheit einander gleich sind, jede wie immer durch den genannten Punct gezogene Gerade ebenfalls eine, mit demselben Trägheitsmomente versehene, Hauptaxe ist.

Denn nehmen wir die irgend einem Puncte eines materiellen Systems nothwendig zugehörenden Hauptaxen der Momente der Trägheit für die Axen der x, y, z an, d. h. setzen wir

$$\Sigma mxy = o, \quad \Sigma mxz = o, \quad \Sigma myz = o,$$

und in Bezug auf drei andere durch denselben Anfangspunct gezogene rechtwinklige Axen,

$$x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z,$$
$$y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z,$$
$$z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z,$$

so ergibt sich

$$\Sigma mx'y' = a_1 b_1 \Sigma mx^2 + a_2 b_2 \Sigma my^2 + a_3 b_3 \Sigma mz^2,$$
$$\Sigma mx'z' = a_1 c_1 \Sigma mx^2 + a_2 c_2 \Sigma my^2 + a_3 c_3 \Sigma mz^2,$$
$$\Sigma my'z' = b_1 c_1 \Sigma mx^2 + b_2 c_2 \Sigma my^2 + b_3 c_3 \Sigma mz^2.$$

Sind nun die den Axen der x und y entsprechenden Hauptmomente der Trägheit einander gleich, d. h. ist

$$\Sigma m (y^2 + z^2) = \Sigma m (x^2 + z^2),$$

mithin auch $\Sigma my^2 = \Sigma mx^2$, so wird

$$\Sigma mx'y' = (a_1 b_1 + a_2 b_2) \Sigma mx^2 + a_3 b_3 \Sigma mz^2$$
$$= a_3 b_3 (\Sigma mz^2 - \Sigma mx^2),$$
$$\Sigma mx'z' = a_3 c_3 (\Sigma mz^2 - \Sigma mx^2),$$
$$\Sigma my'z' = b_3 c_3 (\Sigma mz^2 - \Sigma mx^2).$$

Lassen wir jetzt die Axe der z' mit jener der z zusammen fallen, so haben wir $a_3 = o$, $b_3 = o$, folglich

$$\Sigma mx'y' = o, \quad \Sigma mx'z' = o, \quad \Sigma my'z' = o,$$

und daher sind die Axen der x' und y', welche Lage sie auch sonst in der Ebene xy haben mögen, Hauptaxen der Momente der Trägheit. Das auf die Axe der x' sich beziehende Trägheitsmoment $\Sigma m (y'^2 + z'^2)$ stimmt, wegen $b_1^2 + c_1^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 + a_3^2 = 1$, mit $\Sigma m (y^2 + z^2)$ überein, und ein Gleiches gilt auch von der Axe der y'.

Ist aber $\Sigma m (y^2 + z^2) = \Sigma m (x^2 + z^2) = \Sigma m (x^2 + y^2)$,

so ist auch $\Sigma mx^2 = \Sigma my^2 = \Sigma mz^2$,

folglich, obigen Gleichungen gemäß,

$$\Sigma mx'y' = o, \quad \Sigma mx'z' = o, \quad \Sigma my'z' = o,$$

wie auch immer die Axen der x', y', z' angenommen werden mögen, und diesen Axen gehört dasselbe Trägheitsmoment, wie den Axen der x, y, z.

Vier und zwanzigste Vorlesung.

Über einige andere allgemeine Eigenschaften der Bewegung eines Systems materieller Puncte.

I. Sind x, y, z die auf drei fixe rechtwinklige Axen sich beziehenden Coordinaten irgend eines mit der Masse m versehenen Punctes eines sich bewegenden materiellen Systems am Ende der Zeit t, und mX, mY, mZ die Kräfte, welche diesen Punct während des Zeittheilchens dt afficiren, so besteht jederzeit die Gleichung

$$(1)\ \Sigma m\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0,$$

worin die Variationen δx, δy, δz den durch die Beschaffenheit des Systems gegebenen Bedingungsgleichungen unterliegen, und das Summenzeichen Σ sich auf alle Puncte desselben erstreckt.

Es seyen nun ξ, υ, ζ die dem Ende der Zeit t entsprechenden Coordinaten des Mittelpunctes der Masse des Systems, und x', y', z' die Coordinaten des Punctes m in Bezug auf drei, durch den Mittelpunct der Masse den Richtungen der x, y, z parallel geführte Axen; so haben wir

$$x=\xi+x',\quad y=\upsilon+y',\quad z=\zeta+z',$$

wodurch die Gleichung (1) in

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma m\left[\left(X-\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)\delta\xi+\left(Y-\frac{d^2\upsilon}{dt^2}\right)\delta\upsilon+\left(Z-\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\delta\zeta\right]\\ +\Sigma m\left[\left(X-\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x'+\left(Y-\frac{d^2y'}{dt^2}\right)\delta y'+\left(Z-\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\delta z'\right]\\ \quad -\delta\xi\,\Sigma m\frac{d^2x'}{dt^2}-\delta\upsilon\,\Sigma m\frac{d^2y'}{dt^2}-\delta\zeta\,\Sigma m\frac{d^2z'}{dt^2}\\ \quad -\frac{d^2\xi}{dt^2}\Sigma m\,\delta x'-\frac{d^2\upsilon}{dt^2}\Sigma m\,\delta y'-\frac{d^2\zeta}{dt^2}\Sigma m\,\delta z'\end{array}\right\}=0$$

übergeht. Aus der bekannten Eigenschaft des Mittelpunctes der Masse folgt

$$\Sigma m x'=0,\quad \Sigma m y'=0,\quad \Sigma m z'=0,$$

mithin $\Sigma m\frac{d^2x'}{dt^2}=0,\quad \Sigma m\frac{d^2y'}{dt^2}=0,\quad \Sigma m\frac{d^2z'}{dt^2}=0$

und $\Sigma m\,\delta x'=0,\quad \Sigma m\,\delta y'=0,\quad \Sigma m\,\delta z'=0;$

ferner stehen die Variationen $\delta\xi$, δv, $\delta\zeta$ mit den durch $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ vorgestellten offenbar in keinem Zusammenhange: daher bietet uns die Gleichung (1) stets die zwei Gleichungen

$$(2)\quad \Sigma m\left[\left(X-\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)\delta\xi+\left(Y-\frac{d^2v}{dt^2}\right)\delta v+\left(Z-\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\delta\zeta\right]=0$$

$$(3)\quad \Sigma m\left[\left(X-\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x'+\left(Y-\frac{d^2y'}{dt^2}\right)\delta y'+\left(Z-\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\delta z'\right]=0$$

dar. Die erstere gehört der Bewegung des Mittelpunctes der Masse, und zeigt, daß derselbe sich in allen Fällen so bewegt, als ob die Masse des gesammten Systems in ihm vereinigt wäre, und alle an dem Systeme thätigen Kräfte, ihren ursprünglichen Richtungen parallel, auf ihn wirkten; ein Satz, welchen wir bereits in der zwanzigsten Vorlesung, hinsichtlich der freien Bewegung eines Systems, unter dem Namen des Satzes von der Erhaltung der Bewegung des Mittelpunctes der Masse kennen gelernt haben. Die andere Gleichung stellt die relative Bewegung des Systems in Bezug auf den Mittelpunct der Masse dar, und zeigt, daß diese Bewegung eben so beschaffen ist, als ob derselbe fix wäre. Wir können demnach jede Bewegung eines Systems materieller Puncte in zwei einfachere Bewegungen, in die progressive oder fortschreitende des Mittelpunctes der Masse, und in die rotirende oder drehende des Systems um diesen Mittelpunct zerlegen, und auf die bereits abgehandelten Lehren zurückführen.

II. Bei dem Differenziren der Bedingungsgleichungen, an welche die Coordinaten des gegebenen Systems während seiner Bewegung gebunden sind, in Hinsicht auf das Zeichen δ, um die zwischen den Variationen δx, δy, δz bestehende Relation in die Rechnung einzuführen, ist die, in diese Bedingungsgleichungen etwa verflochtene, Zeit als constant zu behandeln, denn diese Variationen entstehen bloß durch eine unendlich geringe Verschiebung des Systems aus der Position, in welcher es sich am Ende der Zeit t befindet; anders verhält sich aber die Sache, wenn die durch die Bewegung des Systems während der Zeit dt erzeugten Differenzialien der Coordinaten in Betrachtung kommen: es ist daher nur in dem Falle, wenn die erwähnten Bedingungsgleichungen die Zeit t nicht enthalten, erlaubt, die in der Gleichung (1) erscheinenden Variationen δx, δy, δz den Differenzialien dx, dy, dz gleich anzunehmen. Setzen wir diese Beschaffenheit der Bedingungsgleichungen des Systems voraus, so verwandelt sich die Glei-

chung (1) in

$$(4)\quad \Sigma m\left(\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma m(X dx + Y dy + Z dz),$$

oder, wenn wir die Geschwindigkeit des Punctes m am Ende der Zeit t, nämlich den Quotienten

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt},$$

durch v vorstellen,

$$(5)\quad \tfrac{1}{2} d\,.\,\Sigma m v^2 = \Sigma m(X dx + Y dy + Z dz).$$

Es sey nun $\Sigma m(X dx + Y dy + Z dz)$ eine integrable Differenzialformel, was immer der Fall ist, wenn die auf das System einwirkenden Kräfte Functionen der Entfernungen ihrer Angriffspuncte von bestimmten fixen Puncten sind, oder zwischen den Bestandtheilen des Systems Anziehungen oder Abstoßungen, welche von ihren gegenseitigen Abständen abhängen, Statt finden; so gibt uns die Gleichung (5) nach vollbrachter Integration, wenn wir

$$\Sigma m(X dx + Y dy + Z dz) = dF(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots)$$

setzen, und durch H eine Constante vorstellen,

$$(6)\quad \Sigma m v^2 = 2F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots) + H,$$

wobei die den Coordinaten x, y, z beigelegten Zeiger auf die Werthe hindeuten, welche diesen Coordinaten hinsichtlich der einzelnen Puncte $m_1, m_2, \ldots$ des Systems gehören.

Man nennt das Product einer in Bewegung befindlichen Masse mit dem Quadrate ihrer Geschwindigkeit die **lebendige Kraft** derselben; da nun zur Bestimmung der Constante H nichts weiter erforderlich ist, als die Summe der lebendigen Kräfte der Bestandtheile des Systems für irgend eine Position desselben zu kennen, so hängt, der Gleichung (6) gemäß, der Unterschied der Summen der lebendigen Kräfte eines sich bewegenden Systems in zwei Positionen bloß von den dabei Statt findenden Coordinaten der einzelnen Puncte, nicht aber von der Gestalt der von diesen Puncten durchlaufenen Bahnen ab, und es erhält demnach die Summe der lebendigen Kräfte, sobald das System in eine bestimmte Lage zurückkehrt, stets einerlei Größe. Diese Eigenschaft der Bewegung heißt die **Erhaltung der lebendigen Kräfte**.

Sind die Kräfte, welche auf das gegebene System in einer bestimmten Position desselben wirken, so beschaffen, daß sie sich das

Gleichgewicht halten würden, wenn man das System geradezu in diese Position versetzte, und es sodann, ohne ihm eine Geschwindigkeit zu ertheilen, den genannten Kräften überließe, so muß, dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten zu Folge,

$$\Sigma m (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

seyn. Aber der Voraussetzung gemäß, unter welcher der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte Gültigkeit hat, kann man $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$ annehmen, wodurch man

$$\Sigma m (X dx + Y dy + Z dz) = 0,$$

mithin auch $d \,.\, \Sigma m v^2 = 0$

erhält. Und umgekehrt ist $d \,.\, \Sigma m v^2 = 0$, so halten sich die das System afficirenden Kräfte, abgesehen von der bereits bewirkten Bewegung desselben, das Gleichgewicht. Man sieht hieraus, daß die Positionen eines sich bewegenden Systems, in welchen die Summe der lebendigen Kräfte desselben im Zustande des Maximums oder des Minimums erscheint, diejenigen sind, in welchen die auf dasselbe wirkenden Kräfte sich gegenseitig aufheben.

Wird ein System materieller Puncte bloß von momentanen Kräften afficirt, und sodann seiner Trägheit überlassen, so haben wir für alle Puncte $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, mithin

$$d \,.\, \Sigma m v^2 = 0, \quad \text{also} \quad \Sigma m v^2 = Const.;$$

d. h. die Summe der lebendigen Kräfte eines sich bloß vermöge seiner Trägheit bewegenden Systems ist unveränderlich.

Nennen wir die auf die Masse m nach den Richtungen der x, y, z wirkenden momentanen Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, und die Geschwindigkeiten, welche sie ihr nach denselben Richtungen ertheilen, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, so besteht für den Anfang der Bewegung bekanntlich die Gleichung

$$(7) \quad \Sigma[(\mathfrak{X} - m\bar{x})\delta x + (\mathfrak{Y} - m\bar{y})\delta y + (\mathfrak{Z} - m\bar{z})\delta z] = 0,$$

woraus, wenn wir dieselbe durch dt theilen, und dx, dy, dz statt δx, δy, δz schreiben, wegen $\frac{dx}{dt} = \bar{x}$, $\frac{dy}{dt} = \bar{y}$, $\frac{dz}{dt} = \bar{z}$, und $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = v^2$,

$$(8) \quad \Sigma m v^2 = \Sigma(\mathfrak{X}\bar{x} + \mathfrak{Y}\bar{y} + \mathfrak{Z}\bar{z})$$

folgt, wodurch wir die Summe der lebendigen Kräfte eines Systems am Anfange seiner Bewegung kennen lernen.

Untersuchen wir nun die Änderung, welche die Summe der leben-

digen Kräfte erleiden würde, wenn man das System im ersten Augenblicke seiner Bewegung um eine, von der ihm wirklich zukommenden Rotationsaxe unendlich wenig abweichende Gerade sich zu drehen nöthigte. Da diese Veränderung der Rotationsaxe nicht auf die Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, sondern bloß auf die Geschwindigkeiten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ Einfluß hat, so wird, wenn wir die Differenzialien dieser Größen durch das Zeichen δ andeuten:

$$(9) \qquad \delta . \Sigma m v^2 = \Sigma (\mathfrak{X} \delta \bar{x} + \mathfrak{Y} \delta \bar{y} + \mathfrak{Z} \delta \bar{z}).$$

Versetzen wir den Anfangspunct der Coordinaten in den Durchschnittspunct der neuen Rotationsaxe mit der vorhergehenden, und nennen wir die Winkelgeschwindigkeiten des Systems, in Bezug auf die Axen der x, y, z, aus welchen die Rotation desselben um die ursprüngliche Axe entspringt, p, q, r, so haben wir, wie aus den Gleichungen (8) der zwei und zwanzigsten Vorlesung erhellet:

$$\bar{x} = qz - ry, \quad \bar{y} = rx - pz, \quad \bar{z} = py - qx,$$

folglich, da hier bloß p, q, r veränderlich sind,

$$(10) \quad \delta\bar{x} = z\delta q - y\delta r, \quad \delta\bar{y} = x\delta r - z\delta p, \quad \delta\bar{z} = y\delta p - x\delta q;$$

ferner, weil wir den Anfangspunct der Coordinaten als einen fixen Punct betrachten dürfen,

$$(11) \qquad \Sigma m (\bar{y}x - \bar{x}y) = \Sigma (\mathfrak{Y}x - \mathfrak{X}y),$$
$$\Sigma m (\bar{x}z - \bar{z}x) = \Sigma (\mathfrak{X}z - \mathfrak{Z}x),$$
$$\Sigma m (\bar{z}y - \bar{y}z) = \Sigma (\mathfrak{Z}y - \mathfrak{Y}z).$$

Multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit δr, δq, δp, und nehmen wir sodann ihre Summe, so ergibt sich mit gehöriger Rücksicht auf (10)

$$\Sigma m (\bar{x}\delta\bar{x} + \bar{y}\delta\bar{y} + \bar{z}\delta\bar{z}) = \Sigma (\mathfrak{X}\delta\bar{x} + \mathfrak{Y}\delta\bar{y} + \mathfrak{Z}\delta\bar{z}),$$

oder wegen

$$\Sigma m (\bar{x}\delta\bar{x} + \bar{y}\delta\bar{y} + \bar{z}\delta\bar{z}) = \tfrac{1}{2}\delta . \Sigma m (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \tfrac{1}{2}\delta . \Sigma m v^2$$

$$(12) \qquad \tfrac{1}{2}\delta . \Sigma m v^2 = \Sigma (\mathfrak{X}\delta\bar{x} + \mathfrak{Y}\delta\bar{y} + \mathfrak{Z}\delta\bar{z}).$$

Subtrahirt man diese Gleichung von (9), so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\delta . \Sigma m v^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \delta . \Sigma m v^2 = 0.$$

Wenn daher momentane Kräfte auf ein System materieller Puncte einwirken, so beginnt dasselbe seine Bewegung mit der Rotation um jene Axe, in Bezug auf welche die Summe der lebendigen Kräfte ein Größtes oder Kleinstes wird.

III. Aus den oben erhaltenen Resultaten ergibt sich noch eine andere merkwürdige Eigenschaft der Bewegung eines jeden Systems materieller Puncte. Vertauschen wir nämlich in der Gleichung

$$\tfrac{1}{2} d . \Sigma m v^2 = \Sigma m (X dx + Y dy + Z dz)$$

das Zeichen d mit δ, so haben wir wegen

$$\tfrac{1}{2} \delta . \Sigma m v^2 . = \Sigma m v \delta v \quad \text{und} \quad v = \frac{ds}{dt},$$

wenn nämlich ds den von der Masse m während des Zeittheilchens dt durchlaufenen Raum anzeigt,

$$\frac{\Sigma m\, ds\, \delta v}{dt} = \Sigma m (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z).$$

Aber aus der Gleichung (1) folgt

$$\Sigma m (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z\right),$$

daher ist

$$(13) \quad \Sigma m\, ds\, \delta v = \Sigma m \left(\frac{d^2 x}{dt} \delta x + \frac{d^2 y}{dt} \delta y + \frac{d^2 z}{dt} \delta z\right).$$

Ferner gibt uns die Gleichung

$$\delta ds = \delta \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z,$$

wenn wir sie mit $m v = m \frac{ds}{dt}$ multipliciren, und die Summe aller aus ihr für die einzelnen Puncte des Systems hervorgehenden Gleichungen nehmen,

$$(14) \quad \Sigma m v \delta ds = \Sigma m \left(\frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{dt} d\delta y + \frac{dz}{dt} d\delta z\right).$$

Vereinigen wir die Gleichungen (13) und (14) durch Addition, so finden wir, wie man leicht sieht,

$$\Sigma m \delta (v\, ds) = \Sigma m\, d \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z\right),$$

und hieraus durch Integration

$$\int \Sigma m \delta (v\, ds) = \delta . \int \Sigma m v\, ds = \Sigma m \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z\right).$$

Beziehen wir die hier dargestellte Variation des Integrals $\int \Sigma m v ds$ auf alle Bewegungen der Bestandtheile des Systems, bei welchen sie von den ihnen am Anfange einer bestimmten Zeit wirklich zukommenden Positionen ausgehen, und zu den ihnen am Ende dieser Zeit wirklich zukommenden Positionen gelangen, so ist sowohl für den Anfang als auch für das Ende der Bewegung, wodurch die Grenzen der In-

tegration bestimmt werden, $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, und es besteht die Gleichung

(15) $$\delta . \int \Sigma m v ds = 0.$$

Diese gibt uns zu erkennen, daß, sobald die, der obigen Deduction zum Grunde liegende, Integrabilität der Differenzialformel

$$\Sigma m (X dx + Y dy + Z dz)$$

Statt findet, die Bestandtheile des sich bewegenden Systems jene Bahnen einschlagen, für welche das Integral $\int \Sigma m v ds$ (bei dem, seiner Form wegen, offenbar von keinem Maximum die Rede seyn kann) innerhalb festgesetzten Grenzen ein Minimum wird, eine Eigenschaft der Bewegung, welche wir mit Lagrange die der kleinsten Wirkung nennen wollen.

Schreibt man $v dt$ statt ds, so nimmt die Gleichung (15) die Gestalt

(16) $$\delta . \int dt \Sigma m v^2 = 0$$

an, und wir sehen, daß bei der oben erwähnten Voraussetzung die Summe der lebendigen Kräfte aller Bestandtheile eines Systems während der ganzen Bewegung ein Kleinstes ist.

Wird das System, nachdem seine Bestandtheile gewisse Geschwindigkeiten erlangt haben, seiner Trägheit überlassen, so bleibt $\Sigma m v^2$ von dem Augenblicke an, in welchem dieß geschieht, constant, daher gibt uns die Gleichung (16)

$$\Sigma m v^2 . \delta \int dt = 0, \text{ d. h. } \delta t = 0,$$

woraus folgt, daß das System aus einer Position in die andere in der kürzesten Zeit kommt.

Ist das Bewegliche bloß ein einzelner Punct, und afficirt denselben keine continuirliche Kraft, so ist seine Geschwindigkeit unveränderlich, und wir haben, der Gleichung (15) zu Folge, $\delta s = 0$; d. h. die Bahn des Beweglichen ist jederzeit die kürzeste Linie, welche man zwischen je zwei Puncten derselben ziehen kann. Dieser Satz begreift den am Ende der siebzehnten Vorlesung ausgesprochenen als einen besonderen Fall unter sich.

Man hat einstens versucht, die Gleichung (15) der Theorie der Bewegung zum Grunde zu legen, und aus ihr die Gesetze derselben

abzuleiten. Obschon die Richtigkeit des durch diese Gleichung ausgesprochenen Satzes für sich allein keineswegs so evident ist, daß man ihn als einen Grundsatz an die Spitze der Bewegungslehre stellen darf, und auch der Umfang desselben durch die oben bemerklich gemachte Bedingung eingeschränkt wird, so ist doch die Berechnung der Bewegungen mit Hülfe der Gleichung (15) eine nützliche Übung im Calcul. Versucht man denselben im Allgemeinen durchzuführen, so überzeugt man sich leicht, daß dabei, der Hauptsache nach, die bei obiger Deduction gemachten Schritte in verkehrter Ordnung vorkommen.

Fünf und zwanzigste Vorlesung.

Über das Verhalten eines materiellen Systems in der Nähe einer seiner Positionen des Gleichgewichtes.

Stellen wir uns vor, ein System materieller Puncte m_1; m_2; m_3; .... auf welche parallel zu den Axen der x, y, z beziehungsweise die continuirlichen Kräfte X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3; .... wirken, sey im Gleichgewichte, wenn diesen Puncten die Coordinaten a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3; .... entsprechen; es werde in eine von der so eben angedeuteten Position äußerst wenig abweichende Lage versetzt, so daß seinen Bestandtheilen gegenwärtig die Coordinaten

$$a_1+\alpha_1,\quad b_1+\beta_1,\quad c_1+\gamma_1;\quad a_2+\alpha_2,\quad b_2+\beta_2,\quad c_2+\gamma_2;$$
$$a_3+\alpha_3,\quad b_3+\beta_3,\quad c_3+\gamma_3;\;\ldots\ldots$$

zugehören, wobei α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3; .... sehr kleine Größen sind, und sodann den genannten Kräften überlassen: so läßt sich die Bewegung desselben unter der Voraussetzung, daß die Coordinaten der materiellen Puncte während der Zeit t stets sehr wenig von a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3; .... abweichen, im Allgemeinen berechnen, d. h. man ist im Stande, in so ferne man α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3; .... als variabel betrachtet, die Werthe dieser Größen in jedem beliebigen Augenblicke anzugeben.

Um die Rechnung zu vollführen, ist es vor der Hand nöthig, die Variablen α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3; .... auf einige derselben, welche man als völlig independent ansehen darf, zu reduciren. Hiezu dienen die Bedingungsgleichungen, welche die Beschaffenheit des gegebenen Systems zwischen den Coordinaten der materiellen Puncte desselben darbietet. Diese Gleichungen seyen $U=0$, $V=0$, u. s. w., wobei U, V, ... bekannte Functionen der Coordinaten der Puncte m_1; m_2; m_3; .... nämlich der Variablen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; .... anzeigen, und für $x_1=a_1$, $y_1=b_1$, $z_1=c_1$; $x_2=a_2$, $y_2=b_2$, $z_2=c_2$; .... verwandle sich U in H, V in K, u. s. w., so ist es erlaubt, wegen des geringen Betrages von

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \ldots$ in Bezug auf den Übergang der Größen $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; \ldots$ in $a_1 + \alpha_1, b_1 + \beta_1, c_1 + \gamma_1;$ $a_2 + \alpha_2, b_2 + \beta_2, c_2 + \gamma_2; \ldots$

$$U = H + \frac{dH}{da_1}\alpha_1 + \frac{dH}{db_1}\beta_1 + \frac{dH}{dc_1}\gamma_1 + \frac{dH}{da_2}\alpha_2 + \frac{dH}{db_2}\beta_2 + \frac{dH}{dc_2}\gamma_2 + \frac{dH}{da_3}\alpha_3 + \frac{dH}{db_3}\beta_3 + \frac{dH}{dc_3}\gamma_3 + \ldots$$

$$V = K + \frac{dK}{da_1}\alpha_1 + \frac{dK}{db_1}\beta_1 + \frac{dK}{dc_1}\gamma_1 + \frac{dK}{da_2}\alpha_2 + \frac{dK}{db_2}\beta_2 + \frac{dK}{dc_2}\gamma_2 + \frac{dK}{da_3}\alpha_3 + \frac{dK}{db_3}\beta_3 + \frac{dK}{dc_3}\gamma_3 + \ldots$$

. . . .

zu setzen. Nun ist aber offenbar $H = o$, $K = o$, u. s. w., mithin haben wir

$$\frac{dH}{da_1}\alpha_1 + \frac{dH}{db_1}\beta_1 + \frac{dH}{dc_1}\gamma_1 + \frac{dH}{da_2}\alpha_2 + \ldots = o,$$

$$\frac{dK}{da_1}\alpha_1 + \frac{dK}{db_1}\beta_1 + \frac{dK}{dc_1}\gamma_1 + \frac{dK}{da_2}\alpha_2 + \ldots = o,$$

. . . .

Drücken wir mittelst dieser Gleichungen eben so viele der Größen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \ldots$ durch die übrigen aus, so können diese letzteren als die independenten Variablen zum Grunde gelegt werden.

Es seyen $\xi, v, z, \ldots$ diese independenten Variablen, oder andere veränderliche Größen, in welche man dieselben transformirt hat, und im Allgemeinen für den Punct m in Bezug auf die Lage, in welcher das System sich im Gleichgewichte befindet, $x = a$, $y = b$, $z = c$, und in so ferne als, nachdem man das System aus dieser Lage in eine davon unendlich wenig abweichende gebracht hat, die Zeit t verflossen ist,

$$x = a + \alpha, \quad y = b + \beta, \quad z = c + \gamma,$$

ferner

$$\alpha = A_1\xi + A_2 v + A_3 z + \ldots$$
$$\beta = B_1\xi + B_2 v + B_3 z + \ldots$$
$$\gamma = C_1\xi + C_2 v + C_3 z + \ldots$$

wobei $A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots C_1, C_2, \ldots$ beständige Größen anzeigen, und $\xi, v, z, \ldots$ sehr klein sind, so ergibt sich

$$d^2x = A_1 d^2\xi + A_2 d^2 v + A_3 d^2 z + \ldots$$
$$d^2y = B_1 d^2\xi + B_2 d^2 v + B_3 d^2 z + \ldots$$
$$d^2z = C_1 d^2\xi + C_2 d^2 v + C_3 d^2 z + \ldots$$

$$\delta x = A_1 \delta\xi + A_2 \delta\upsilon + A_3 \delta\zeta + \ldots\ldots$$
$$\delta y = B_1 \delta\xi + B_2 \delta\upsilon + B_3 \delta\zeta + \ldots\ldots$$
$$\delta z = C_1 \delta\xi + C_2 \delta\upsilon + C_3 \delta\zeta + \ldots\ldots$$

folglich, wenn wir

$$\Sigma m (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) = (1)$$
$$\Sigma m (A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) = (2)$$
$$\Sigma m (A_3^2 + B_3^2 + C_3^2) = (3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und
$$\Sigma m (A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2) = (1, 2)$$
$$\Sigma m (A_1 A_3 + B_1 B_3 + C_1 C_3) = (1, 3)$$
$$\Sigma m (A_2 A_3 + B_2 B_3 + C_2 C_3) = (2, 3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

setzen:

$$(1) \qquad \Sigma m \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\delta z\right) =$$
$$= \left[(1)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (1, 2)\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + (1, 3)\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \ldots\right]\delta\xi$$
$$+ \left[(1, 2)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2)\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + (2, 3)\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \ldots\right]\delta\upsilon$$
$$+ \left[(1, 3)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2, 3)\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + (3)\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \ldots\right]\delta\zeta$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lassen wir die Differenzialformel $X dx + Y dy + Z dz$ integrabel seyn, und bezeichnen wir den Werth, welchen das Integral

$$\int (X dx + Y dy + Z dz)$$

für $x = a$, $y = b$, $z = c$ erhält, durch F, so verwandelt es sich, wenn a, b, c in $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$ übergehen, wie man mittelst der am Ende der sechs und vierzigsten Vorlesung über die Analysis abgeleiteten Formel leicht findet, wegen des geringen Betrages von α, β, γ in

$$F' = F + \frac{dF}{da}\alpha + \frac{dF}{db}\beta + \frac{dF}{dc}\gamma + \frac{d^2F}{da^2}\cdot\frac{\alpha^2}{2} + \frac{d^2F}{db^2}\cdot\frac{\beta^2}{2} + \frac{d^2F}{dc^2}\cdot\frac{\gamma^2}{2}$$
$$+ \frac{d^2F}{da\,db}\alpha\beta + \frac{d^2F}{da\,dc}\alpha\gamma + \frac{d^2F}{db\,dc}\beta\gamma.$$

Wir haben daher, wenn wir die obigen Ausdrücke für α, β, γ berücksichtigen, und der Kürze wegen

$$Q_0 = \Sigma m F$$
$$Q_1 = \Sigma m \left(A_1 \frac{dF}{da} + B_1 \frac{dF}{db} + C_1 \frac{dF}{dc}\right)$$
$$Q_2 = \Sigma m \left(A_2 \frac{dF}{da} + B_2 \frac{dF}{db} + C_2 \frac{dF}{dc}\right)$$
$$Q_3 = \Sigma m \left(A_3 \frac{dF}{da} + B_3 \frac{dF}{db} + C_3 \frac{dF}{dc}\right)$$

. . . .

$$[1] = \Sigma m \left(A_1^2 \frac{d^2F}{da^2} + B_1^2 \frac{d^2F}{db^2} + C_1^2 \frac{d^2F}{dc^2} + 2 A_1 B_1 \frac{d^2F}{da\,db} + 2 A_1 C_1 \frac{d^2F}{da\,dc} + 2 B_1 C_1 \frac{d^2F}{db\,dc}\right)$$
$$[2] = \Sigma m \left(A_2^2 \frac{d^2F}{da^2} + B_2^2 \frac{d^2F}{db^2} + C_2^2 \frac{d^2F}{dc^2} + 2 A_2 B_2 \frac{d^2F}{da\,db} + 2 A_2 C_2 \frac{d^2F}{da\,dc} + 2 B_2 C_2 \frac{d^2F}{db\,dc}\right)$$
$$[3] = \Sigma m \left(A_3^2 \frac{d^2F}{da^2} + B_3^2 \frac{d^2F}{db^2} + C_3^2 \frac{d^2F}{dc^2} + 2 A_3 B_3 \frac{d^2F}{da\,db} + 2 A_3 C_3 \frac{d^2F}{da\,dc} + 2 B_3 C_3 \frac{d^2F}{db\,dc}\right)$$

. . . .

$$[1, 2] = \Sigma m \left(A_1 A_2 \frac{d^2F}{da^2} + B_1 B_2 \frac{d^2F}{db^2} + C_1 C_2 \frac{d^2F}{dc^2} + (A_1B_2 + A_2B_1) \frac{d^2F}{da\,db} + (A_1C_2 + A_2C_1) \frac{d^2F}{da\,dc} + (B_1C_2 + B_2C_1) \frac{d^2F}{db\,dc}\right)$$
$$[1, 3] = \Sigma m \left(A_1 A_3 \frac{d^2F}{da^2} + B_1 B_3 \frac{d^2F}{db^2} + C_1 C_3 \frac{d^2F}{dc^2} + (A_1B_3 + A_3B_1) \frac{d^2F}{da\,db} + (A_1C_3 + A_3C_1) \frac{d^2F}{da\,dc} + (B_1C_3 + B_3C_1) \frac{d^2F}{db\,dc}\right)$$
$$[2, 3] = \Sigma m \left(A_2 A_3 \frac{d^2F}{da^2} + B_2 B_3 \frac{d^2F}{db^2} + C_2 C_3 \frac{d^2F}{dc^2} + (A_2B_3 + A_3B_2) \frac{d^2F}{da\,db} + (A_2C_3 + A_3C_2) \frac{d^2F}{da\,dc} + (B_2C_3 + B_3C_2) \frac{d^2F}{db\,dc}\right)$$

. . . .

setzen:

$$\Sigma m \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) =$$
$$= Q_0 + Q_1 \xi + Q_2 \upsilon + Q_3 z + \ldots\ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2}[1]\xi^2 + \tfrac{1}{2}[2]\upsilon^2 + \tfrac{1}{2}[3]z^2 + \ldots\ldots$$
$$+ [1, 2]\xi\upsilon + [1, 3]\xi z + [2, 3]\upsilon z + \ldots\ldots$$

Differenziren wir diese Gleichung, und verwechseln wir sodann das Zeichen d mit δ, so ergibt sich:

$$(2)\qquad \Sigma m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) =$$
$$= (Q_1 + [1]\xi + [1,2]v + [1,3]z + \ldots)\delta\xi$$
$$+ (Q_2 + [1,2]\xi + [2]v + [2,3]z + \ldots)\delta v$$
$$+ (Q_3 + [1,3]\xi + [2,3]v + [3]z + \ldots)\delta z$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ist die Differenzialformel $X dx + Y dy + Z dz$ nicht integrabel, wohl aber $\Sigma m(X dx + Y dy + Z dz)$, und stellt man den besonderen Werth des Integrals $\int \Sigma m(X dx + Y dy + Z dz)$ für $x = a$, $y = b$, $z = c$ durch F vor, wobei F eine Function von a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3; .... anzeigt, so findet man auf dem oben betretenen Wege für $\Sigma m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ einen ähnlichen allgemeinen Ausdruck wie (2), nur wird jetzt $Q_0 = F$, und in den Werthen von Q_1, Q_2, Q_3, ... $[1]$, $[2]$, $[3]$, ... $[1, 2]$, $[1, 3]$, $[2, 3]$, ... bleibt der Factor m weg.

Nun besteht aber die Gleichung

$$\Sigma m\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0$$

oder

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \Sigma m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

daher erhalten wir durch Zusammenstellung der Ausdrücke (1) und (2), der Independenz der Variationen $\delta\xi$, δv, ꝛc. wegen, die Gleichungen

$$(3)\quad (1)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (1,2)\frac{d^2v}{dt^2} + (1,3)\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \ldots =$$
$$= Q_1 + [1]\xi + [1,2]v + [1,3]z + \ldots$$
$$(1,2)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2)\frac{d^2v}{dt^2} + (2,3)\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \ldots =$$
$$= Q_2 + [1,2]\xi + [2]v + [2,3]z + \ldots$$
$$(1,3)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\frac{d^2v}{dt^2} + (3)\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \ldots =$$
$$= Q_3 + [1,3]\xi + [2,3]v + [3]z + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

deren Anzahl jener der Variablen ξ, v, z, ... gleich kömmt.

Versetzen wir das System in die Position des Gleichgewichtes, ohne ihm eine Geschwindigkeit zu ertheilen, so bleibt es fortwährend in derselben; die Gleichungen (3) sind offenbar auch auf diesen Fall anwendbar, in welchem ξ, v, z, ... und $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, ...

verschwinden: es ist daher nothwendig $Q_1 = o$, $Q_2 = o$, $Q_3 = o$, ... was auch aus dem Umstande erhellet, daß für die Position des Gleichgewichtes $\Sigma m (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = o$ seyn muß.

Es handelt sich jetzt um die Integration der Differenzialgleichungen (3), d. h. um die Ausmittelung der Ausdrücke, welche uns ξ, v, z, ... als Functionen von t geben. Zu diesem Ende wollen wir zuerst specielle, den genannten Gleichungen Genüge leistende, Ausdrücke für ξ, v, z, ... aufsuchen, aus welchen sich sodann, wenn eine hinreichende Anzahl derselben vorhanden ist, durch Multiplication derselben mit unbestimmten Constanten und Addition der Producte, die allgemeinen Ausdrücke dieser Variablen durch t ableiten lassen. Denn aus der Form der Gleichungen (3) erhellet, daß wenn denselben die Werthe $\xi = \xi_1$, $v = v_1$, $z = z_1$, ... ferner $\xi = \xi_2$, $v = v_2$, $z = z_2$, u. s. w. für sich allein entsprechen, sie auch erfüllt werden, wenn man $\xi = A\xi_1 + B\xi_2 + \ldots$, $v = Av_1 + Bv_2 + \ldots$, $z = Az_1 + Bz_2 + \ldots$ annimmt, wobei A, B, ꝛc. unbestimmte Constanten sind.

Um specielle Auflösungen der Gleichungen (3) zu erhalten, setzen wir

$$v = h\xi, \quad z = k\xi, \quad ꝛc.$$

wobei h, k beständige Größen bedeuten, so gehen die erwähnten Gleichungen in

$$(4) \quad ((1) + (1, 2)h + (1, 3)k + \ldots)\frac{d^2\xi}{dt^2} =$$
$$= ([1] + [1, 2]h + [1, 3]k + \ldots)\xi$$
$$((1, 2) + (2)h + (2, 3)k + \ldots)\frac{d^2\xi}{dt^2} =$$
$$= ([1, 2] + [2]h + [2, 3]k + \ldots)\xi$$
$$((1, 3) + (2, 3)h + (3)k + \ldots)\frac{d^2\xi}{dt^2} =$$
$$= ([1, 3] + [2, 3]h + [3]k + \ldots)\xi$$

....

über. Damit sie übereinstimmen, müssen die Constanten h, k, ... so gewählt werden, daß die Quotienten

$$\frac{[1] + [1, 2]h + [1, 3]k + \ldots}{(1) + (1, 2)h + (1, 3)k + \ldots}$$
$$\frac{[1, 2] + [2]h + [2, 3]k + \ldots}{(1, 2) + (2)h + (2, 3)k + \ldots}$$
$$\frac{[1, 3] + [2, 3]h + [3]k + \ldots}{(1, 3) + (2, 3)h + (3)k + \ldots}$$

einerlei Werth erhalten. Dieser Werth kann sowohl positiv als negativ seyn. Stellen wir ihn durch $-\mu$ vor, so haben wir

$$(5) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} + \mu\xi = o,$$

wobei μ nebst h, k, . . . durch die Gleichungen

$$(6) \quad ((1) + (1,2)h + (1,3)k + \ldots)\mu + [1] + [1,2]h + [1,3]k + \ldots = o$$
$$((1,2) + (2)h + (2,3)k + \ldots)\mu + [1,2] + [2]h + [2,3]k + \ldots = o$$
$$((1,3) + (2,3)h + (3)k + \ldots)\mu + [1,3] + [2,3]h + [3]k + \ldots = o$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

deren Anzahl eben so groß ist, als jene der so eben genannten Constanten, gegeben wird. Schaffen wir aus den Gleichungen (6) die Größen h, k, . . . nach der gewöhnlichen Eliminationsmethode weg, so ergibt sich eine Endgleichung mit der Unbekannten μ von dem so vielten Grade, als variable Größen ξ, v, z, . . . in der Rechnung vorkommen; mithin sind eben so viele Werthe für μ möglich, deren jedem, den Gleichungen (6) zu Folge, ein bestimmter Werth von h, k, . . . zugehört.

Nun folgt aus der Gleichung (5) durch Integration

$$(7) \qquad \xi = E \sin.(t\sqrt{\mu} + \varepsilon),$$

wobei E und ε willkürliche beständige Größen sind, wodurch wir zugleich

$$(8) \qquad v = hE \sin.(t\sqrt{\mu} + \varepsilon)$$
$$z = kE \sin.(t\sqrt{\mu} + \varepsilon)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

erhalten. Bezeichnen wir die verschiedenen Werthe von μ durch μ_1, μ_2, μ_3, ... und die correspondirenden Werthe von h, k, ... durch h_1, h_2, ... k_1, k_2, ... wie auch durch E_1, E_2, E_3, ... ε_1, ε_2, ε_3, ... bis jetzt noch unbestimmte Constanten, so ergeben sich, den obigen Betrachtungen gemäß, folgende allgemeine Ausdrücke für die Variablen ξ, v, z, ...

$$(9) \quad \xi = E_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_1) + E_2 \sin.(t\sqrt{\mu_2} + \varepsilon_2) + E_3 \sin.(t\sqrt{\mu_3} + \varepsilon_3) + \ldots$$
$$v = h_1E_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_1) + h_2E_2 \sin.(t\sqrt{\mu_2} + \varepsilon_2) + h_3E_3 \sin.(t\sqrt{\mu_3} + \varepsilon_3) + \ldots$$

$$z = k_1 E_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_1) + k_2 E_2 \sin.(t\sqrt{\mu_2} + \varepsilon_2) + k_3 E_3 \sin.(t\sqrt{\mu_3} + \varepsilon_3) + \ldots\ldots$$

. . . .

in welchen die Anzahl der Constanten $E_1, E_2, E_3; \ldots\ldots \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; \ldots\ldots$ wie es die Integration der Gleichungen (3) erfordert, doppelt so groß ist, als jene der Variablen $\xi, v, z, \ldots\ldots$

Diese Constanten werden durch die Werthe bestimmt, welche die Größen $\xi, v, z, \ldots\ldots$ und $\frac{d\xi}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \ldots\ldots$ am Anfange der Zeit t, oder für $t = o$, besitzen, und die uns, weil der anfängliche Zustand des aus der Position des Gleichgewichtes verrückten Systems bekannt ist, offenbar gegeben sind. Um diese Bestimmung mit Leichtigkeit zu vollziehen, drücke man vor der Hand $E_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_1)$, $E_2 \sin(t\sqrt{\mu_2} + \varepsilon_2)$, $E_3 \sin.(t\sqrt{\mu_3} + \varepsilon_3), \ldots\ldots$ durch $\xi, v, z, \ldots\ldots$ aus. Hiezu können die Gleichungen (9) gebraucht werden; man kömmt jedoch weit einfacher auf folgendem Wege zum Ziele.

Man addire die Gleichungen (3), nachdem man die zweite mit h, die dritte mit k u. s. w. multiplicirt hat, so findet man

$$(10)\quad p\frac{d^2\xi}{dt^2} + q\frac{d^2 v}{dt^2} + r\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \ldots\ldots = P\xi + Qv + Rz + \ldots\ldots$$

wobei der Kürze wegen

$$(1) + (1, 2)h + (1, 3)k + \ldots\ldots = p$$
$$(1, 2) + (2)h + (2, 3)k + \ldots\ldots = q$$
$$(1, 3) + (2, 3)h + (3)k + \ldots\ldots = r$$

. . . .

$$[1] + [1, 2]h + [1, 3]k + \ldots\ldots = P$$
$$[1, 2] + [2]h + [2, 3]k + \ldots\ldots = Q$$
$$[1, 3] + [2, 3]h + [3]k + \ldots\ldots = R$$

. . . .

gesetzt worden ist. Aber die Gleichungen (6) geben uns

$$P = -\mu p, \quad Q = -\mu q, \quad R = -\mu r, \ldots\ldots$$

daher kann die Gleichung (10) auf die Form

$$\frac{d^2(p\xi + qv + r\zeta + \ldots)}{dt^2} + \mu(p\xi + qv + rz + \ldots) = o$$

gebracht werden, woraus man durch Integration

$$(11)\quad p\xi + qv + rz + \ldots\ldots = L \sin.(t\sqrt{\mu} + \lambda)$$

erhält, wobei L und λ unbestimmte Constanten anzeigen.

Diese Gleichung muß für alle Werthe von μ bestehen, welche aus den Gleichungen (6) hervorgehen; bezeichnen wir nun durch p_1, p_2, p_3, ...; q_1, q_2, q_3, ...; r_1, r_2, r_3, ...; L_1, L_2, L_3, ...; λ_1, λ_2, λ_3, ... die den Größen μ_1, μ_2, μ_3, ... correspondirenden Werthe von p, q, r, ... L, λ, so haben wir

$$(12) \quad \begin{aligned} p_1\xi + q_1 v + r_1 z + \ldots &= L_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1} + \lambda_1) \\ p_2\xi + q_2 v + r_2 z + \ldots &= L_2 \sin.(t\sqrt{\mu_2} + \lambda_2) \\ p_3\xi + q_3 v + r_3 z + \ldots &= L_3 \sin.(t\sqrt{\mu_3} + \lambda_3) \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Würde man mittelst dieser Gleichungen die Werthe von ξ, v, z, ... suchen, so müßte man offenbar die Ausdrücke (9) erhalten; es gehen demnach die Gleichungen (12) durch die Substitution der Ausdrücke (9) statt ξ, v, z, ... in identische über, und daher muß

$$\begin{aligned} (p_1 + q_1 h_1 + r_1 k_1 + \ldots) E_1 &= L_1, \quad \lambda_1 = \varepsilon_1 \\ (p_2 + q_2 h_2 + r_2 k_2 + \ldots) E_2 &= L_2, \quad \lambda_2 = \varepsilon_2 \\ (p_3 + q_3 h_3 + r_3 k_3 + \ldots) E_3 &= L_3, \quad \lambda_3 = \varepsilon_3 \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

seyn, und die Coefficienten der übrigen Glieder nach vollbrachter Substitution, nämlich

$p_1 + q_1 h_2 + r_1 k_2 + \ldots$, $p_1 + q_1 h_3 + r_1 k_3 + \ldots$, rc.

müssen verschwinden. Es ist also

$$(13) \quad \begin{aligned} E_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_1) &= \frac{p_1\xi + q_1 v + r_1 \zeta + \ldots}{p_1 + q_1 h_1 + r_1 k_1 + \ldots} \\ E_2 \sin.(t\sqrt{\mu_2} + \varepsilon_2) &= \frac{p_2\xi + q_2 v + r_2 \zeta + \ldots}{p_2 + q_2 h_2 + r_2 k_2 + \ldots} \\ E_3 \sin.(t\sqrt{\mu_3} + \varepsilon_3) &= \frac{p_3\xi + q_3 v + r_2 \zeta + \ldots}{p_3 + q_3 h_3 + r_3 k_3 + \ldots} \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

woraus man, wenn man t=o annimmt, die Werthe von $E_1 \sin.\varepsilon_1$, $E_2 \sin.\varepsilon_2$, $E_3 \sin.\varepsilon_3$, ..., und wenn man diese Ausdrücke vor dem Verschwinden von t differenzirt, die Werthe von $E_1 \cos.\varepsilon_1$, $E_2 \cos.\varepsilon_2$, $E_3 \cos.\varepsilon_3$, ..., mithin sowohl $tg.\varepsilon_1$, $tg.\varepsilon_2$, $tg.\varepsilon_3$, ... als auch E_1, E_2, E_3, ... erhält.

Sechs und zwanzigste Vorlesung.

Über das Verhalten eines materiellen Systems in der Nähe einer seiner Positionen des Gleichgewichtes.

(Fortsetzung.)

Ehe wir zur Auseinandersetzung der Folgerungen schreiten, welche uns die in der vorhergehenden Vorlesung erhaltenen Resultate darbieten, müssen wir noch auf den Umstand aufmerksam machen, daß die Formeln (9) aufhören die allgemeinste Auflösung der Gleichungen (3) darzustellen, sobald einige der Größen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ einander gleich sind, d. h. sobald der durch die Elimination von h, k, ... aus (6) entspringenden Gleichung für μ, wiederholte Wurzeln zukommen. Denn ist z. B. $\mu_1 = \mu_2$, so wird auch $h_1 = h_2$, $k_1 = k_2, \ldots$; da ferner

$$\sin.(t\sqrt{\mu} + \varepsilon) = \sin. t\sqrt{\mu} . \cos. \varepsilon + \cos. t\sqrt{\mu} . \sin. \varepsilon$$

ist, so geht die Summe

$$E_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_1) + E_2 \sin.(t\sqrt{\mu_2} + \varepsilon_2) \quad \text{in}$$

$$(E_1 \cos. \varepsilon_1 + E_2 \cos. \varepsilon_2) \sin. t\sqrt{\mu_1} + (E_1 \sin. \varepsilon_1 + E_2 \sin. \varepsilon_2) \cos. t\sqrt{\mu_1}$$

über. Setzt man nun, was immer erlaubt ist,

$$E_1 \cos. \varepsilon_1 + E_2 \cos. \varepsilon_2 = E' \cos. \varepsilon'; \quad E_1 \sin. \varepsilon_1 + E_2 \sin. \varepsilon_2 = E' \sin. \varepsilon';$$

so ergibt sich für die genannte Summe der Ausdruck

$$E' \sin. (t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon').$$

Hieraus erhellet, daß wegen der Gleichheit einiger der Größen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ eine eben so große Anzahl von Gliedern der Formeln (9) sich auf ein Glied reducirt, in welchem bloß zwei unbestimmte Constanten erscheinen. Die Formeln (9) enthalten daher nicht mehr so viele unbestimmte Constanten, als die allgemeinste Gestalt des Integrales der Differenzialgleichungen (3) erheischt, und können dem zu Folge nicht mehr für die allgemeinste Auflösung dieser Gleichungen gelten.

Man kann jedoch die den Gleichungen (3) in dem so eben betrachteten besonderen Falle zugehörigen allgemeinsten Werthe von

$\xi, \upsilon, \zeta, \ldots$ aus den Formeln (9) leicht ableiten. Man lasse nämlich μ_2 anfänglich von μ_1 verschieden seyn, und setze $\sqrt{\mu_2} = \sqrt{\mu_1} + \rho$, so kann man $sin.(t\sqrt{\mu_2} + \varepsilon_2)$ in

$$sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_2 + \rho t) = sin\,(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_2)\,.\,cos.\,\rho t + cos.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_2)\,.\,sin.\,\rho t$$
$$= sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_2)\left(1 - \frac{\rho^2 t^2}{1.2} + \frac{\rho^4 t^4}{1.2.3.4} - \ldots\right)$$
$$+ cos.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_2)\left(\rho t - \frac{\rho^3 t^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\right)$$

umstalten, wodurch, weil sich, wie wir oben gesehen haben, die Summe $E_1\,sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_1) + E_2\,sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_2)$ in ein Glied von der Gestalt $E'_1\,sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon'_1)$ zusammenziehen läßt,

$$E_1\,sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_1) + E_2\,sin.(t\sqrt{\mu_2} + \varepsilon_2) =$$
$$= E'_1\,sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon'_1) + E_2\,cos.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_2)\left(\rho t - \frac{\rho^3 t^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$
$$- E_2\,sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_2)\left(\frac{\rho^2 t^2}{1.2} - \ldots\ldots\right)$$

ergibt, wobei, wie eine leichte Überlegung lehrt, bei allen Werthen, welchen man den Constanten E'_1, ε'_1 beilegt, die Constanten E_2, ε_2 jeder anderen Werthe fähig sind. Man setze nun $E_2\,\rho = E'_2$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon'_2 - \frac{\pi}{2}$, so hat man

$$E_1\,sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_1) + E_2\,sin.(t\sqrt{\mu_2} + \varepsilon_2) =$$
$$= E'_1\,sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon'_1) + E'_2\,t\,.\,sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon'_2)$$
$$+ E'_2\,cos.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon'_2)\left(\frac{\rho t^2}{1.2} - \ldots\ldots\right)$$
$$- E'_2\,sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon'_2)\left(\frac{\rho^2 t^3}{1.2.3} - \ldots\right).$$

Diese Gleichung besteht für jeden noch so kleinen Werth von ρ, folglich auch für $\rho = 0$. In dem letzteren Falle, welcher der Annahme $\mu_1 = \mu_2$ entspricht, geht also die Summe

$$E_1\,sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon_1) + E_2\,sin.(t\sqrt{\mu_2} + \varepsilon_2)$$

in $E'_1\,sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon'_1) + E'_2\,t\,.\,sin.(t\sqrt{\mu_1} + \varepsilon'_2)$

über, wobei E'_1, E'_2, ε'_1, ε'_2 als willkürliche Constanten betrachtet werden dürfen, sobald E_1, E_2, ε_1, ε_2 es sind.

Setzt man ferner $\sqrt{\mu_3} = \mu_1 + \sigma$ und $\varepsilon_3 = \eta - \frac{\pi}{2}$, so findet man

$$E'_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon'_1) + E'_2\, t \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon'_2) + E_3 \sin.(t\sqrt{\mu_3}+\varepsilon_3) =$$
$$= E'_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon'_1) + E_3 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon_3)$$
$$+ [E'_2 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon'_2) + E_3 . \sigma \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\eta)]\, t$$
$$- E_3 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon_3)\left(\frac{\sigma^2 t^2}{1.2} - \frac{\sigma^4 t^2}{1.2.3.4} + \dots\right)$$
$$- E_3 \cos.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon_3)\left(\frac{\sigma^3 t^3}{1.2.3} - \dots\dots\dots\right).$$

Man kann aber

$$E'_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon'_1) + E_2 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon_3) = E''_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon''_1)$$

und

$$E'_2 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon'_2) + E_3 \sigma \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\eta) = E''_2 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon''_2)$$

setzen, wobei E''_1, E''_2, ε''_1, ε''_2 jedes Werthes fähig sind, sobald E'_1, E'_2, ε'_1, ε'_2 jeden Werth erhalten dürfen; hiebei bleiben E_3 und ε_3 völlig willkürlich: es sey daher $-E_3\sigma^2 = E''_3$ und $\varepsilon_3 = \varepsilon''_3$, so ergibt sich, da obige Rechnung bei jedem noch so kleinen Werthe von σ Platz findet, für $\sigma = 0$, wodurch $\mu_3 = \mu_1$ wird, statt

$$E'_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon'_1) + E'_2\, t \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon'_2) + E_3 \sin.(t\sqrt{\mu_3}+\varepsilon_3)$$

der Ausdruck

$$E''_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon''_1) + E''_2\, t \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon''_2) + E''_3\, t^2 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon''_3).$$

Hieraus sieht man nun ohne Mühe, daß man, wenn r Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3 ... μ_r der Gleichung für μ einander gleich sind, in der Formel für ξ, die Summe

$$E_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon_1) + E_2 \sin.(t\sqrt{\mu_2}+\varepsilon_2) + \dots + E_r \sin.(t\sqrt{\mu_r}+\varepsilon_r)$$

mit

$$E_1 \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon_1) + E_2\, t \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon_2) + \dots + E_r\, t^r \sin.(t\sqrt{\mu_1}+\varepsilon_r)$$

vertauschen müsse, um den allgemeinsten Werth von ξ vor Augen zu haben, und daß aus eben diesem Grunde in den Formeln für v, z, ... an der Stelle der r ersten Glieder, die letztgenannte Summe mit h_1, k_1, ... multiplicirt, erscheinen werde.

Die Formeln (9) stellen den Zustand des Systems nach Verlauf der Zeit t nur in so ferne mit hinreichender Genauigkeit dar, als ξ, v, z, ... wie es die der ganzen Rechnung zum Grunde liegende Voraussetzung mit sich bringt, so klein sind, daß die Producte und höheren Potenzen dieser Größen nicht beachtet zu werden brauchen. Es bietet sich nun die Frage dar, unter welchen Bedingungen die genannten Formeln für jeden beliebigen Werth von t gelten.

Eine leichte Überlegung zeigt, daß, sobald sich unter den Wurzeln der Gleichung für μ, nämlich unter den Größen μ_1, μ_2, μ_3, ... einander gleiche, oder reelle negative, oder imaginäre befinden, die Formeln (9), abgesehen von gewissen besonderen Umständen, nicht für jeden Werth von t gebraucht werden dürfen. Denn im ersten Falle erscheinen in diesen Formeln Glieder, welche Potenzen von t mit ganzen positiven Exponenten als Factoren enthalten; im zweiten und dritten Falle hingegen zeigen sich daselbst Sinusse imaginärer Kreisbögen, welche, wenn man die Ausdrücke für ξ, v, z, ... auf eine reelle Gestalt bringt, in Potenzen übergehen, in deren Exponenten die Veränderliche t als Factor vorkömmt. Beide Arten von Potenzen werden unendlich groß, wenn t unendlich wächst, daher können bei der oben berührten Beschaffenheit der Größen μ_1, μ_2, μ_3, ... die Variablen ξ, v, z nur dann für jedes t sehr klein bleiben, wenn wegen dem, durch einen besonderen anfänglichen Zustand des Systems herbeigeführten, Verschwinden einiger der Constanten E_1, E_2, E_3, ..., alle mit t zugleich ohne Ende sich vergrößernden Glieder aus den Formeln (9) hinausfallen; im Allgemeinen aber ist es hiebei nicht gestattet, die Werthe von ξ, v, z, ... fortwährend als sehr klein zu betrachten.

Sind hingegen die Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3, ... sämmtlich reell, positiv und von einander verschieden, so kann, wie die Gestalt der Ausdrücke (9) lehrt, ξ nicht größer werden als die Summe der numerischen Werthe der Constanten E_1, E_2, E_3, ...; v nicht größer als die Summe der numerischen Werthe von $h_1 E_1$, $h_2 E_2$, $h_3 E_3$, ...; z nicht größer als die Summe der numerischen Werthe von $k_1 E_1$, $k_2 E_2$, $k_3 E_3$, ... u. s. w., so, daß, sobald die hier genannten Summen sehr klein sind (was von dem Zustande des Systems am Anfange der Zeit t abhängt), auch ξ, v, z fortwährend sehr klein bleiben.

Wenn man ein System materieller Puncte, an welchem sich continuirliche Kräfte das Gleichgewicht halten, aus der ihm dabei zukommenden Lage ein wenig verrückt, und sodann der Wirksamkeit dieser Kräfte überläßt, so wird sich dasselbe, vorausgesetzt, daß die genannten Kräfte nicht in jeder der Positionen, deren das System fähig ist, im Gleichgewichte bleiben, entweder so bewegen, daß seine Lage in jedem beliebigen Augenblicke von der erwähnten Position des Gleichgewichtes nur äußerst wenig abweicht, oder es wird sich von dieser Position immer mehr und mehr entfernen. Im ersten Falle findet eine

Art schwingender Bewegung um die Position des Gleichgewichtes Statt, und man sagt, das Gleichgewicht selbst sey ein stabiles; in dem anderen Falle hingegen nennt man das Gleichgewicht ein labiles.

Da die Größen ξ, v, z, ... die Unterschiede zwischen den gleichnamigen Coordinaten jedes Punctes des gegebenen Systems in der ihm am Ende irgend einer Zeit zukommenden Lage und in der Position des Gleichgewichtes bestimmen, und jene Unterschiede sehr klein ausfallen, sobald die Größen ξ, v, z, ... sehr kleine Werthe besitzen; so sieht man, daß das Gleichgewicht des Systems immer stabil ist, wenn die Wurzeln der Gleichung für μ durchgehends reelle positive, und ungleiche Größen sind; und daß es, wenigstens im Allgemeinen, labil erscheint, wenn sich unter den genannten Wurzeln gleiche, oder reelle negative, oder imaginäre befinden, obschon in dem letzteren Falle das System bei einer gewissen Art der Verrückung aus der Position, in welcher es im Gleichgewichte war, ein Bestreben äußern kann, bei dieser Position zu beharren, während eine andere Störung des Gleichgewichtes eine gänzliche Abweichung desselben von dieser Position zur Folge hat.

Man kann sich immer ein System materieller Puncte aus seiner Position des Gleichgewichtes in eine solche Lage versetzt denken, daß nur eine, nach Belieben zu wählende, der Constanten E_1, E_2, E_3, ... von der Nulle verschieden ausfällt. Dann reducirt sich jeder der Ausdrücke für ξ, v, z, ... auf ein Glied von der Form

$$E \sin.(t\sqrt{\mu} + \varepsilon),$$

in welchem, wenn die so eben genannte Position des Gleichgewichtes keine labile seyn soll, der zugehörige Werth von μ reell und positiv seyn muß. Hier erlangen ξ, v, z, ... die Werthe, welche sie in einem bestimmten Augenblicke besitzen, nach Verlauf der Zeit $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ jedes Mal wieder zurück, d. h. das System befindet sich in je zwei, um das Zeitintervall $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ von einander abstehenden Augenblicken in einerlei Position, und es vollbringt demnach Schwingungen, deren Dauer durch $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ angezeigt wird.

Es sey θ der Elongationswinkel eines einfachen Pendels am Ende der Zeit t, und a die Länge desselben, so durchlauft der schwere Punct desselben während der Zeit dt den Bogen $- a d\theta$, und wird deßhalb

von der Kraft $-\frac{a\,d^2\theta}{dt^2}$ beschleuniget. Allein die Kraft, welche die Schwere, deren Intensität wir g nennen wollen, auf diesen Punct nach der Richtung seiner Bewegung ausübt, ist $= g\,sin.\,\theta$, daher besteht die Gleichung

$$\frac{a\,d^2\theta}{dt^2} + g\,sin.\,\theta = o.$$

Ist θ sehr klein, so kann man θ statt $sin.\,\theta$ nehmen, und diese Gleichung geht in

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{a}\theta = o$$

über, woraus durch Integration, in so ferne E und ε willkürliche Constanten vorstellen,

$$\theta = E\,sin.\left(t\sqrt{\frac{g}{a}} + \varepsilon\right)$$

folgt. Vergleichen wir die Form dieses Ausdruckes mit jener der Ausdrücke für ξ, v, z, ... so finden wir, daß die oben erwähnte Schwingungsweise des Systems mit jener eines einfachen Pendels übereinstimmt, für welches $\mu = \frac{g}{a}$ oder $a = \frac{g}{\mu}$ ist.

Man kann aber jede der in den Formeln (9) enthaltenen Constanten beibehalten, und die übrigen $=o$ denken; hiedurch ergeben sich mehrere Arten einfacher Schwingungsweisen des Systems, und den angeführten Formeln zu Folge wird jede Bewegung eines Systems um eine seiner Positionen des stabilen Gleichgewichtes als das Resultat des gleichzeitigen Stattfindens aller dieser einfachen Schwingungen erklärt, welche demnach, ohne sich gegenseitig zu stören, zugleich bestehen können. Diese Bemerkung beweiset die Richtigkeit des sogenannten Princips der Coexistenz der kleinsten Schwingungen, welches Daniel Bernoulli zuerst aufgestellt hat.

Lassen sich die Größen $\sqrt{\mu_1}$, $\sqrt{\mu_2}$, $\sqrt{\mu_3}$, ... auf die Formen $v_1\tau$, $v_2\tau$, $v_3\tau$, ... bringen, wobei v_1, v_2, v_3, ... ganze Zahlen sind, so erhält das System jedes Mal nach Verlauf der Zeit $\frac{2\pi}{\tau}$ dieselbe Position wieder; es vollbringt daher Schwingungen, deren Dauer, wenn man τ so groß als möglich annimmt, $=\frac{2\pi}{\tau}$ ist. Sind aber die Quotienten je zweier der Größen $\sqrt{\mu_1}$, $\sqrt{\mu_2}$, $\sqrt{\mu_3}$, ... nicht rational, so kehrt das System nie in eine frühere Lage zurück,

und es kann daher von keiner eigentlichen Schwingung desselben die Rede seyn.

Wenn die Function, welche wir in der vorhergehenden Vorlesung durch $\Sigma m \int (X dx + Y dy + Z dz)$ angedeutet haben, für $x = a$, $y = b$, $z = c$ ein Größtes oder Kleinstes wird, so verschwindet die Summe $\Sigma m (X dx + Y dy + Z dz)$ für eben dieselben Werthe der Coordinaten x, y, z, und die an dem gegebenen Systeme materieller Puncte thätigen continuirlichen Kräfte halten einander, wenn dasselbe in die diesen Coordinaten entsprechende Position versetzt wird, das Gleichgewicht. Wir wollen gegenwärtig zeigen, daß dieses Gleichgewicht stabil ist, wenn $\Sigma m \int (X dx + Y dy + Z dz)$ unter den angeführten Umständen in dem Zustande des Maximums erscheint, und labil, wenn sich die genannte Function im Zustande des Minimums befindet.

Denn lassen wir a, b, c in $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, $z = c + \gamma$ übergehen, wobei α, β, γ sehr klein sind, und reduciren wir die Variablen α, β, γ auf die independenten veränderlichen Größen ξ, υ, ζ, ... so haben wir, wie aus der vorhergehenden Vorlesung erhellet,

$$\Sigma m \int (X dx + Y dy + Z dz) = Q_0 + \tfrac{1}{2}[1]\xi^2 + \tfrac{1}{2}[2]\upsilon^2 + \tfrac{1}{2}[3]\zeta^2 + \ldots + [1,2]\xi\upsilon + [1,3]\xi\zeta + [2,3]\upsilon\zeta + \ldots$$

Die Bedingungsgleichungen, an welche das vorliegende System gebunden ist, sind offenbar von der Zeit t frei, weil das einmal im Gleichgewichte stehende System für sich allein fortwährend in diesem Zustande beharret; daher findet hier die in der vier und zwanzigsten Vorlesung bewiesene Gleichung (6) Anwendung. Ihr zu Folge ist, wenn wir die Variablen ξ, υ, ζ auf das Ende der Zeit t beziehen, und die dieser Zeit zugehörige Geschwindigkeit der Masse m durch v andeuten,

$$\Sigma m v^2 = Const. + [1]\xi^2 + [2]\upsilon^2 + [3]\zeta^2 + \ldots + 2[1,2]\xi\upsilon + 2[1,3]\xi\zeta + 2[2,3]\upsilon\zeta + \ldots$$

Da, wenn wir alle früher gemachten Voraussetzungen unverändert beibehalten, die Geschwindigkeiten aller Bestandtheile des Systems am Anfange der Zeit t gleich Null sind, so ist der numerische Werth der in dieser Gleichung vorhandenen Constante jenem gleich, welchen die Summe

$$\left.\begin{array}{l} [1]\xi^2 + [2]\upsilon^2 + [3]\zeta^2 + \ldots\ldots\ldots \\ + [1,2]\xi\upsilon + [1,3]\xi\zeta + [2,3]\upsilon\zeta + \ldots \end{array}\right\} = S$$

am Anfange der Zeit t besitzt, folglich eine sehr kleine Größe.

Ist nun der Werth von $\Sigma m \int (X dx + Y dy + Z dz)$ für $x = a$, $y = b$, $z = c$, nämlich Q_0, ein Maximum, so muß für $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, $z = c + \gamma$ stets

$$\Sigma m \int (X dx + Y dy + Z dz) < Q_0,$$

folglich $\frac{1}{2} S$, und daher auch S negativ seyn. Aber die Summe $\Sigma m v^2$ ist ihrer Natur nach nothwendig positiv, daher kann, wie die Gleichung

$$\Sigma m v^2 = Const. + S$$

zeigt, der numerische Werth von S die sehr kleine Constante nicht übersteigen, und es müssen dem zu Folge die Werthe der Variablen ξ, v, z rc., also auch x, y, z fortwährend sehr klein bleiben, d. h. die oben erwähnte Position des Gleichgewichtes ist eine stabile.

Anders verhält sich aber die Sache, wenn Q_0 ein Minimum, folglich S positiv, und die Constante negativ ist, in welchem Falle dem unbegrenzten Wachsen von S, und somit auch von ξ, v, z, ..., nichts im Wege steht. Um aber die Labilität des Gleichgewichtes für $x = a$, $y = b$, $z = c$ außer Zweifel zu setzen, muß gezeigt werden, daß, unter der Voraussetzung des Minimums von $\Sigma m \int (X dx + Y dy + Z dz)$, kein Werth von μ reell und positiv seyn kann. Zu diesem Ende bemerken wir, daß die Größen, welche wir in der vorhergehenden Vorlesung p, q, r, ... P, Q, R, ... genannt haben, die Werthe sind, welche die in Bezug auf g, h, k, ... genommenen partiellen Differenzialquotienten der Summen

$$A = \tfrac{1}{2}(1)g^2 + \tfrac{1}{2}(2)h^2 + \tfrac{1}{2}(3)k^2 + \ldots$$
$$\ldots + (1,2)gh + (1,3)gk + (2,3)hk + \ldots$$
$$B = \tfrac{1}{2}[1]g^2 + \tfrac{1}{2}[2]h^2 + \tfrac{1}{2}[3]k^2 + \ldots$$
$$\ldots + [1,2]gh + [1,3]gk + [2,3]hk + \ldots$$

für $g = 1$ erhalten, so daß, wenn wir

$$A\mu + B = N$$

setzen, die partiellen Differenzialquotienten $\frac{dN}{dg}$, $\frac{dN}{dh}$, $\frac{dN}{dk}$, ... durch die Wurzeln der Gleichung für μ, nämlich durch μ_1, μ_2, μ_3, ... wie aus den Gleichungen (6) erhellet, nachdem man $g = 1$ gesetzt hat, auf Null reducirt werden. Aber N ist eine homogene Function der Größen g, h, k, ... von der zweiten Ordnung, daher besteht die Gleichung

$$g \frac{dN}{dg} + h \frac{dN}{dh} + k \frac{dN}{dk} + \ldots = 2N,$$

folglich wird auch $N = 0$, wenn man $g = 1$ und $\mu =$ einer der Größen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ seyn läßt. Wir haben daher für die hier in Betrachtung kommenden Werthe von μ

$$A\mu + B = 0, \quad \text{also} \quad \mu = -\frac{B}{A}.$$

Substituirt man statt (1), (2), (3), ... (1, 2), (1, 3), (2, 3), ... ihre Werthe, so kann man A als die Summe mehrerer mit positiven Coefficienten multiplicirter Quadrate darstellen, und somit ist A nothwendig stets positiv; B aber hat dieselbe Form wie S, und ist stets positiv, sobald S für alle Werthe von $\xi, v, z, \ldots$ positiv erscheint, was im Falle des Minimums von Q_0 zutrifft: es kann daher μ in diesem Falle keinen reellen positiven Werth besitzen, wodurch obige Behauptung vollkommen gerechtfertiget ist.

Sieben und zwanzigste Vorlesung.

Über die Schwingungen eines linearen Systems gegebenen Kräften unterworfener und auf einander wechselweise einwirkender Massen in der Nähe der Position des Gleichgewichtes.

Nehmen wir an, auf eine Folge von Massen, deren jede von der ihr vorhergehenden und nachfolgenden angezogen oder abgestoßen wird, wirken gegebene Kräfte, welche den unter diesen Massen selbst bestehenden Anziehungen oder Abstoßungen das Gleichgewicht halten. Bringt man jede einzelne Masse ein wenig aus der ihr dabei zukommenden Lage, und überläßt sie sodann den genannten Kräften, so entsteht eine schwingende Bewegung, welche sich nach der in den vorhergehenden Vorlesungen dargelegten Methode berechnen läßt. Man kann aber in dem vorliegenden Falle der Rechnung eine etwas veränderte Form geben, und da dieselbe mit Hülfe des Differenzencalculs sehr vereinfacht wird, so wollen wir sie unabhängig von der so eben erwähnten durchführen.

Bezeichnen wir irgend eine der vorhandenen Massen durch m; die Kräfte, welche an ihr am Ende der Zeit t parallel mit den Axen des der Rechnung zum Grunde liegenden rechtwinkligen Coordinatensystems und nach der Gegend der positiven Coordinaten hin angebracht sind, durch mX, mY, mZ; die Coordinaten dieser Masse selbst, welche wir hier als einen Punct betrachten, durch x, y, z; die Coordinaten der nächstfolgenden Masse m_1 durch $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$; den Abstand beider durch Δs; die Kraft, mit welcher die Massen m und m_1 auf einander einwirken, durch Φ, und endlich alle auf die nächstvorhergehende Masse sich beziehenden Größen, indem wir den Zeichen der zu m gehörenden gleichnamigen Größen den Zeiger -1 beisetzen: so gibt die Kraft Φ, in so ferne man sich dieselbe an der Masse m thätig denkt, nach den Richtungen der x, y, z zerlegt, die Kräfte

$$\Phi \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s}, \quad \Phi \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s}, \quad \Phi \cdot \frac{\Delta z}{\Delta s},$$

und die Kraft Φ_{-1}, unter denselben Verhältnissen, die Kräfte

$$-\Phi_{-1}\cdot\frac{\Delta x_{-1}}{\Delta s_{-1}},\quad -\Phi_{-1}\cdot\frac{\Delta y_{-1}}{\Delta s_{-1}},\quad -\Phi_{-1}\cdot\frac{\Delta z_{-1}}{\Delta s_{-1}}$$

oder

$$-\left(\Phi\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)_{-1},\quad -\left(\Phi\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)_{-1},\quad -\left(\Phi\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)_{-1}.$$

Schreiben wir nun, wie es im Calcul mit Differenzen üblich ist,

$$\Delta\left(\Phi\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)_{-1},\quad \Delta\left(\Phi\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)_{-1},\quad \Delta\left(\Phi\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)_{-1}$$

statt

$$\Phi\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s}-\left(\Phi\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)_{-1},\quad \Phi\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}-\left(\Phi\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)_{-1},\quad \Phi\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s}-\left(\Phi\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)_{-1}$$

und setzen wir $\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = V$,
so wird der Inbegriff der an der Masse m am Ende der Zeit t parallel mit den Axen der x, y, z thätigen Kräfte durch

$$m\frac{dV}{dx}+\Delta\left(\Phi\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)_{-1},\quad m\frac{dV}{dy}+\Delta\left(\Phi\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)_{-1},\quad m\frac{dV}{dz}+\Delta\left(\Phi\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)_{-1}$$

ausgedrückt. Diese müssen den Kräften $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$ beziehungsweise gleich gelten; daher haben wir für die Bewegung der Masse m folgende Differenzialgleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}-m\frac{dV}{dx}-\Delta\left(\Phi\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)_{-1}&=0,\\ m\frac{d^2y}{dt^2}-m\frac{dV}{dy}-\Delta\left(\Phi\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)_{-1}&=0,\\ m\frac{d^2z}{dt^2}-m\frac{dV}{dz}-\Delta\left(\Phi\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)_{-1}&=0.\end{aligned}$$

Es seyen a, b, c die Werthe von x, y, z; F der Werth von Φ; Δf der Werth von Δs im Zustande des Gleichgewichtes; ferner H der Betrag des Integrals $\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$ für $x=a$, $y=b$, $z=c$; endlich

$$x=a+\xi,\quad y=b+v,\quad z=c+\zeta$$

die Coordinaten der Masse m nach Verlauf der Zeit t, wobei ξ, v, ζ sehr kleine Größen andeuten: so kann man offenbar

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx}&=\frac{dH}{da}+\frac{d^2H}{da^2}\xi+\frac{d^2H}{da\,db}v+\frac{d^2H}{da\,dc}\zeta,\\ \frac{dV}{dy}&=\frac{dH}{db}+\frac{d^2H}{da\,db}\xi+\frac{d^2H}{db^2}v+\frac{d^2H}{db\,dc}\zeta,\\ \frac{dV}{dz}&=\frac{dH}{dc}+\frac{d^2H}{da\,dc}\xi+\frac{d^2H}{db\,dc}v+\frac{d^2H}{dc^2}\zeta\end{aligned}$$

setzen.

Wir wollen bei gegenwärtiger Untersuchung noch annehmen, daß die Kraft Φ bloß von Δs abhänge, also F als eine Function von Δf gegeben sey, so wird

$$\Phi \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} = F \cdot \frac{\Delta a}{\Delta f} + \left(\frac{dF}{d\Delta f} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta f} - F \cdot \frac{\Delta a}{\Delta f^2}\right) d\Delta f + F \cdot \frac{\Delta \xi}{\Delta f},$$

$$\Phi \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s} = F \cdot \frac{\Delta b}{\Delta f} + \left(\frac{dF}{d\Delta f} \cdot \frac{\Delta b}{\Delta f} - F \cdot \frac{\Delta b}{\Delta f^2}\right) d\Delta f + F \cdot \frac{\Delta v}{\Delta f},$$

$$\Phi \cdot \frac{\Delta z}{\Delta s} = F \cdot \frac{\Delta c}{\Delta f} + \left(\frac{dF}{d\Delta f} \cdot \frac{\Delta c}{\Delta f} - F \cdot \frac{\Delta c}{\Delta f^2}\right) d\Delta f + F \cdot \frac{\Delta \zeta}{\Delta f},$$

wobei $d\Delta f = d \cdot \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}$

$$= \frac{\Delta a}{\Delta f}\Delta\xi + \frac{\Delta b}{\Delta f}\Delta v + \frac{\Delta c}{\Delta f}\Delta z \text{ ist.}$$

Substituiren wir diese Resultate in die Gleichung (1), und bedenken wir, daß wegen des Gleichgewichtes der Masse m für $x = a$, $y = b$, $z = c$

$$(2) \qquad m\frac{dH}{da} + \Delta\left(F \cdot \frac{\Delta a}{\Delta f}\right)_{-1} = 0$$

$$m\frac{dH}{db} + \Delta\left(F \cdot \frac{\Delta b}{\Delta f}\right)_{-1} = 0$$

$$m\frac{dH}{dc} + \Delta\left(F \cdot \frac{\Delta c}{\Delta f}\right)_{-1} = 0$$

ist, so finden wir, wenn wir der Kürze wegen $\frac{dF}{d\Delta f} - \frac{F}{\Delta f}$ durch G andeuten,

$$(3) \qquad m\frac{d^2\xi}{dt^2} - m\left(\frac{d^2H}{da^2}\xi + \frac{d^2H}{da\,db}v + \frac{d^2H}{da\,dc}z\right)$$
$$-\Delta\left[F\frac{\Delta\xi}{\Delta f} + G\frac{\Delta a}{\Delta f}\left(\frac{\Delta a}{\Delta f}\Delta\xi + \frac{\Delta b}{\Delta f}\Delta v + \frac{\Delta c}{\Delta f}\Delta z\right)\right]_{-1} = 0,$$

$$m\frac{d^2v}{dt^2} - m\left(\frac{d^2H}{da\,db}\xi + \frac{d^2H}{db^2}v + \frac{d^2H}{db\,dc}z\right)$$
$$-\Delta\left[F\frac{\Delta v}{\Delta f} + G\frac{\Delta b}{\Delta f}\left(\frac{\Delta a}{\Delta f}\Delta\xi + \frac{\Delta b}{\Delta f}\Delta v + \frac{\Delta c}{\Delta f}\Delta z\right)\right]_{-1} = 0,$$

$$m\frac{d^2\zeta}{dt^2} - m\left(\frac{d^2H}{da\,dc}\xi + \frac{d^2H}{db\,dc}v + \frac{d^2H}{dc^2}z\right)$$
$$-\Delta\left[F\frac{\Delta\zeta}{\Delta f} + G\frac{\Delta c}{\Delta f}\left(\frac{\Delta a}{\Delta f}\Delta\xi + \frac{\Delta b}{\Delta f}\Delta v + \frac{\Delta c}{\Delta f}\Delta z\right)\right]_{-1} = 0.$$

Die Gleichungen (2) geben, wie man leicht sieht,

$$(4) \qquad F\frac{\Delta a}{\Delta f} = \Sigma m\frac{dH}{da}, \quad F\frac{\Delta b}{\Delta f} = \Sigma m\frac{dH}{db}, \quad F\frac{\Delta c}{\Delta f} = \Sigma m\frac{dH}{dc},$$

wobei die Summen auf das ganze System auszudehnen sind; daher ist

$$(5)\quad F = \sqrt{\left(\Sigma m \frac{dH}{da}\right)^2 + \left(\Sigma m \frac{dH}{db}\right)^2 + \left(\Sigma m \frac{dH}{dc}\right)^2}.$$

Da wir die zwischen F und Δf bestehende Relation kennen, so bietet uns diese Gleichung den dem Gleichgewichte des Systems entsprechenden Werth von Δf dar. Die hier geführte Rechnung kann aber auch auf den Fall angewendet werden, wenn Δf unveränderlich ist; dabei dient die Formel (5) zur Bestimmung von F. Nur fallen unter der letzteren Voraussetzung die Gleichungen (3) wegen

$$\frac{\Delta a}{\Delta f}\Delta\xi + \frac{\Delta b}{\Delta f}\Delta v + \frac{\Delta c}{\Delta f}\Delta z = 0$$

einfacher aus.

Um die Gleichungen (3), in welchen zugleich Differenzen und Differenzialien vorkommen, zu integriren, sey

$$\xi = \theta\mathfrak{X},\quad v = \theta\mathfrak{Y},\quad z = \theta\mathfrak{Z},$$

wobei wir uns $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ von t, und θ von der Anordnung der Puncte des Systems unabhängig denken, also

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mathfrak{X}\frac{d^2\theta}{dt^2},\quad \frac{d^2 v}{dt^2} = \mathfrak{Y}\frac{d^2\theta}{dt^2},\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mathfrak{Z}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\text{und}\quad \Delta\xi = \theta\Delta\mathfrak{X},\quad \Delta v = \theta\Delta\mathfrak{Y},\quad \Delta z = \theta\Delta\mathfrak{Z}$$

annehmen, so gehen die genannten Gleichungen in die einzige

$$(6)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \mu\theta = 0$$

über, wobei

$$(7)\quad m\left(\mu\mathfrak{X} + \frac{d^2H}{da^2}\mathfrak{X} + \frac{d^2H}{da\,db}\mathfrak{Y} + \frac{d^2H}{da\,dc}\mathfrak{Z}\right)$$
$$+\Delta\left[\frac{F\Delta\mathfrak{X}}{\Delta f} + G\frac{\Delta a}{\Delta f}\left(\frac{\Delta a}{\Delta f}\Delta\mathfrak{X} + \frac{\Delta b}{\Delta f}\Delta\mathfrak{Y} + \frac{\Delta c}{\Delta f}\Delta\mathfrak{Z}\right)\right]_{-1} = 0,$$
$$m\left(\mu\mathfrak{Y} + \frac{d^2H}{da\,db}\mathfrak{X} + \frac{d^2H}{db^2}\mathfrak{Y} + \frac{d^2H}{db\,dc}\mathfrak{Z}\right)$$
$$+\Delta\left[\frac{F\Delta\mathfrak{Y}}{\Delta f} + G\frac{\Delta b}{\Delta f}\left(\frac{\Delta a}{\Delta f}\Delta\mathfrak{X} + \frac{\Delta b}{\Delta f}\Delta\mathfrak{Y} + \frac{\Delta c}{\Delta f}\Delta\mathfrak{Z}\right)\right]_{-1} = 0,$$
$$m\left(\mu\mathfrak{Z} + \frac{d^2H}{da\,dc}\mathfrak{X} + \frac{d^2H}{db\,dc}\mathfrak{Y} + \frac{d^2H}{dc^2}\mathfrak{Z}\right)$$
$$+\Delta\left[\frac{F\Delta\mathfrak{Z}}{\Delta f} + G\frac{\Delta c}{\Delta f}\left(\frac{\Delta a}{\Delta f}\Delta\mathfrak{X} + \frac{\Delta b}{\Delta f}\Delta\mathfrak{Y} + \frac{\Delta c}{\Delta f}\Delta\mathfrak{Z}\right)\right]_{-1} = 0$$

ist.

Aus der Gleichung (6) erhalten wir durch Integration

$$(8) \qquad \theta = E\, sin.(t\sqrt{\mu} + \varepsilon),$$

wobei E und ε unbestimmte Constanten vorstellen. Die Gleichungen (7) hingegen lassen sich in ihrer allgemeinen Gestalt durch die bis jetzt bekannten Integrationsmethoden für Differenzengleichungen nicht integriren. Es bleibt daher nichts anderes zu thun übrig, als die in denselben erscheinenden Differenzen zu entwickeln, wodurch sie die Form

$$(9) \quad \mathfrak{A}\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{B}\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{C}\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{D}\mathfrak{X} + \mathfrak{E}\mathfrak{Y} + \mathfrak{F}\mathfrak{Z} + \mathfrak{G}\mathfrak{X}_{-1} + \mathfrak{H}\mathfrak{Y}_{-1} + \mathfrak{I}\mathfrak{Z}_{-1} = 0$$

annehmen, worin die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{I}$ von t unabhängig sind, und μ bloß in $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, und zwar nur in der ersten Potenz erscheint. Wir haben somit drei Gleichungen, deren jede die einer bestimmten Masse unseres Systems gehörenden Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ durch die auf die beiden nächstvorhergehenden Massen sich beziehenden Werthe derselben Größen angibt, und sind somit offenbar im Stande, die der mit dem Zeiger r versehenen Masse m_r entsprechenden Größen $\mathfrak{X}_r$, $\mathfrak{Y}_r$, $\mathfrak{Z}_r$ durch die den beiden ersten Massen des Systems correspondirenden auszudrücken. Lassen wir für letztgenannte Massen die Zeiger o und 1 gelten, so erhalten wir für $\mathfrak{X}_r$, $\mathfrak{Y}_r$, $\mathfrak{Z}_r$ Ausdrücke von der Form

$$A\mathfrak{X}_0 + B\mathfrak{Y}_0 + C\mathfrak{Z}_0 + A'\mathfrak{X}_1 + B'\mathfrak{Y}_1 + C'\mathfrak{Z}_1,$$

in welchen offenbar A, B, C und A′, B′, C′ ganze rationale Functionen von μ anzeigen, und zwar, die drei ersten Coefficienten, Functionen von der Ordnung $r - 2$, und die drei letzten, Functionen von der Ordnung $r - 1$.

Nehmen wir nun an, daß die erste und die letzte Masse in dem vorliegenden linearen Systeme unbeweglich sind, so verschwinden für dieselben die Werthe von ξ, v, z, folglich auch X, Y, Z, und wir haben, wenn wir die Anzahl sämmtlicher beweglicher Massen $= n$ setzen, zwischen $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ drei Gleichungen von der Form

$$\mathfrak{A}\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{B}\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{C}\mathfrak{Z}_1 = 0,$$

in welchen die Coefficienten von $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ bloß Potenzen von μ mit ganzen positiven Exponenten, wovon der höchste $= n$ ist, enthalten. Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Quotienten $\frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{X}_1}$, $\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{X}_1}$, so ergibt sich eine Gleichung für μ vom $3n^{ten}$ Grade, und da sich mittelst der erwähnten drei Gleichungen wegen der Willkürlichkeit einer der Größen $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ jede derselben durch eine ganze rationale Function

von μ darstellen läßt, so kann man auch überhaupt jede der auf eine beliebige bewegte Masse m sich beziehenden Größen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ durch eine ganze rationale Function von μ ausdrücken. Hiedurch erhält man für die so eben genannten Größen so viele verschiedene Werthe, als es Werthe für μ gibt, nämlich 3n, und je drei zusammengehörige derselben in die Ausdrücke

$$\xi = \mathfrak{X}E\,sin.(t\sqrt{\mu}+\varepsilon),\quad \upsilon = \mathfrak{Y}E\,sin.(t\sqrt{\mu}+\varepsilon),\quad \zeta = \mathfrak{Z}E\,sin.(t\sqrt{\mu}+\varepsilon)$$

substituirt, verhelfen uns zu Auflösungen der Gleichungen (3). Diese Auflösungen sind bloß partikuläre; da aber, der Form der Gleichungen (3) zu Folge, die Summe einer beliebigen Anzahl derselben ebenfalls eine Auflösung dieser Gleichungen ist, so können wir die vollständigen mit 3n willkürlichen Constanten versehenen Werthe von ξ, υ, ζ leicht darstellen. Sie sind, wenn wir die den 3n Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3, ... der Gleichung für μ zugehörigen Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ durch $\overset{1}{\mathfrak{X}}$, $\overset{1}{\mathfrak{Y}}$, $\overset{1}{\mathfrak{Z}}$; $\overset{2}{\mathfrak{X}}$, $\overset{2}{\mathfrak{Y}}$, $\overset{2}{\mathfrak{Z}}$; $\overset{3}{\mathfrak{X}}$, $\overset{3}{\mathfrak{Y}}$, ꝛc. und eben so durch $\overset{1}{E}$, $\overset{1}{\varepsilon}$; $\overset{2}{E}$, $\overset{2}{\varepsilon}$; $\overset{3}{E}$, $\overset{3}{\varepsilon}$, ꝛc. bis jetzt noch unbestimmte Constanten anzeigen,

$$(10)\quad \xi = \overset{1}{\mathfrak{X}}\overset{1}{E}\,sin.(t\sqrt{\mu_1}+\overset{1}{\varepsilon}) + \overset{2}{\mathfrak{X}}\overset{2}{E}\,sin.(t\sqrt{\mu_2}+\overset{2}{\varepsilon}) + \overset{3}{\mathfrak{X}}\overset{3}{E}\,sin.(t\sqrt{\mu}+\overset{3}{\varepsilon}) + \ldots$$

$$\upsilon = \overset{1}{\mathfrak{Y}}\overset{1}{E}\,sin.(t\sqrt{\mu_1}+\overset{1}{\varepsilon}) + \overset{2}{\mathfrak{Y}}\overset{2}{E}\,sin.(t\sqrt{\mu_2}+\overset{2}{\varepsilon}) + \overset{3}{\mathfrak{Y}}\overset{3}{E}\,sin.(t\sqrt{\mu_3}+\overset{3}{\varepsilon}) + \ldots$$

$$\zeta = \overset{1}{\mathfrak{Z}}\overset{1}{E}\,sin.(t\sqrt{\mu_1}+\overset{1}{\varepsilon}) + \overset{2}{\mathfrak{Z}}\overset{2}{E}\,sin.(t\sqrt{\mu_2}+\overset{2}{\varepsilon}) + \overset{3}{\mathfrak{Z}}\overset{3}{E}\,sin.(t\sqrt{\mu_3}+\overset{3}{\varepsilon}) + \ldots.$$

welchen wir, der Kürze wegen, auch die Gestalt

$$(11)\quad \xi = \mathfrak{S}[\mathfrak{X}E\,sin.(t\sqrt{\mu}+\varepsilon)],\quad \upsilon = \mathfrak{S}[\mathfrak{Y}E\,sin.(t\sqrt{\mu}+\varepsilon)],\quad \zeta = \mathfrak{S}[\mathfrak{Z}E\,sin.(t\sqrt{\mu}+\varepsilon)]$$

geben können, wobei das Zeichen $\mathfrak{S}$ auf die Summe der durch alle Wurzeln der Gleichung für μ erzeugten Werthe der Ausdrücke innerhalb der eckigen Klammern hindeutet.

Um die in diesen Formeln erscheinenden Constanten zu bestimmen, welche von den, dem Anfange der Zeit t entsprechenden, Werthen der Größen ξ, υ, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\upsilon}{dt}$, $\frac{d\xi}{dt}$ abhängen, multipliciren wir die Glei-

chungen (3) der Reihe nach mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, und nehmen die Summen der erhaltenen Producte hinsichtlich des ganzen Systems, so haben wir

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d^2\Sigma(\mathfrak{X}\xi+\mathfrak{Y}\upsilon+\mathfrak{Z}\zeta)}{dt^2}\\
-\Sigma m\left(\frac{d^2H}{da^2}\mathfrak{X}+\frac{d^2H}{da\,db}\mathfrak{Y}+\frac{d^2H}{da\,dc}\mathfrak{Z}\right)\xi\\
-\Sigma m\left(\frac{d^2H}{da\,db}\mathfrak{X}+\frac{d^2H}{db^2}\mathfrak{Y}+\frac{d^2H}{db\,dc}\mathfrak{Z}\right)\upsilon\\
-\Sigma m\left(\frac{d^2H}{da\,dc}\mathfrak{X}+\frac{d^2H}{db\,dc}\mathfrak{Y}+\frac{d^2H}{dc^2}\mathfrak{Z}\right)\zeta\\
-\Sigma\mathfrak{X}\Delta\left[\frac{F\Delta\xi}{\Delta f}+G\frac{\Delta a}{\Delta f}\left(\frac{\Delta a}{\Delta f}\Delta\xi+\frac{\Delta b}{\Delta f}\Delta\upsilon+\frac{\Delta c}{\Delta f}\Delta\zeta\right)\right]_{-1}\\
-\Sigma\mathfrak{Y}\Delta\left[\frac{F\Delta\upsilon}{\Delta f}+G\frac{\Delta b}{\Delta f}\left(\frac{\Delta a}{\Delta f}\Delta\xi+\frac{\Delta b}{\Delta f}\Delta\upsilon+\frac{\Delta c}{\Delta f}\Delta\zeta\right)\right]_{-1}\\
-\Sigma\mathfrak{Z}\Delta\left[\frac{F\Delta\zeta}{\Delta f}+G\frac{\Delta c}{\Delta f}\left(\frac{\Delta a}{\Delta f}\Delta\xi+\frac{\Delta b}{\Delta f}\Delta\upsilon+\frac{\Delta c}{\Delta f}\Delta\zeta\right)\right]_{-1}
\end{array}\right\}=0.$$

Nun ist im Allgemeinen

$$\Delta\,.\,xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y;$$

oder, wenn wir $y+\Delta y = y_1$ setzen:

$$\Delta\,.\,xy = x\Delta y + y_1\Delta x,$$

folglich $$xy = \Sigma x\Delta y + \Sigma y_1\Delta x$$

und $$\Sigma x\Delta y = xy - \Sigma y_1\Delta x.$$

Diese Formel gibt uns, da die Werthe von ξ und $\mathfrak{X}$ für die Grenzen des Systems der vorhandenen Massen verschwinden,

$$\Sigma\mathfrak{X}\Delta(U\Delta\xi)_{-1} = -\Sigma U\Delta\xi\Delta\mathfrak{X} = \Sigma\xi_1\Delta(U\Delta\mathfrak{X}),$$

oder weil $\Sigma\xi_1\Delta(U\Delta\mathfrak{X})$ offenbar mit $\Sigma\xi\Delta(U\Delta\mathfrak{X})_{-1}$ gleichbedeutend ist,

$$\Sigma\mathfrak{X}\Delta(U\Delta\xi)_{-1} = \Sigma\xi\Delta(U\Delta\mathfrak{X})_{-1}\,.$$

Setzen wir statt U nach und nach $\frac{F}{\Delta f}$, $G\frac{\Delta a^2}{\Delta f^2}$, u. s. w., indem wir zugleich nach Umständen ξ mit υ und ζ vertauschen, so können wir, mit Rücksicht auf die Gleichungen (7), obige Gleichung auf die Form

$$\frac{d^2\Sigma m(\mathfrak{X}\xi+\mathfrak{Y}\upsilon+\mathfrak{Z}\zeta)}{dt^2}+\mu\Sigma m(\mathfrak{X}\xi+\mathfrak{Y}\upsilon+\mathfrak{Z}\zeta)=0$$

bringen, aus welcher

$$(12) \qquad \Sigma m(\mathfrak{X}\xi + \mathfrak{Y}\upsilon + \mathfrak{Z}\zeta) = L \sin.(t\sqrt{\mu} + \lambda)$$

folgt, wobei L und λ unbestimmte beständige Größen bedeuten.

Hier finden jetzt dieselben Schlüsse Platz, welche wir in der fünf und zwanzigsten Vorlesung angewendet haben. Werden nämlich die Ausdrücke (11) in die Gleichung (12) eingeführt, so geht dieselbe in eine identische über, und deßhalb ist

$$E\Sigma m(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2) = L,$$

folglich $E \sin.(t\sqrt{\mu} + \varepsilon) = \dfrac{\Sigma m(\mathfrak{X}\xi + \mathfrak{Y}\upsilon + \mathfrak{Z}\zeta)}{\Sigma m(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)}$.

Es sey nun für $t = o$: $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, $\zeta = \gamma$ und

$$\frac{d\xi}{dt} = \bar{\alpha}, \quad \frac{d\upsilon}{dt} = \bar{\beta}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \bar{\gamma},$$

so haben wir

$$E \sin.\varepsilon = \frac{\Sigma m(\mathfrak{X}\alpha + \mathfrak{Y}\beta + \mathfrak{Z}\gamma)}{\Sigma m(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)},$$

$$E \cos.\varepsilon = \frac{\Sigma m(\mathfrak{X}\bar{\alpha} + \mathfrak{Y}\bar{\beta} + \mathfrak{Z}\bar{\gamma})}{\sqrt{\mu}\,.\,\Sigma m(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)},$$

mithin

$$(13) \quad \xi = \mathfrak{S}\left[\frac{\mathfrak{X}\Sigma m(\mathfrak{X}\alpha + \mathfrak{Y}\beta + \mathfrak{Z}\gamma)}{\Sigma m(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)} \cos.t\sqrt{\mu}\right] + \mathfrak{S}\left[\frac{\mathfrak{X}\Sigma m(\mathfrak{X}\bar{\alpha} + \mathfrak{Y}\bar{\beta} + \mathfrak{Z}\bar{\gamma})}{\sqrt{\mu}.\Sigma m(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)} \sin.t\sqrt{\mu}\right],$$

$$\upsilon = \mathfrak{S}\left[\frac{\mathfrak{Y}\Sigma m(\mathfrak{X}\alpha + \mathfrak{Y}\beta + \mathfrak{Z}\gamma)}{\Sigma m(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)} \cos.t\sqrt{\mu}\right] + \mathfrak{S}\left[\frac{\mathfrak{Y}\Sigma m(\mathfrak{X}\bar{\alpha} + \mathfrak{Y}\bar{\beta} + \mathfrak{Z}\bar{\gamma})}{\sqrt{\mu}.\Sigma m(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)} \sin.t\sqrt{\mu}\right],$$

$$\zeta = \mathfrak{S}\left[\frac{\mathfrak{Z}\Sigma m(\mathfrak{X}\alpha + \mathfrak{Y}\beta + \mathfrak{Z}\gamma)}{\Sigma m(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)} \cos.t\sqrt{\mu}\right] + \mathfrak{S}\left[\frac{\mathfrak{Z}\Sigma m(\mathfrak{X}\bar{\alpha} + \mathfrak{Y}\bar{\beta} + \mathfrak{Z}\bar{\gamma})}{\sqrt{\mu}.\Sigma m(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)} \sin.t\sqrt{\mu}\right].$$

In diesen Formeln bezieht sich das Summenzeichen $\mathfrak{S}$ auf die Verschiedenheit der Werthe von μ, und das Summenzeichen Σ auf die Verschiedenheit der Bestandtheile des Systems.

Wir dürfen hier aber den besonderen Fall nicht außer Acht lassen, wenn die erste der Gleichungen (3) bloß ξ, die zweite bloß υ, und die dritte bloß ζ enthält. Dann erscheint in der ersten der Glei-

chungen (7) bloß $\mathfrak{X}$, in der zweiten bloß $\mathfrak{Y}$, und in der dritten bloß $\mathfrak{Z}$, und jede derselben führt durch das oben erklärte Verfahren auf eine besondere Gleichung für μ vom n^{ten} Grade. Bezeichnen wir die Unbekannten dieser Gleichungen durch μ', μ'', μ''', so finden wir auf dem oben gewählten Wege

$$(14)\quad \xi = \mathfrak{S}\left[\frac{\mathfrak{X}\,\Sigma m\,\mathfrak{X}\alpha}{\Sigma m\,\mathfrak{X}^2}\,cos.\,t\sqrt{\mu'} + \frac{\mathfrak{X}\,\Sigma m\,\mathfrak{X}\bar{\alpha}}{\sqrt{\mu'}\,\Sigma m\,\mathfrak{X}^2}\,sin.\,t\sqrt{\mu'}\right],$$

$$\upsilon = \mathfrak{S}\left[\frac{\mathfrak{Y}\,\Sigma m\,\mathfrak{Y}\beta}{\Sigma m\,\mathfrak{Y}^2}\,cos.\,t\sqrt{\mu''} + \frac{\mathfrak{Y}\,\Sigma m\,\mathfrak{Y}\bar{\beta}}{\sqrt{\mu''}\,\Sigma m\,\mathfrak{Y}^2}\,sin.\,t\sqrt{\mu''}\right],$$

$$\zeta = \mathfrak{S}\left[\frac{\mathfrak{Z}\,\Sigma m\,\mathfrak{Z}\gamma}{\Sigma m\,\mathfrak{Z}^2}\,cos.\,t\sqrt{\mu'''} + \frac{\mathfrak{Z}\,\Sigma m\,\mathfrak{Z}\bar{\gamma}}{\sqrt{\mu'''}\,\Sigma m\,\mathfrak{Z}^2}\,sin.\,t\sqrt{\mu'''}\right].$$

Acht und zwanzigste Vorlesung.

Über die Schwingungen gespannter Saiten.

In den Theilungspuncten eines in gleiche Theile getheilten biegsamen, elastischen, zwischen zwei fixen Puncten gespannten Fadens seyen gleiche Massen vereiniget, gegen welche die Masse des Fadens selbst als verschwindend betrachtet werden kann. Verschiebt man diesen Faden ein wenig aus der geradlinigen Lage, in welcher er sich im Zustande der Ruhe befindet, und überläßt man ihn sodann seiner Elasticität, so geräth er in eine schwingende Bewegung, deren Beschaffenheit wir in gegenwärtiger Vorlesung erörtern wollen.

Nehmen wir die Verbindungslinie der fixen Endpuncte des Fadens für die Axe der x an, und fassen wir irgend einen der auf demselben vorfindigen materiellen Puncte in das Auge, so haben wir, wenn wir die in der vorhergehenden Vorlesung gebrauchte Bezeichnung beibehalten, $b = o$, $c = o$, $\Delta b = o$, $\Delta c = o$, also $\Delta f = \Delta a$; ferner fallen die von H abhängenden Glieder, da außer der Elasticität F des Fadens keine anderen Kräfte in Betrachtung kommen, aus den dortigen Rechnungen weg: setzen wir nun noch $\frac{dF}{d\Delta f} = \frac{F'}{\Delta f}$, und bedenken wir, daß nunmehr Δf, mithin auch F und F' durch den Übergang von einer Masse zur andern nicht geändert wird, so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{m\Delta f}{F'}\frac{d^2\xi}{dt^2} - \Delta^2\xi_{-1} = o,$$

$$\frac{m\Delta f}{F}\frac{d^2 v}{dt^2} - \Delta^2 v_{-1} = o,$$

$$\frac{m\Delta f}{F}\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta^2 z_{-1} = o.$$

In denselben erscheinen die Variablen ξ, v, z gesondert, daher müssen die am Ende der vorhergehenden Vorlesung aufgestellten Formeln gebraucht werden. Diese geben uns

$$\xi = \mathfrak{S}\left[\frac{\mathfrak{X}\Sigma\mathfrak{X}\alpha}{\Sigma\mathfrak{X}^2}\cos.\,t\sqrt{\mu'} + \frac{\mathfrak{X}\Sigma\mathfrak{X}\bar{\alpha}}{\sqrt{\mu'}\,\Sigma\mathfrak{X}^2}\sin.\,t\sqrt{\mu'}\right],$$

$$v = \mathfrak{S}\left[\frac{\mathfrak{Y}\Sigma\mathfrak{Y}\beta}{\Sigma\mathfrak{Y}^2}\cos.\,t\sqrt{\mu''} + \frac{\mathfrak{Y}\Sigma\mathfrak{Y}\bar{\beta}}{\sqrt{\mu''}\,\Sigma\mathfrak{Y}^2}\sin.\,t\sqrt{\mu''}\right],$$

$$z = \mathfrak{S}\left[\frac{3\Sigma 3\gamma}{\Sigma 3^2} cos.\, t\sqrt{\mu'''} + \frac{3\Sigma 3\bar{\gamma}}{\sqrt{\mu'''}\Sigma 3^2} sin.\, t\sqrt{\mu'''}\right],$$

wobei die Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, μ', μ'', μ''' durch die Gleichungen

$$\frac{m\mu'\Delta f}{F'}\mathfrak{X} + \Delta^2\mathfrak{X}_{-1} = 0$$

$$\frac{m\mu''\Delta f}{F}\mathfrak{Y} + \Delta^2\mathfrak{Y}_{-1} = 0$$

$$\frac{m\mu'''\Delta f}{F}\mathfrak{Z} + \Delta^2\mathfrak{Z}_{-1} = 0$$

zu bestimmen sind. Die Gestalt der Integralien dieser Differenzengleichungen, welche uns $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ als Functionen des Stellenzeigers r des materiellen Punctes, auf den sich diese Größen beziehen, darbieten sollen, wird durch einen Blick auf die Formeln (34) der vierzigsten Vorlesung über die Analysis ersichtlich. Schreiben wir $\mathfrak{X}_r$ statt $\mathfrak{X}$, und setzen wir in Bezug auf die erste Gleichung

$$\mathfrak{X}_r = K\, sin.\, (r\eta + \varkappa),$$

wobei η, K und $\varkappa$ beständige Größen anzeigen, so haben wir, um η und $\varkappa$ zu bestimmen, wenn o und n + 1 die Zeiger des ersten und des letzten Punctes des Fadens sind, der Unbeweglichkeit dieser Puncte zu Folge, $\mathfrak{X}_0 = 0$ und $\mathfrak{X}_{n+1} = 0$, mithin $\varkappa = 0$ und $sin.\, (n+1)\eta = 0$. Die letztere Bedingung gibt uns, in so ferne ρ eine ganze Zahl anzeigt,

$$(n+1)\eta = \rho\pi \quad \text{oder} \quad \eta = \frac{\rho\pi}{n+1},$$

$$\text{daher ist} \quad \mathfrak{X}_r = K\, sin.\, r\frac{\rho\pi}{n+1}.$$

Derselbe Ausdruck stellt auch $\mathfrak{Y}_r$ und $\mathfrak{Z}_r$ dar.

Substituiren wir diesen Werth von $\mathfrak{X}_r$ in die Gleichung

$$\frac{m\mu'\Delta f}{F'}\mathfrak{X}_r + \Delta^2\mathfrak{X}_{r-1} = 0,$$

so finden wir wegen $\Delta r = 1$

$$\frac{m\mu'\Delta f}{F'} - 4\left(sin.\, \frac{\rho\pi}{2(n+1)}\right)^2 = 0,$$

$$\text{woraus} \quad \sqrt{\mu'} = 2\sqrt{\frac{F'}{m\Delta f}}\, .\, sin.\, \frac{\rho\pi}{2(n+1)}$$

folgt. Auf gleiche Weise ergibt sich

$$\sqrt{\mu''} = 2\sqrt{\frac{F}{m\Delta f}}\, .\, sin.\, \frac{\rho\pi}{2(n+1)} = \sqrt{\mu'''}.$$

Ferner ist, wenn wir der Kürze wegen η statt $\frac{\rho\pi}{n+1}$ schreiben:

$$\Sigma \mathfrak{X}^2 = K(\sin.\eta^2 + \sin.2\eta^2 + \sin.3\eta^2 + \ldots + \sin.n\eta^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}Kn - \tfrac{1}{2}K(\cos.2\eta + \cos.4\eta + \cos.6\eta + \ldots + \cos.2n\eta);$$

aber, wie die erste der in der zwanzigsten Vorlesung über die Analysis gefundenen Formeln (110) lehrt, wenn man daselbst $\alpha = \beta = 2\eta$ setzt, ist

$$\cos.2\eta + \cos.4\eta + \cos.6\eta + \ldots + \cos.2n\eta = \frac{\sin.n\eta\,\cos.(n+1)\eta}{\sin.\eta}$$
$$= \frac{\sin.(\rho\pi - \eta)\,.\,\cos.\rho\pi}{\sin.\eta} = -1,$$

$$\text{also}\quad \Sigma \mathfrak{X}^2 = K\frac{n+1}{2}.$$

Dieselben Werthe haben auch die Summen $\Sigma \mathfrak{Y}^2$, $\Sigma \mathfrak{Z}^2$.

Diese Formeln geben uns, wenn wir statt ρ nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 ... n setzen, so viele verschiedene Werthe für μ', μ'', μ''', oder vielmehr für $\sqrt{\mu'}$, $\sqrt{\mu''}$, $\sqrt{\mu'''}$, als sich bewegliche Massen auf dem Faden befinden; und diese Werthe stellen, da sie für $\rho = n+2, n+3, \ldots$ wieder zurückkehren, sämmtliche Wurzeln der Gleichungen für μ', μ'', μ''' dar.

Hiedurch erhalten wir endlich

$$\xi_r = \mathfrak{S}\left[\frac{2\sin.r\frac{\rho\pi}{n+1}\,\Sigma\alpha_s\sin.s\frac{\rho\pi}{n+1}}{n+1}\cos.\left(t\sqrt{\frac{F'}{m\Delta f}}.\sin.\frac{\rho\pi}{2(n+1)}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\sin.r\frac{\rho\pi}{n+1}\,\Sigma\bar{\alpha}_s\sin.s\frac{\rho\pi}{n+1}}{(n+1)\sqrt{\frac{F'}{m\Delta f}}\sin.\frac{\rho\pi}{2(n+1)}}\sin.\left(t\sqrt{\frac{F'}{m\Delta t}}.\sin.\frac{\rho\pi}{2(n+1)}\right)\right]$$

wobei die Summirung in Bezug auf das Zeichen Σ bewerkstelliget wird, wenn man statt s, und die Summirung in Bezug auf das Zeichen $\mathfrak{S}$, wenn man statt ρ die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... n setzt. Für v_r und z bestehen ähnliche Ausdrücke, nur muß man F' mit F, und α, $\bar{\alpha}$ mit β, $\bar{\beta}$ und γ, $\bar{\gamma}$ verwechseln.

Das Gesetz, nach welchem sich ξ_r mit t zugleich ändert, stellt die Excursionen des r^{ten} Theilungspunctes des Fadens nach der Länge desselben, oder die longitudinalen Schwingungen dar; durch v_r und z_r lernt man die darauf senkrechte Bewegung, oder die transversalen Schwingungen des Fadens kennen.

Setzt man den Faden über seine fixen Endpuncte hinaus fort, was dadurch bewirkt wird, daß man dem Zeiger r negative Werthe oder solche, welche $n + 1$ übersteigen, beilegt, so überzeugt man sich durch die Form des Ausdruckes für ξ_r mit leichter Mühe, daß dabei im Allgemeinen, w mag was immer für eine ganze Zahl bedeuten, sowohl

$$\xi_{2w(n+1) \pm r} = \pm \xi_r$$

wie auch
$$\frac{d\xi_{2w(n+1) \pm r}}{dt} = \pm \frac{d\xi_r}{dt}$$

wird, und dieselbe Eigenschaft auch den Variablen v_r und z_r zukommt. Befinden sich also auf einem gespannten, biegsamen, elastischen Faden in gleichen Abständen gleiche Massen, und wird der Faden, während man zwei dieser Massen festhält, in eine schwingende Bewegung versetzt, so theilt er sich in mehrere, abwechselnd nach entgegengesetzten Richtungen, und überhaupt auf eine gleiche aber durchgehends entgegengesetzte Weise schwingende Theile, deren jeder dem zwischen den fixen Massen enthaltenen Theile gleich ist, und deren Grenzpuncte in Ruhe bleiben.

Läßt man die Anzahl der auf einem bestimmten Stücke des Fadens vertheilten Massen unendlich wachsen, so nähert sich derselbe ohne Ende einer gleichförmig dichten Saite, deren Schwingungsgesetze demnach mit den so eben erörterten übereinkommen. Wir wollen uns jedoch hier nicht darauf einlassen, die für den letztern Fall geltenden Formeln aus den obigen abzuleiten, sondern ziehen es vor, die Bewegungsgesetze eines in jedem Puncte von beliebigen Kräften afficirten Fadens auf directem Wege aufzusuchen.

Es seyen X, Y, Z die am Ende der Zeit t auf den Punct x, y, z eines vollkommen biegsamen Fadens wirkenden Kräfte, ferner μ und λ die Dichte und die Spannung desselben im genannten Puncte, so haben wir für die Bewegung desselben die Gleichung

$$\int \Big[\Big(\Big(X - \frac{d^2x}{dt^2}\Big) \delta x + \Big(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\Big) \delta y + \Big(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\Big) \delta z \Big) \mu ds + \lambda \delta ds \Big] = 0,$$

woraus wegen

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

nach gehöriger Entwickelung des Integrals $\int \lambda \delta ds$

$$\lambda_2 \frac{dx_2}{ds_2} \delta x_2 + \lambda_2 \frac{dy_2}{ds_2} \delta y_2 + \lambda_2 \frac{dz_2}{ds_2} \delta z_2$$
$$- \lambda_1 \frac{dx_1}{ds_1} \delta x_1 - \lambda_1 \frac{dy_1}{ds_1} \delta y_1 - \lambda_1 \frac{dz_1}{ds_1} \delta z_1$$
$$+ \int \Big[\left(\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \mu ds - d . \frac{\lambda dx}{ds} \right) \delta x + \left(\left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \mu ds - d . \frac{\lambda dy}{ds} \right) \delta y$$
$$+ \left(\left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \mu ds - d . \frac{\lambda dz}{ds} \right) \delta z \Big] = 0$$

folgt, in welcher Gleichung sich die mit dem Zeiger 1 versehenen Glieder auf den Anfangspunct, und die mit dem Zeiger 2 versehenen auf den Endpunct eines bestimmten Fadenstückes beziehen.

Wir haben daher die Gleichungen

$$\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \mu ds - d . \frac{\lambda dx}{ds} = 0,$$
$$\left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \mu ds - d . \frac{\lambda dy}{ds} = 0,$$
$$\left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \mu ds - d . \frac{\lambda dz}{ds} = 0,$$

welche uns in den Fällen, in welchen wir ihre Integration in unserer Gewalt haben, die Gestalt des Fadens und den Werth von λ in jedem Puncte desselben für das Ende der Zeit t geben, wozu sich noch für die Endpuncte desselben die Gleichungen

$$\frac{\lambda_1 dx_1}{ds_1} \delta x_1 + \frac{\lambda_1 dy_1}{ds_1} \delta y_1 + \frac{\lambda_1 dz_1}{ds_1} \delta z_1 = 0$$
$$\frac{\lambda_2 dx_2}{ds_2} \delta x_2 + \frac{\lambda_2 dy_2}{ds_2} \delta y_2 + \frac{\lambda_2 dz_2}{ds_2} \delta z_2 = 0$$

gesellen. Sind beide Endpuncte des Fadens fix, so ist $\delta x_1 = 0$, $\delta y_1 = 0$, $\delta z_1 = 0$, $\delta x_2 = 0$, $\delta y_2 = 0$, $\delta z_2 = 0$, und es bestehen daher die beiden letzteren Gleichungen, ohne daß daraus eine neue Bedingung entspringt. Wir machen noch darauf aufmerksam, daß bei der Bildung der Differenzialquotienten $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, die Zeit t als constant betrachtet werden muß, da sich diese Differenzialquotienten auf den bloßen Übergang von einem Puncte zu einem andern in derselben Curve beziehen.

Nehmen wir nun, außer der so eben erwähnten Voraussetzung, den Faden für gleichförmig dicht an, so daß μ constant ist; lassen wir ferner auf denselben außer der Elasticität keine andere continuirliche Kraft wirken; endlich seine Abweichung von der Geraden, welche er im

Zustande der Ruhe vermöge seiner Elasticität darstellt, äußerst gering seyn, und jeden Punct des Fadens während seiner Bewegung in einer auf die genannte Gerade senkrechten Ebene bleiben: so können wir, in so ferne wir diese Gerade als die Axe der x betrachten, $ds = dx$ und $\frac{d^2 x}{d t^2} = 0$ setzen. Da nun auch $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ ist, so gibt uns die erste der obigen Differenzialgleichungen

$$d \,.\, \lambda = 0, \quad \text{d. h.} \quad \lambda = -F,$$

wobei F eine constante Größe vorstellt, und die beiden anderen Gleichungen gehen in

$$\frac{d^2 y}{d t^2} - \frac{F}{\mu} \cdot \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 z}{d t^2} - \frac{F}{\mu} \cdot \frac{d \frac{dz}{dx}}{dx} = 0,$$

oder, wenn wir bei dem Differenziren dx als constant behandeln, in

$$\frac{d^2 y}{d t^2} - \frac{F}{\mu} \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{d t^2} - \frac{F}{\mu} \cdot \frac{d^2 z}{d x^2} = 0$$

über.

Es wird hinreichend seyn, zu zeigen, wie eine dieser zwei Gleichungen, z. B. die erste, integrirt werden muß, und welche Folgerungen sich aus dem Integrale ergeben, da ein Gleiches auch von der zweiten Gleichung, deren Form mit jener der ersten genau übereinstimmt, gilt, wenn man y mit z verwechselt.

Die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d t^2} - \frac{F}{\mu} \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = 0$$

gibt uns y als eine Function von t und x; setzen wir nun

$$\frac{dy}{dt} = p, \quad \frac{dy}{dx} = q \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{dt\, dx} = r,$$

so haben wir

$$dp = \frac{d^2 y}{d t^2} dt + r dx, \quad dq = r dt + \frac{d^2 y}{d x^2} dx,$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{dp - r dx}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{dq - r dt}{dx};$$

und wenn wir diese Ausdrücke in obige Differenzialgleichung einführen,

$$\frac{dp - r dx}{dt} - \frac{F}{\mu} \cdot \frac{dq - r dt}{dx} = 0$$

oder $dp\, dx - \frac{F}{\mu} dq\, dt = r\left(dx^2 - \frac{F}{\mu} dt^2\right)$.

Um dieser Gleichung Genüge zu leisten, sey

$$dx^2 - \frac{F}{\mu}\,dt^2 = 0,$$

$$dp\,dx - \frac{F}{\mu}\,dq\,dt = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$dx = dt\,.\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{und} \quad x - t\sqrt{\frac{F}{\mu}} = Const.,$$

wodurch sich aus der zweiten

$$dp - dq\sqrt{\frac{F}{\mu}} = 0, \quad \text{das ist} \quad p - q\sqrt{\frac{F}{\mu}} = Const.$$

ergibt; es ist daher

$$p - q\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \Phi\left(x - t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right)$$

das erste Integral der vorgelegten Differenzialgleichung, worin Φ eine willkürliche Function anzeigt.

Wir haben $dy = p\,dt + q\,dx$, also

$$q = \frac{dy - p\,dt}{dx};$$

substituiren wir diesen Ausdruck in das so eben gefundene Integral, so erhalten wir

$$p\left(dx + dt\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) = dy\sqrt{\frac{F}{\mu}} + dx\,\Phi\left(x - t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right),$$

welche Gleichung in

$$dx + dt\sqrt{\frac{F}{\mu}} = 0$$

$$\text{und} \quad dy\sqrt{\frac{F}{\mu}} + dx\,\Phi\left(x - t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) = 0$$

zerfällt. Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$x + t\sqrt{\frac{F}{\mu}} = Const.,$$

und aus der zweiten, wenn man die erste mit ihr verbindet,

$$dy - dt\,\Phi\left(Const. - 2t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) = 0.$$

Integrirt man hier, so hat man

$$y - \psi\left(Const. - 2t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) = Const.$$

$$\text{oder} \quad y - \psi\left(x - t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) = Const.,$$

mithin ist

$$y - \psi\left(x - t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) = \varphi\left(x + t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right)$$

$$\text{oder} \quad y = \varphi\left(x + t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) + \psi\left(x - t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right)$$

das vollständige Integral der obigen Differenzialgleichung, worin φ und ψ willkürliche Functionen anzeigen.

Wir bemerken hier, daß, wenn a die Länge des schwingenden Fadens (der Saite), und M die Masse desselben (derselben) bedeuten, $\mu = \frac{M}{a}$ ist. Wird der Faden (die Saite) durch ein Gewicht gespannt, so kömmt F diesem Gewichte gleich.

Aus dem so eben gefundenen Integrale folgt, wenn wir im Allgemeinen

$$\frac{d\varphi(u)}{du} = \varphi_1(u) \quad \text{und} \quad \frac{d\psi(u)}{du} = \psi_1(u) \quad \text{setzen:}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left[\varphi_1\left(x + t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) - \psi_1\left(x - t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right)\right]\sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Ertheilt man der Saite am Anfange ihrer Bewegung keine Geschwindigkeit, so verschwindet $\frac{dy}{dt}$ für $t = 0$, mithin ist

$$\varphi_1(x) - \psi_1(x) = 0,$$

$$\text{d. h.} \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d\psi(x)}{dx}$$

$$\text{und} \quad \varphi(x) = \psi(x) + Const.$$

Wegen der Unbestimmtheit der Formen beider Functionen können wir hier offenbar die Constante weglassen, und

$$\varphi(x) = \psi(x)$$

setzen: dadurch wird

$$y = \varphi\left(x + t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) + \varphi\left(x - t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right).$$

Dieß heißt eben so viel, als die etwa vorhandene Constante unter beide Glieder dieses Ausdruckes zu gleichen Theilen vertheilen.

Da die Grenzpuncte des Fadens während der ganzen Bewegung desselben fix bleiben, so muß, wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten in den Anfangspunct des Fadens versetzen, y sowohl für $x = 0$ als auch für $x = a$ bei jedem Werthe von t verschwinden, d. h. es

muß im Allgemeinen

$$\varphi(u) = -\varphi(-u)$$

$$\text{und} \quad \varphi(a+u) = -\varphi(a-u)$$

seyn. Schreiben wir in der letzteren Gleichung $a+u$ statt u, so erhalten wir

$$\varphi(2a+u) = -\varphi(-u),$$

$$\text{also} \quad \varphi(2a+u) = \varphi(u).$$

Hieraus folgt wieder

$$\varphi(4a+u) = \varphi(u), \quad \varphi(6a+u) = \varphi(u), \quad \text{etc.}$$

Eben so erhält man

$$\varphi(a+u) = \varphi(3a+u) = \varphi(5a+u) = \ldots = -\varphi(a-u),$$

woraus hervorgeht, daß die schwingende Saite sich in gleiche, aber entgegengesetzt angeordnete Parthien theilt.

Setzen wir $a\sqrt{\frac{\mu}{F}}+t$ statt t, und bezeichnen wir den dazu gehörigen Werth von y durch y', so ergibt sich

$$y' = \varphi\left(a+x+t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right)+\varphi\left(x-a-t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right)$$

$$= -\varphi\left(x+t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right)-\varphi\left(x-t\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) = -y.$$

Es ist also die Anordnung der Saite nach Verlauf der Zeit $a\sqrt{\frac{\mu}{F}}$ derjenigen gerade entgegengesetzt, welche am Anfange dieser Zeit Statt fand, so daß die Saite in zwei um das Zeitintervall $2a\sqrt{\frac{\mu}{F}}$ von einander abstehenden Augenblicken dieselbe Lage hat, d. h. es ist $2a\sqrt{\frac{\mu}{F}}$ die Dauer einer vollen Schwingung der Saite.

Neun und zwanzigste Vorlesung.

Über die Bewegung eines flüssigen Körpers.

Es seyen x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punctes einer in Bewegung befindlichen Flüssigkeit am Ende der Zeit t; X, Y, Z die an demselben parallel zu den Axen der x, y, z während des Zeittheilchens dt thätigen Kräfte; μ die dem genannten Puncte entsprechende Dichtigkeit des flüssigen Körpers, d. h. die Dichtigkeit des im Raume $dx\,dy\,dz$ enthaltenen Theilchens desselben; endlich λ der Druck, welchen dieses Theilchen von der umgebenden Flüssigkeit erleidet, so besteht die Gleichung

$$(1)\int\!\!\int\!\!\int\Big[\Big(\Big(X-\frac{d^2x}{dt^2}\Big)\delta x+\Big(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\Big)\delta y+\Big(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\Big)\delta z\Big)\mu dxdydz + \lambda\delta(dx\,dy\,dz)\Big]=0,$$

aus welcher, wenn wir, den in der dreizehnten Vorlesung vorgetragenen Lehren gemäß,

$$(2)\qquad \delta(dx\,dy\,dz) = dx\,dy\,dz\left(\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right)$$

setzen, für jeden Punct im Innern der Flüssigkeit die Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{aligned} \mu\Big(X-\frac{d^2x}{dt^2}\Big)-\frac{d\lambda}{dx}&=0\\ \mu\Big(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\Big)-\frac{d\lambda}{dy}&=0\\ \mu\Big(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\Big)-\frac{d\lambda}{dz}&=0 \end{aligned}$$

folgen. Zu denselben kommt noch eine Bedingungsgleichung hinzu, welche sich aus dem Umstande ergibt, daß die Masse des Theilchens $\mu\,dx\,dy\,dz$ während der Bewegung des flüssigen Körpers nicht geändert werden kann. Sie ist

$$\frac{d(\mu\,dx\,dy\,dz)}{dt}=0$$

oder $$\frac{d\mu}{dt}\,dx\,dy\,dz+\mu\frac{d(dx\,dy\,dz)}{dt}=0.$$

Aber aus demselben Grunde, aus welchem die Gleichung (2) Statt findet, ist auch

$$\frac{d(dx\,dy\,dz)}{dt} = dx\,dy\,dz\left(\frac{d\frac{dx}{dt}}{dx} + \frac{d\frac{dy}{dt}}{dy} + \frac{d\frac{dz}{dt}}{dz}\right),$$

daher können wir der obigen Bedingungsgleichung die Gestalt

$$(4) \qquad \frac{d\mu}{dt} + \mu\left(\frac{d\frac{dx}{dt}}{dx} + \frac{d\frac{dy}{dt}}{dy} + \frac{d\frac{dz}{dt}}{dz}\right) = 0 \quad \text{geben.}$$

Die Coordinaten x, y, z eines Punctes der Flüssigkeit am Ende der Zeit t sind offenbar Functionen der Coordinaten desselben am Anfange dieser Zeit, welche letzteren Coordinaten wir durch a, b, c andeuten wollen, und der Variablen t; es bietet sich daher die Forderung dar, aus den Gleichungen (3) andere abzuleiten, in welchen statt der partiellen Differenzialquotienten $\frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{d\lambda}{dy}$, $\frac{d\lambda}{dz}$, die auf a, b, c sich beziehenden $\frac{d\lambda}{da}$, $\frac{d\lambda}{db}$, $\frac{d\lambda}{dc}$ erscheinen. Stellen wir uns zu diesem Ende λ durch x, y, z, t ausgedrückt vor, und bedenken wir, daß die genannten partiellen Differenzialquotienten durch die Verschiedenheit des Druckes, welchen die verschiedenen Theilchen der Flüssigkeit in einem und demselben Augenblicke, nämlich am Ende der Zeit t auszuhalten haben, bedingt werden, und daß deßhalb bei der Bildung derselben t als constant zu betrachten ist, so gelten die Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{d\lambda}{da} &= \frac{d\lambda}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{d\lambda}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{d\lambda}{dz}\frac{dz}{da}, \\ \frac{d\lambda}{db} &= \frac{d\lambda}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{d\lambda}{dy}\frac{dy}{db} + \frac{d\lambda}{dz}\frac{dz}{db}, \\ \frac{d\lambda}{dc} &= \frac{d\lambda}{dx}\frac{dx}{dc} + \frac{d\lambda}{dy}\frac{dy}{dc} + \frac{d\lambda}{dz}\frac{dz}{dc}. \end{aligned}$$

Addiren wir nun die Gleichungen (3), nachdem wir dieselben der Reihe nach ein Mal mit $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dz}{da}$; das zweite Mal mit $\frac{dx}{db}$, $\frac{dy}{db}$, $\frac{dz}{db}$; und das dritte Mal mit $\frac{dx}{dc}$, $\frac{dy}{dc}$, $\frac{dz}{dc}$ multiplicirt haben, so finden wir, mit Rücksicht auf die Gleichungen (5),

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\mu\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx}{da}+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dy}{da}+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dz}{da}\right]-\frac{d\lambda}{da}=0, \\ &\mu\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx}{db}+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dy}{db}+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dz}{db}\right]\quad\frac{d\lambda}{db}=0, \\ &\mu\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx}{dc}+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dy}{dc}+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dz}{dc}\right]-\frac{d\lambda}{dc}=0. \end{aligned}$$

Um diese Gleichungen unmittelbar aus (1) zu erhalten, muß man nebst (5) noch die Gleichungen

$$\delta x = \frac{dx}{da}\delta a + \frac{dx}{db}\delta b + \frac{dx}{dc}\delta c$$

$$\delta y = \frac{dy}{da}\delta a + \frac{dy}{db}\delta b + \frac{dy}{dc}\delta c$$

$$\delta z = \frac{dz}{da}\delta a + \frac{dz}{db}\delta b + \frac{dz}{dc}\delta c$$

zu Hülfe nehmen.

Um in der Gleichung (4) partielle Differenzialquotienten, welche sich auf a, b, c beziehen, an die Stelle der dort vorhandenen zu bringen, bedienen wir uns der Gleichungen

$$\frac{d\frac{dx}{dt}}{dx} = \frac{d\frac{dx}{dt}}{da}\frac{da}{dx} + \frac{d\frac{dx}{dt}}{db}\frac{db}{dx} + \frac{d\frac{dx}{dt}}{dc}\frac{dc}{dx}$$

$$= \frac{d^2x}{da\,dt}\frac{da}{dx} + \frac{d^2x}{db\,dt}\frac{db}{dx} + \frac{d^2x}{dc\,dt}\frac{dc}{dx},$$

$$\frac{d\frac{dy}{dt}}{dy} = \frac{d^2y}{da\,dt}\frac{da}{dy} + \frac{d^2y}{db\,dt}\frac{db}{dy} + \frac{d^2y}{dc\,dt}\frac{dc}{dy},$$

$$\frac{d\frac{dz}{dt}}{dz} = \frac{d^2z}{da\,dt}\frac{da}{dz} + \frac{d^2z}{db\,dt}\frac{db}{dz} + \frac{d^2z}{dc\,dt}\frac{dc}{dz},$$

bei deren Bildung $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ durch a, b, c, und a, b, c durch x, y, z ausgedrückt gedacht wurden. Nun ist, in so ferne man x, y, z als Functionen von a, b, c, t ansieht, und bei dem Differenziren t als constant behandelt,

$$(7)\qquad dx = \frac{dx}{da}da + \frac{dx}{db}db + \frac{dx}{dc}dc,$$

$$dy = \frac{dy}{da}da + \frac{dy}{db}db + \frac{dy}{dc}dc,$$

$$dz = \frac{dz}{da}da + \frac{dz}{db}db + \frac{dz}{dc}dc,$$

woraus, wenn man der Kürze wegen

$$(8)\quad \alpha_1 = \frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} - \frac{dy}{dc}\frac{dz}{db}\ \Big|\ \beta_1 = \frac{dx}{dc}\frac{dz}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dz}{dc}\ \Big|\ \gamma_1 = \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}$$

$$\alpha_2 = \frac{dy}{dc}\frac{dz}{da} - \frac{dz}{da}\frac{dy}{dc}\ \Big|\ \beta_2 = \frac{dx}{da}\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{dc}\frac{dz}{da}\ \Big|\ \gamma_2 = \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da} - \frac{dz}{da}\frac{dy}{dc}$$

$$\alpha_3 = \frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\ \Big|\ \beta_3 = \frac{dx}{db}\frac{dz}{da} - \frac{dz}{da}\frac{dx}{db}\ \Big|\ \gamma_3 = \frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}$$

und

$$(9)\quad \theta = \frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{da} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\frac{dz}{da}$$ setzt,

$$da = \frac{\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz}{\theta}$$
$$db = \frac{\beta_1 dx + \beta_2 dy + \beta_3 dz}{\theta}$$
$$dc = \frac{\gamma_1 dx + \gamma_2 dy + \gamma_3 dz}{\theta}$$

gefunden wird. Diese Ausdrücke geben uns die Werthe der partiellen Differenzialquotienten von a, b, c in Bezug auf die Veränderlichkeit von x, y, z, in so ferne wir die ersteren Größen durch die letzteren ausgedrückt annehmen. Es ist nämlich

$$\frac{da}{dx} = \frac{\alpha_1}{\theta},\quad \frac{db}{dx} = \frac{\beta_1}{\theta},\quad \frac{dc}{dx} = \frac{\gamma_1}{\theta},$$
$$\frac{da}{dy} = \frac{\alpha_2}{\theta},\quad \frac{db}{dy} = \frac{\beta_2}{\theta},\quad \frac{dc}{dy} = \frac{\gamma_2}{\theta},$$
$$\frac{da}{dz} = \frac{\alpha_3}{\theta},\quad \frac{db}{dz} = \frac{\beta_3}{\theta},\quad \frac{dc}{dz} = \frac{\gamma_3}{\theta},$$

daher erhalten wir

$$\frac{d\frac{dx}{dt}}{dx} + \frac{d\frac{dy}{dt}}{dy} + \frac{d\frac{dz}{dt}}{dz} = \frac{1}{\theta}\Big(\alpha_1\frac{d^2x}{da\,dt} + \beta_1\frac{d^2x}{db\,dt} + \gamma_1\frac{d^2x}{dc\,dt} + \alpha_2\frac{d^2y}{da\,dt} + \beta_2\frac{d^2y}{db\,dt} + \gamma_2\frac{d^2y}{dc\,dt} + \alpha_3\frac{d^2z}{da\,dt} + \beta_3\frac{d^2z}{db\,dt} + \gamma_3\frac{d^2z}{dc\,dt}\Big).$$

Der Ausdruck, welcher sich rechter Hand des Gleichheitszeichens innerhalb der Klammern befindet, ist, wie man leicht sieht, das Differenzial des Ausdruckes θ in Bezug auf t; so daß sich mit Hülfe aller hier erhaltenen Resultate die Gleichung (4) in

$$\theta\frac{d\mu}{dt} + \mu\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d.\mu\theta}{dt} = 0$$

verwandelt, woraus zunächst erhellet, daß $\mu\theta$ bloß eine Function von a, b, c, nicht aber von t ist. Es reicht daher hin, den Werth dieses Productes für irgend eine Zeit zu kennen, um denselben vollkommen zu bestimmen. Für $t = 0$ ist offenbar $x = a$, $y = b$, $z = c$,

mithin $\frac{dx}{da} = 1$, $\frac{dy}{db} = 1$, $\frac{dz}{dc} = 1$ und

$$\frac{dx}{db} = \frac{dx}{dc} = \frac{dy}{da} = \frac{dy}{dc} = \frac{dz}{da} = \frac{dz}{db} = 0,$$

folglich $\theta = 1$;

bezeichnen wir nun den Werth von μ am Anfange der Zeit t durch H, so haben wir $\mu\theta = H$ oder $\theta = \frac{H}{\mu}$, und es tritt dem zu Folge die Gleichung

$$(10)\quad \frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{da} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\frac{dz}{da} = \frac{H}{\mu}$$

an die Stelle der Gleichung (4).

Man gelangt zu der Gleichung (10) auch, wenn man die Masse $\mu dx dy dz$ eines Theilchens der Flüssigkeit am Ende der Zeit t der Masse $H da db dc$ desselben Theilchens am Anfange der genannten Zeit gleich setzt. Da bei der Bildung des Productes $dx dy dz$, x und y constant sind, während z sich um das Differenzial dz ändert, so seyen in (7) dx und dy gleich Null, oder

$$\frac{dx}{da}da + \frac{dx}{db}db + \frac{dx}{dc}dc = 0,$$

$$\frac{dy}{da}da + \frac{dy}{db}db + \frac{dy}{dc}dc = 0;$$

es ergibt sich hiedurch

$$da = \frac{\gamma_1}{\gamma_3}dc \quad \text{und} \quad db = \frac{\gamma_2}{\gamma_3}dc,$$

und wenn wir diese Werthe von da und db in den Ausdruck für dz, wie er in (7) steht, einführen,

$$dz = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_3}\frac{dz}{da} + \frac{\gamma_2}{\gamma_3}\frac{dz}{db} + \frac{dz}{dc}\right)dc.$$

Um dy zu finden, muß sowohl dx als dz gleich Null angenommen werden; d. h. es muß $dc = 0$ und

$$\frac{dx}{da}da + \frac{dx}{db}db = 0$$

seyn, woraus

$$dy = \frac{\gamma_3 db}{\frac{dx}{da}}$$

folgt. Endlich, um dx zu erhalten, sey $dy = o$, $dz = o$, d. h. $db = o$, $dc = o$, wodurch sich

$$dx = \frac{dx}{da}\, da$$

ergibt. Es ist demnach

$$dx\, dy\, dz = \left(\gamma_1 \frac{dz}{da} + \gamma_2 \frac{dz}{db} + \gamma_3 \frac{dz}{dc}\right) da\, db\, dc, \text{ d. h.}$$

(11) $$dx\, dy\, dz = \theta\, da\, db\, dc \text{ *)},$$

also $\mu\theta\, da\, db\, dc = H\, da\, db\, dc$ oder $\theta = \frac{H}{\mu}$, wie oben.

Die Gleichungen (6) und (10) sind, sobald ihre Integration angeht, zur Berechnung der Bewegung des flüssigen Körpers hinreichend. Denn ist dieser Körper ein unzusammendrückbarer, so bleibt für jedes einzelne Theilchen die Dichtigkeit μ während der ganzen Bewegung dieselbe, und ändert sich höchstens bei dem Übergange von einem Theilchen auf das andere; d. h. es ist $\frac{d\mu}{dt} = o$ (wodurch auch das erste Glied der Gleichung (4) wegfällt) und $\mu = H$, wodurch sich die Gleichung (10) auf

(12) $$\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{da} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\frac{dz}{da} = 1$$

reducirt. Wird diese Gleichung mit (6) verbunden, so sind die Größen

---

*) Diese Formel leistet bei der Transformation der Coordinaten, und überhaupt bei der Einführung neuer independenter Variablen a, b, c in die Rechnung statt der vorigen x, y, z, gute Dienste. So ist z. B. in Bezug auf das gewöhnliche rechtwinklige Coordinatensystem $dx\,dy\,dz$ der Ausdruck des Differenzials des Volums jedes Körpers; im Polarcoordinatensystem, worin r den Radiusvector, n den Winkel zwischen r und der Polaraxe, und ω die Neigung der Ebene des Winkels n gegen die Basis anzeigt, ist das Differenzial des Volums bekanntlich $= r^2 \sin. n\, dr\, dn\, d\omega$. Setzen wir nun, indem wir den Pol des letzteren Systems als den Anfangspunct, die Polaraxe als die Axe der x, und die Basis als die Ebene xy eines rechtwinkligen Systems betrachten,

$$x = r \cos. n, \quad y = r \sin. n \cos. \omega, \quad z = r \sin. n \sin. \omega,$$

und vertauschen wir in der Formel (9) die Buchstaben a, b, c mit r, n, ω, so finden wir nach einer leichten Rechnung $\theta = r^2 \sin. n$, mithin ist

$$dx\, dy\, dz = r^2 \sin. n\, dr\, dn\, d\omega.$$

x, y, z, λ durch a, b, c, t bestimmbar. Die Rechnung wird vereinfacht, wenn die unzusammendrückbare Flüssigkeit gleichförmig dicht ist, weil in diesem Falle μ auch nicht von a, b, c abhängt. Soll ferner die Bewegung einer ausdehnsamen Flüssigkeit der Rechnung unterworfen werden, so muß noch die zwischen λ, welche Größe der Expansivkraft der Flüssigkeit gleich kommt, und der Dichtigkeit μ bestehende Relation gegeben seyn. Man setzt bei den Anwendungen des Calculs auf die in der Natur vorfindigen ausdehnsamen Flüssigkeiten $\lambda = \varkappa\mu$, wobei $\varkappa$ einen von μ unabhängigen Coefficienten vorstellt. Hier kann $\varkappa$ immerhin eine gegebene Function anderer mit a, b, c, t zugleich sich ändernder Größen seyn, nur muß man die zwischen diesen Größen und a, b, c, t obwaltende Verbindung kennen.

Aber selbst in den einfachsten Fällen ist die Behandlung der oben aufgestellten Differenzialgleichungen mit so großen Schwierigkeiten verknüpft, daß es wünschenswerth ist, denselben eine etwas weniger complicirte Gestalt zu ertheilen.

Man erreicht diesen Zweck, wenn man in die Gleichungen (3) statt der veränderlichen, dem Ende der Zeit t correspondirenden Coordinaten x, y, z eines bestimmten Theilchens der Flüssigkeit, die Geschwindigkeiten, welche dieses Theilchen in dem genannten Augenblicke nach den Richtungen der x, y, z besitzt, einführt, und (weil es zur Kenntniß des Zustandes einer Flüssigkeit am Ende einer gegebenen Zeit hinreicht, die Geschwindigkeit des in diesem Augenblicke an einem festgesetzten Orte im Raume befindlichen Theilchens der Größe und Richtung nach zu kennen, ohne die vorhergehenden Zustände desselben Theilchens in Erwägung zu ziehen) diese Geschwindigkeiten vor der Hand als Functionen von x, y, z, t betrachtet.

Hat man die Differenzialquotienten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ durch x, y, z, t ausgedrückt, so ist es immer möglich, x, y, z durch a, b, c, t darzustellen. Denn setzt man

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

so hat man

$$dx = u\,dt, \quad dy = v\,dt, \quad dz = w\,dt. \tag{13}$$

Integrirt man diese Gleichungen dergestalt, daß für $t = 0$ die Variablen x, y, z in a, b, c übergehen, so ergeben sich drei Glei-

chungen zwischen x, y, z, a, b, c, t, welche x, y, z durch a, b, c, t anzugeben gestatten.

Die in den Gleichungen (3) vorkommenden Differenzialquotienten $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ entstehen offenbar, wenn man die Größen u, v, w dergestalt differenzirt, daß alle denselben zum Grunde liegenden Variablen, welche von t abhängen, geändert werden. Sieht man nun u, v, w als Functionen von x, y, z, t an, und versteht man unter $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ bloß die Differenzialquotienten, welche sich ergeben, indem man u, v, w nur in so fern in Hinsicht auf t differenzirt, als diese Veränderliche in den Ausdrücken für u, v, w unmittelbar enthalten ist, so muß man in (3) an die Stelle von

$$\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

die Ausdrücke

$$\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}$$

setzen. Hiedurch erhält man die Gleichungen

$$(14)\quad \mu\left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} - X\right) + \frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

$$\mu\left(\frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} - Y\right) + \frac{d\lambda}{dy} = 0,$$

$$\mu\left(\frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz} - Z\right) + \frac{d\lambda}{dz} = 0.$$

Die Gleichung (4) gibt, weil jetzt

$$\frac{d\mu}{dt} + u\frac{d\mu}{dx} + v\frac{d\mu}{dy} + w\frac{d\mu}{dz}$$

an die Stelle von $\frac{du}{dt}$ kömmt,

$$\frac{d\mu}{dt} + u\frac{d\mu}{dx} + v\frac{d\mu}{dy} + w\frac{d\mu}{dz} + \mu\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0$$

oder

$$(15)\qquad \frac{d\mu}{dt} + \frac{d(\mu u)}{dx} + \frac{d(\mu v)}{dy} + \frac{d(\mu w)}{dz} = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt für unzusammendrückbare Flüssigkeiten in die zwei Gleichungen

$$(16) \qquad \frac{d\mu}{dt} + u\frac{d\mu}{dx} + v\frac{d\mu}{dy} + w\frac{d\mu}{dz} = 0$$

$$\text{und} \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

wovon, wenn die bewegte Flüssigkeit gleichförmig dicht ist, bloß die zweite übrig bleibt.

Es sind daher in allen Fällen die zur vollständigen Auflösung des vorgelegten Problems nöthigen Differenzialgleichungen vorhanden.

Bei der Bestimmung der in den Integralien dieser Differenzialgleichungen enthaltenen willkürlichen Functionen muß man den Zustand der Flüssigkeit am Anfange der Zeit t oder in irgend einem anderen Augenblicke kennen und gehörig berücksichtigen.

Übrigens ist leicht einzusehen, daß λ für alle Puncte eines freien Theiles der Oberfläche der Flüssigkeit verschwindet. Auch kann man, wie es in der vierzehnten Vorlesung geschehen ist, nachweisen, daß die in der Formel (1) nach gehöriger Rechnung vor das dreifache Integralzeichen gebrachten Glieder sich wegen der Begrenzung der Flüssigkeit durch eine feste Wand aufheben, ohne daß daraus irgend eine neue Bedingung entspringt.

Dreißigste Vorlesung.

Über die Bewegung eines flüssigen Körpers.

(Fortsetzung.)

Da die Integration der allgemeinen Differenzialgleichungen der Bewegung eines flüssigen Körpers die Kräfte der bis jetzt bekannten Methoden der Analysis übersteigt, so sind wir genöthiget, uns auf die Behandlung einiger Fälle zu beschränken, in welchen die Rechnung mit weniger Schwierigkeiten verknüpft ist.

Um zur Kenntniß dieser Fälle zu gelangen, multipliciren wir die Gleichungen (14) der Reihe nach mit dx, dy, dz, und theilen die Summe der Producte durch μ, so erhalten wir

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{d\lambda}{dx}dx + \frac{d\lambda}{dy}dy + \frac{d\lambda}{dz}dz\right) =$$

$$= \left(X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}\right)dx$$

$$+ \left(Y - \frac{dv}{dt} - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz}\right)dy$$

$$+ \left(Z - \frac{dw}{dt} - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz}\right)dz.$$

Hier werden λ, u, v, w als Functionen von x, y, z, t betrachtet, und μ ist für eine gleichförmig dichte unzusammendrückbare Flüssigkeit constant, und für eine expansible Flüssigkeit eine Function von λ und t; man kann daher in beiden Fällen den Ausdruck linker Hand des Gleichheitszeichens als das vollständige Differenzial einer Function von x, y, z, t in Bezug auf die Variabilität der ersteren drei Größen ansehen, und deßhalb muß sich auch rechter Hand des Gleichheitszeichens ein solches Differenzial befinden.

Nun ist, in eben demselben Sinne, d. h. in so ferne man t als constant betrachtet,

$$d \,.\, \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = u\left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)$$

$$+ v\left(\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz\right)$$

$$+ w\left(\frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz\right);$$

folglich haben wir, wenn wir diese Gleichung zu der vorhergehenden addiren, und $d\lambda$ statt $\frac{d\lambda}{dx}dx + \frac{d\lambda}{dy}dy + \frac{d\lambda}{dz}dz$ schreiben:

$$(17) \qquad \frac{d\lambda}{\mu} + d \cdot \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) =$$

$$= Xdx + Ydy + Zdz - \frac{du}{dt}dx - \frac{dv}{dt}dy - \frac{dw}{dt}dz$$

$$+ \left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right)(udy - vdx) + \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right)(udz - wdx)$$

$$+ \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)(vdz - wdy).$$

In dieser Gleichung erscheint rechter Hand des Gleichheitszeichens das auf x, y, z sich beziehende Differenzial einer Function von x, y, z, t, wenn erstens

$$Xdx + Ydy + Zdz,$$

und zweitens $\quad udx + vdy + wdz$

eine in Bezug auf x, y, z integrable Differenzialformel ist.

Aus der letzteren Annahme folgt nämlich

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy},$$

wodurch sich der Ausdruck rechter Hand des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung auf

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{du}{dt}dx - \frac{dv}{dy}dy - \frac{dw}{dt}dz$$

oder $Xdx + Ydy + Zdz - \dfrac{d(udx + vdy + wdz)}{dt}$

reducirt, und somit die angegebene Eigenschaft besitzt.

Es sey also

$$(18) \qquad Xdx + Ydy + Zdz = dV$$

$$\text{und} \quad udx + vdy + wdz = d\varphi,$$

wobei V eine gegebene, und φ eine unbekannte Function von x, y, z, t anzeigt, so haben wir durch Integration der Gleichung (17)

$$(19) \qquad \int \frac{d\lambda}{\mu} = V - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right),$$

welches Integral den Differenzialgleichungen (14) Genüge leistet.

Die dem Integrale beizufügende Constante, welche hier eine Function von t ist, kann man sich in der unbekannten Function φ enthalten denken.

Da $u = \frac{d\varphi}{dx}$, $v = \frac{d\varphi}{dy}$, $w = \frac{d\varphi}{dz}$ ist, so nimmt die Gleichung (15) die Gestalt

$$(20) \qquad \frac{d\mu}{dt} + \frac{d \,.\, \mu \frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{d \,.\, \mu \frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{d \,.\, \mu \frac{d\varphi}{dz}}{dz} = 0$$

an. Diese Gleichung und die vorhergehende reichen in dem vorliegenden Falle zur vollständigen Berechnung der Bewegung des flüssigen Körpers hin. In der That, ist die Flüssigkeit unzusammendrückbar und gleichförmig dicht, so ist μ constant, folglich $\int \frac{d\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}$; es gibt uns daher die Gleichung (19) den Werth von λ, sobald wir φ kennen: diese Function aber wird durch die Gleichung (20) bestimmt, welche sich gegenwärtig auf

$$(21) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

reducirt. Ist aber die sich bewegende Flüssigkeit eine ausdehnsame, und hängt λ mit μ bloß durch die Gleichung $\lambda = \varkappa\mu$, wobei $\varkappa$ constant ist, zusammen (wie es z. B. die Beschaffenheit aller in der Natur vorfindigen expansiblen Flüssigkeiten, deren Theile sämmtlich einerlei Temperatur haben, mit sich bringt), so wird

$$\int \frac{d\lambda}{\mu} = \frac{1}{\varkappa} \int \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{\varkappa}\, l\mu;$$

führt man dieses Resultat in die Gleichung (19) ein, so kann man aus (20), welche Gleichung sich auf die Form

$$\frac{d\,.\,l\mu}{dt} + \frac{d\,.\,l\mu}{dx} \,.\, \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\,.\,l\mu}{dy} \,.\, \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\,.\,l\mu}{dz} \,.\, \frac{d\varphi}{dz}$$
$$+ \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

bringen läßt, $l\mu$ wegschaffen, wodurch man eine Gleichung erhält, in welcher sich bloß φ befindet.

Es kommt also in jedem der Rechnung zu unterwerfenden Falle vorzüglich darauf an, zu wissen, ob die Differenzialformel

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

als eine integrable angesehen werden dürfe. Die Untersuchung dieses Umstandes wird durch die Bemerkung sehr erleichtert, daß, sobald die genannte Differenzialformel für irgend einen speciellen Werth von t integrabel ist, ihr diese Eigenschaft für alle Werthe von t zukommen muß.

Denn geht in der Formel $u dx + v dy + w dz$ die Größe t in $t + \tau$ über, so verwandelt sich diese Formel in Bezug auf die kleinsten Werthe von τ in

$$u dx + v dy + w dz + \tau \left(\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right).$$

Aber aus der Gleichung (17) erhellet, daß, wenn $u dx + v dy + w dz$ für irgend einen besonderen Werth von t integrabel ist, auch

$$\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz$$

für denselben Werth von t integrirt werden kann; es muß also die Differenzialformel $u dx + v dy + w dz$, selbst wenn man den genannten Werth von t um τ ändert, noch integrabel bleiben. Da man nun eben so von der Integrabilität der Differenzialformel $u dx + v dy + w dz$ für die Zeit $t + \tau$ auf die Integrabilität derselben für die Zeit $t + \tau + \tau'$ schließen kann, wobei τ' gleichfalls sehr klein ist, so ergibt sich, durch Fortsetzung desselben Verfahrens, die Integrabilität dieser Differenzialformel für jeden anderen Werth von t.

Wird eine Flüssigkeit bloß durch die auf dieselbe einwirkenden continuirlichen Kräfte aus dem Zustande der Ruhe in jenen der Bewegung versetzt, so ist für den Anfang der Bewegung $u = o$, $v = o$, $w = o$, mithin $u dx + v dy + w dz$ integrabel; es muß daher diese Differenzialformel während der ganzen Bewegung integrabel bleiben.

Auch sieht man aus dem Gesagten, daß, sobald der Differenzialformel $u dx + v dy + w dz$ in Hinsicht auf irgend einen speciellen Werth von t die Eigenschaft der Integrabilität fehlt, dieselbe auch für keinen anderen Werth von t integrabel seyn wird; denn gäbe es irgend einen Augenblick, in welchem diese Differenzialformel integrabel wäre, so müßte sie es jederzeit seyn.

Erfolgt die Bewegung des flüssigen Körpers durch eine plötzliche Einwirkung auf seine Oberfläche, so ist die hier betrachtete Differenzialformel ebenfalls integrabel. Denn die Geschwindigkeiten u, v, w, welche irgend ein Punct x, y, z des flüssigen Körpers in dem Augenblicke der Einwirkung auf die Oberfläche desselben, parallel zu den Axen der x, y, z, erhält, sind offenbar so beschaffen, daß, wenn man in eben diesem Augenblicke allen Puncten der Flüssigkeit die ihnen zugehörige Geschwindigkeit nach gerade entgegengesetzten Richtungen ertheilt hätte, Gleichgewicht erfolgt wäre. Hiezu wird aber die Integrabilität der Differenzialformel $u dx + v dy + w dz$ erfordert

(dreizehnte Vorlesung); es ist daher diese Differenzialformel während der ganzen Bewegung des flüssigen Körpers integrabel.

Sind die Geschwindigkeiten u, v, w jedes Punctes der bewegten Flüssigkeit stets so klein, daß man die Producte derselben mit den Differenzialquotienten $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{dv}{dx}, \ldots\ldots$ vernachläßigen darf, so reducirt sich die Gleichung (17) auf

$$(22) \qquad \frac{d\lambda}{\mu} = dV - \left(\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz\right).$$

Integrirt man dieselbe in Bezug auf t, nachdem man beiderseits mit dt multiplicirt hat, so erhält man, wenn man der Kürze wegen $\int \frac{d\lambda}{\mu} = U$ setzt, wegen

$$\int dU \,.\, dt = d \,.\, \int U dt \quad \text{und} \quad \int dV \,.\, dt = d \,.\, \int V dt$$

$$u dx + v dy + w dz = d\left(\int V dt - \int U dt\right);$$

woraus hervorgeht, daß die Differenzialformel $u dx + v dy + w dz$ für alle mit sehr kleinen Geschwindigkeiten erfolgende Bewegungen flüssiger Körper integrabel ist. Wir haben daher in diesem Falle, wenn wir die Gleichung (22) in Bezug auf x, y, z integriren,

$$(23) \qquad \int \frac{d\lambda}{\mu} = V - \frac{d\varphi}{dt},$$

wobei φ die obige Bedeutung hat. Diese Gleichung muß noch mit (20) verbunden werden.

Ist jedoch die Flüssigkeit unzusammendrückbar und homogen, so gibt uns die Gleichung (23)

$$(24) \qquad \lambda = \mu\left(V - \frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Die Function φ wird durch die Gleichung (21) bestimmt. Um die Gestalt der freien Oberfläche des flüssigen Körpers während der Bewegung kennen zu lernen, setze man in (24) $\lambda = 0$; man erhält hiedurch die Gleichung

$$(25) \qquad V - \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

welche dieser Oberfläche gehört.

Wirkt auf die Theilchen der Flüssigkeit bloß die Schwere, so ist, wenn wir uns die Axe der z vertical und abwärts gerichtet denken, und die Intensität der Schwere g nennen,

$$X = 0, \; Y = 0, \; Z = g, \text{ mithin } dV = g dz \text{ und } V = gz.$$

Es kömmt also einzig und allein auf die Integration der Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

an. Abstrahirt man von einer der horizontalen Dimensionen der Flüssigkeit, indem man sich dieselbe in einem Canale von unveränderlicher Breite enthalten, und kein Theilchen nach der Richtung dieser Breite bewegt vorstellt, so hat man es, in so ferne die Ebene xz der Seitenwand des Canals parallel ist, nur mit der Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

zu thun.

Die hier aufgestellten Gleichungen machen die Grundlage der Theorie der Wellenbewegung tropfbarer Flüssigkeiten aus. Wie dieselben behandelt werden müssen, um mit der Erfahrung übereinstimmende Resultate zu gewähren, kann man in Poisson's Abhandlung über diesen Gegenstand (Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France, Tome I. année 1816) nachsehen. Bemerkungen zu der genannten Abhandlung enthält der Brüder Weber »Wellenlehre auf Experimente gegründet,« Leipzig 1825.

Eben so sind wir, der diesen Vorlesungen vorgezeichneten Grenzen wegen, in Betreff der Anwendung der allgemeinen Theorie der Bewegung flüssiger Körper auf die Berechnung der Fortpflanzung des Schalles in der Luft, wie auch auf die Schwingungen der Luft in Röhren, genöthiget, auf Poisson's und Laplace's Arbeiten (Journal de l'école polytechnique, cahier 14; Mémoires de l'Académie, Tome II.; Mécanique céleste, Tome V.) zu verweisen.

Nachtrag zu den Verbesserungen im ersten Bande.

Seite Zeile

47 — 7 v. unt. statt: sieben lese man: sechs

77 — 9 v. unt. st. x_n l. m. x_{n+1}

110 — 6 st. $\frac{mr-1}{2}$ l. m. $\frac{2mr-1}{2}$

153 — 16 u. 17 st. die Anzahl l. m. von der Anzahl

— — 18 st. überschreiten l. m. überschritten werden

156 — 8 st. vorhergehenden l. m. nächstfolgenden

173 — 1 u. 2 v. unt. st. Potenzen l. m. Summen der Potenzen

182 — 4 st. Formeln l. m. algebraische Formeln

192 — 13 v. unt. st. $-\frac{1}{2}-\sqrt{k}$ l. m. $-\frac{1}{2}w-\sqrt{k}$

251 — 4 v. unt. st. $\Delta^r u_0$ l. m. $\Delta^n u_0$

274 — 6 v. unt. st. Σx^3 l. m. Σx^2

— — 11 v. unt. st. $x+y^2+$ l. m. $x+y^2-$

275 — 1 v. unt. st. $\Sigma^2_{x,y} f(x-m\Delta x,\ y-n\Delta y)$ l. m. $\Sigma^2_{x,y} f(x-m\Delta x,\ y)$

279 — 15 v. unt. st. $w>r$ l. m. $w<r$

198 — 7 v. unt. st. $\frac{dq}{dy}$ l. m. $\frac{dq}{dy}dy$

299 — 1 v. unt. st. $\frac{d^3u}{dy^3}$ l. m. $\frac{d^3u}{dy^3}dy^3$

300 — 4 st. $\frac{d^nu}{dy^n}$ l. m. $\frac{d^nu}{dy^n}dy^n$

323 — 13 st. Φ_0 l. m. $\Phi_0(0)$

328 — 7 v. unt. st. $x=a_1$ l. m. $x-a_1$

329 — 9 st. a_1 l. m. a_2

360 — 12 st. uv l. m. $d.uv$

— — 21 st. $\psi_{-1}(x)\,dx$ l. m. $\psi_{-1}(x)$

363 — 5 v. unt. st. $a^x dx$ l. m. a^x

364 — 11 st. $(-1)^r\int\omega_{-r}(x).a^x dx$ l. m. $(-1)^r(la)^r\int\omega_{-r}(x).a^x dx$

372 — 2 v. unt. st. x noch z l. m. x noch y

— — 6 v. unt. st. wobei z l. m. wobei $\psi(z)$

398 — 12 st. $\frac{d\varphi(x,y)}{dy}dy$ l. m. $\frac{d\varphi(x,y)}{dy}$

399 — 15 st. $Mdf(x,y,\psi)$ l. m. $MdF(x,y,\psi)$

439 — 14 st. $\int(\delta V dx - V d\delta x)$ l. m. $\int(\delta V dx + V d\delta x)$

Verbesserungen im zweiten Bande.

Seite Zeile

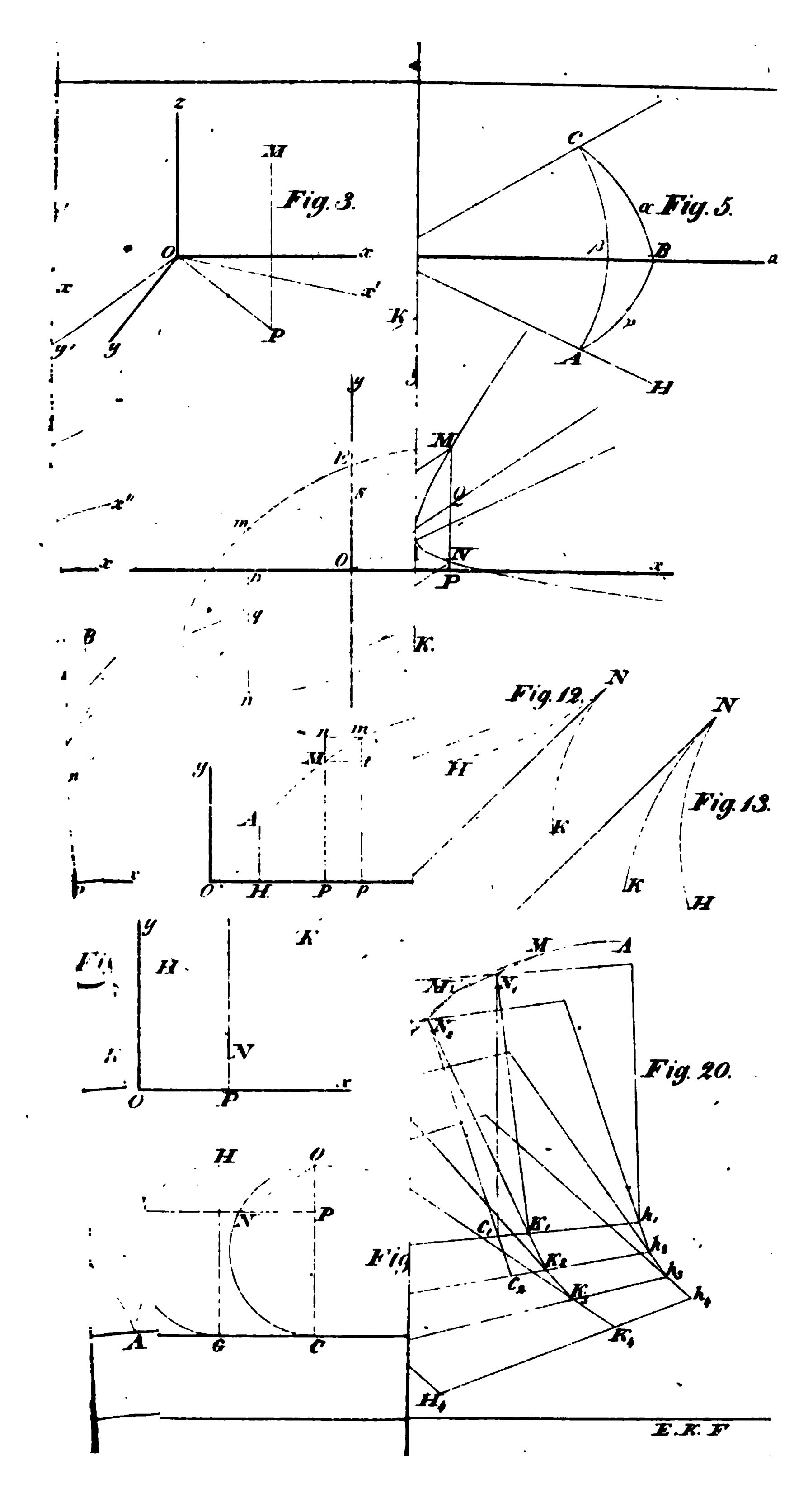
141 — 2 v. unt. statt: $\frac{ds^3}{\sqrt{ds^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2)-d^2s^2}}$ lese man: $\frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2}}$

160 — 14 st. verschwindet l. m. im Allgemeinen verschwindet

336 — 13 st. dreißigsten l. m. neun und zwanzigsten

349 — 8 v. unt. st. $p\,dx+q\,dy$ l. m. $p\,\delta x+q\,\delta y$

418 — 2 st. A, B, C, l. m. C, B, A, F, E, D; st. 2A, 2B, 2C, l. m. 2A, 2B, 2C, D, E, F


Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 20.
E. K. F.